

**BM YAVORSKI, A.A. PINSKI**

**FUNDAMENTOS  
DE  
FÍSICA**

**I**







Б. М. ЯВОРСКИЙ, А. А. ПИНСКИЙ

ОСНОВЫ  
ФИЗИКИ

том I

МЕХАНИКА  
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

МОСКВА «НАУКА»

B. M. YAVORSKI, A. A. PINSKI

**FUNDAMENTOS  
DE  
FÍSICA**

**I**

MECÁNICA  
FÍSICA MOLECULAR  
ELECTRODINÁMICA

Traducido al español  
por el ingeniero  
Antonio Ballesteros Elías

EDITORIAL MIR  
MOSCÚ

Impreso en la URSS

На испанском языке

© Издательство «Наука». 1981

© Traducción al español. Editorial Mir. 1983

# ÍNDICE

Prólogo \_\_\_\_\_ 18

## PRIMERA PARTE

### MOVIMIENTO Y FUERZAS

<b>Capítulo 1. Velocidad</b> . . . . .	25
§ 1.1. Movimiento mecánico (25). § 1.2. Sistema de referencia. Trayectoria (27). § 1.3. Movimiento rectilíneo. Ley de movimiento (29). § 1.4. Movimiento uniforme (31). § 1.5. Movimiento variado (32). § 1.6. Velocidad media (34). § 1.7. Velocidad instantánea del movimiento variado (35).	
<b>Capítulo 2. Inercia</b> . . . . .	37
§ 2.1. Principio de la inercia (37). § 2.2. Sistemas inerciales de referencia (40). § 2.3. Principio de la relatividad (41). § 2.4. Transformaciones de Galileo (43). § 2.5. Ley clásica de composición de velocidades (45).	
<b>Capítulo 3. Magnitudes escalares y vectoriales</b> . . .	46
§ 3.1. Magnitudes escalares (46). § 3.2. Magnitudes vectoriales (47). § 3.3. Ciertas operaciones con vectores (48). § 3.4. Descomposición de un vector en dos sumandos (componentes) (50). § 3.5. Velocidad vector (51). § 3.6. Composición de velocidades (53).	
<b>Capítulo 4. Aceleración</b> . . . . .	55
§ 4.1. Aceleración media e instantánea (55). § 4.2. Movimiento rectilíneo variable (55). § 4.3. Movimiento recti-	

líneo uniformemente variado (56). § 4.4. Gráfica de velocidad con el movimiento uniformemente variado (57). § 4.5. Cálculo gráfico de los desplazamientos (58). § 4.6. Desplazamiento y velocidad media con movimiento uniformemente variado (59). § 4.7. Movimiento uniforme de un punto material por una circunferencia (60). § 4.8. Aceleración con movimiento uniforme de un punto material por una circunferencia (61).

**Capítulo 5. Fuerza** . . . . . 63

§ 5.1. La fuerza como medida de interacción de los cuerpos (63). § 5.2. Deformaciones elásticas y plásticas (64). § 5.3. Fuerza vector (66). § 5.4. Composición y descomposición de fuerzas aplicadas a un punto material (68).

**Capítulo 6. Fuerza de la gravedad, peso y masa** . . . . . 69

§ 6.1. Fuerza de la gravedad. Peso (69). § 6.2. Caída libre (71). § 6.3. Masa de un cuerpo (73). § 6.4. Densidad de la sustancia (74).

**Capítulo 7. Ley fundamental de dinámica** . . . . . 75

§ 7.1. Fuerza y aceleración (75). § 7.2. Aplicaciones de la ley fundamental de dinámica (79). § 7.3. Ingravedad (82). § 7.4. Sistema de unidades (84). § 7.5. Sistema Internacional de Unidades (85).

**Capítulo 8. Ley de movimiento de un punto material y condiciones iniciales** . . . . . 87

§ 8.1. Problema fundamental de dinámica (87). § 8.2. Movimiento de un punto material bajo la acción de la fuerza de la gravedad (88). § 8.3. Solución numérica del problema fundamental de dinámica (91). § 8.4. Movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza elástica (92). § 8.5. Magnitudes que determinan la ley de movimiento de un cuerpo material (95).

**Capítulo 9. Gravitación . . . . . 97**

§ 9.1. Descubrimiento de la ley de la gravitación (97).  
§ 9.2. Ley de la gravitación universal (99). § 9.3. Experimento de Cavendish (100). § 9.4. Cálculo de las distancias del Sol a los planetas (101). § 9.5. Campo gravitatorio (102). § 9.6. Intensidad del campo gravitatorio (103). § 9.7. Campo gravitatorio de la Tierra (104). § 9.8. Influencia de la rotación de la Tierra sobre la aceleración de la caída libre (106).

**Capítulo 10. Fuerzas eléctricas . . . . . 107**

§ 10.1. Carga eléctrica (107). § 10.2. Ley de Coulomb (108).  
§ 10.3. Unidad de carga (111). § 10.4. Dipolo (112). § 10.5. Campo eléctrico. Intensidad (115). § 10.6. Campo de una carga puntual y un dipolo (115).

**Capítulo 11. Rozamiento . . . . . 118**

§ 11.1. Rozamiento externo e interno (viscosidad) (118).  
§ 11.2. Rozamiento en reposo (119). § 11.3. Ángulo de rozamiento en reposo (122). § 11.4. Rozamiento de deslizamiento (123). § 11.5. Rozamiento de rodadura (124). § 11.6. Movimiento de los cuerpos bajo la acción de las fuerzas de rozamiento (125). § 11.7. Rozamiento interno (viscosidad) (126). § 11.8. Movimiento de un cuerpo en un líquido (128). § 11.9. Caída de un cuerpo en un líquido o gas (131).

**Capítulo 12. Teoría de la relatividad . . . . . 134**

§ 12.1. Velocidad de la luz y ley de composición de velocidades (134). § 12.2. Postulados fundamentales de la teoría especial de la relatividad (136). § 12.3. Relatividad de la simultaneidad y la longitud (137). § 12.4. Transformaciones relativistas de las coordenadas. Ley relativista de composición de velocidades (141). § 12.5. Carácter limitado de la velocidad de la luz (143). § 12.6. Transformaciones de Lorentz (144). § 12.7. Longitud del segmento (145). § 12.8. Intervalo de tiempo entre dos acontecimientos (146). § 12.9. Intervalo de tiempo

entre causa y efecto (147). § 12.10. Correlación entre la mecánica relativista y newtoniana (149).

**Capítulo 13. Masa, cantidad de movimiento y fuerza en la teoría de la relatividad** 151

§ 13.1. Masa relativista y cantidad de movimiento (151). § 13.2. Ley fundamental de dinámica en la teoría de la relatividad (153). § 13.3. Correlación entre la dinámica newtoniana y relativista (154).

**Capítulo 14. Ley de movimiento y principio de incertidumbre** 157

§ 14.1. Condiciones iniciales y aparatos de medida (157). § 14.2. Principio de incertidumbre (indeterminación) (161). § 14.3. Principio de incertidumbre y la mecánica clásica (162).

SEGUNDA PARTE

LEYES DE LA CONSERVACIÓN

**Capítulo 15. Ley de la conservación de la cantidad de movimiento** 167

§ 15.1. Sistema cerrado de cuerpos (167). § 15.2. Ley de la conservación de la cantidad de movimiento (169). § 15.3. Efecto de repercusión (170). § 15.4. Propulsión reactiva a chorro (172). § 15.5. Cálculo de la reserva de combustible (174). § 15.6. Centro de inercia (175). § 15.7. Movimiento del centro de inercia (176). § 15.8. Masa relativista (178).

**Capítulo 16. Energía total y cinética** 180

§ 16.1. Energía total de un cuerpo (180). § 16.2. Energía cinética (181). § 16.3. Energía y cantidad de movimiento (182). § 16.4. Energía cinética y trabajo (183). § 16.5. Potencia (186). § 16.6. Unidades de energía, trabajo y potencia (186). § 16.7. Cantidad de movimiento y energía de una partícula localizada (187).



**Capítulo 17. Teoría elemental del choque . . . . . 190**

§ 17.1. ¿Qué es el choque? (190). § 17.2. Choque perfectamente inelástico (191). § 17.3. Choque elástico (193). § 17.4. Frenado de neutrones (195). § 17.5. Presión del flujo de partículas contra la pared (196).

**Capítulo 18. Fuerzas conservativas y energía potencial 198**

§ 18.1. Trabajo de una fuerza variable (198). § 18.2. Trabajo de una fuerza elástica (200). § 18.3. Trabajo de la fuerza de Coulomb (202). § 18.4. Trabajo de la fuerza de gravitación (204). § 18.5. Fuerzas conservativas (205). § 18.6. Energía potencial de las interacciones elásticas de Coulomb y de gravitación (206). § 18.7. Potencial del campo electrostático (208). § 18.8. Potencial del campo de una carga puntual (209). § 18.9. Energía del campo eléctrico (210).

**Capítulo 19. Ley de la conservación de la energía en la mecánica newtoniana . . . . . 211**

§ 19.1. Energía mecánica y su conservación (211). § 19.2. Energía mecánica y rozamiento (212). § 19.3. Velocidades cósmicas (213). § 19.4. «Rizo del diablo» (214). § 19.5. Curvas potenciales (215). § 19.6. Energía potencial y equilibrio (219).

**Capítulo 20. Energía interna . . . . . 220**

§ 20.1. Energía interna de un sistema de partículas (220). § 20.2. Variación de la energía interna al deformarse el cuerpo (222). § 20.3. Variación de la energía interna del cuerpo con los procesos térmicos (223). § 20.4. Variación de la energía durante las reacciones químicas (224). § 20.5. Variación de la energía interna en las reacciones nucleares (226).

**Capítulo 21. Ley de la conservación de la energía 227**

§ 21.1. El trabajo como medida de la variación de las energías total e interior (227). § 21.2. Transmisión de

calor (228). § 21.3. Cantidad de calor (230). § 21.4. Primer principio de la termodinámica (231). § 21.5. Sistema aislado adiabáticamente (232). § 21.6. Ley de la conservación de la energía (233) § 21.7. Ley de la conservación de la masa (234). § 21.8. Algo más acerca de la masa relativista (236).

**Capítulo 22. Ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento . . . . . 237**

§ 22.1. Particularidades del movimiento rotativo (237).  
§ 22.2. Energía cinética y momento de inercia (238).  
§ 22.3. Dependencia entre el momento de inercia y la posición del eje de rotación (240). § 22.4. Momento de fuerza (243). § 22.5. Condición para el equilibrio de un cuerpo que tiene eje de rotación (244). § 22.6. Momento de cantidad de movimiento y ecuación fundamental de dinámica (245). § 22.7. Ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento (246). § 22.8. Analogía entre las magnitudes y las correlaciones entre ellas con movimientos de traslación y rotativo (250).

**Capítulo 23. Simetría en la naturaleza y leyes de la conservación . . . . . 251**

§ 23.1. Las leyes de la conservación como leyes fundamentales de la naturaleza (251). § 23.2. Las leyes de la conservación como principios de imposibilidad (253). § 23.3. Las leyes de la conservación y la simetría del espacio—tiempo (254). § 23.4. La homogeneidad del tiempo y la conservación de la energía (255).

**Capítulo 24. Sistemas no inerciales de referencia y gravitación . . . . . 256**

§ 24.1. Fenómenos en un sistema de referencia en movimiento acelerado (256). § 24.2. Fuerza de inercia (259). § 24.3. Particularidades de las fuerzas de inercia (261). § 24.4. El espacio y el tiempo en los sistemas no inerciales de referencia (261). § 24.5. Principio de equivalencia (266). § 24.6. Concepto de la teoría de gravitación de Einstein (268). § 24.7. Paradoja de los gemelos (272).

TERCERA PARTE

TEORÍA CINÉTICO-MOLECULAR DE UN GAS

**Capítulo 25. Movimiento molecular . . . . . 276**

§ 25.1. Cómo fue medida la velocidad de movimiento de las moléculas (276). § 25.2. Distribución de las moléculas por las velocidades (278). § 25.3. Longitud del recorrido libre de una molécula (281). § 25.4. Difusión (284). § 25.5. Ley de la difusión (285). § 25.6. Separación de las mezclas de gases (287).

**Capítulo 26. Gases ideales o perfectos . . . . . 290**

§ 26.1. Presión de los gases (290). § 26.2. Unidad de presión (292). § 26.3. Gas ideal o perfecto (293). § 26.4. Temperatura (296). § 26.5. Temperatura absoluta y ecuación de estado de un gas ideal (297). § 26.6. Termómetro de gas (298). § 26.7. Temperatura absoluta y temperatura según la escala de Celsius (300). § 26.8. Cero absoluto (301). § 26.9. Constantes de Avogadro y Boltzmann (303). § 26.10. Distribución de las moléculas en un campo de fuerzas (306). § 26.11. Distribución barométrica (307).

**Capítulo 27. Gas ideal y primer principio de termodinámica . . . . . 310**

§ 27.1. Energía interna de un gas ideal monoatómico (310). § 27.2. Trabajo al dilatarse un gas ideal (312). § 27.3. Primer principio de termodinámica y capacidad calorífica de un gas (313). § 27.4. Transformación isócara (314). § 27.5. Transformación isobárica (315). § 27.6. Transformación isotérmica (317). § 27.7. Transformación adiabática (318). § 27.8. Capacidad calorífica de un gas biatómico (320). § 27.9. Concepto de la teoría cuántica de la capacidad calorífica de los gases (324).

## Capítulo 28. Segundo principio de termodinámica 328

§ 28.1. Transformaciones cuasiestáticas (328). § 28.2. Transformaciones reversibles (330). § 28.3. Irreversibilidad de las transformaciones térmicas reales (331). § 28.4. Irreversibilidad y estadística (333). § 28.5. Difusión y probabilidad termodinámica (337). § 28.6. Probabilidad termodinámica y otras transformaciones térmicas (338). § 28.7. Probabilidad termodinámica y entropía (339). § 28.8. Entropía y transmisión de calor (341). § 28.9. Segundo principio de termodinámica (344). § 28.10. Sentido estadístico del segundo principio de termodinámica. Fluctuaciones (345). § 28.11. Movimiento browniano y fluctuaciones (346). § 28.12. Movimiento browniano y constante de Boltzmann (348).

## Capítulo 29. Máquinas térmicas . . . . . 352

§ 29.1. Máquinas térmicas y el desarrollo de la técnica (352). § 29.2. Motor térmico (352). § 29.3. Estructura esquemática y balance energético de motor térmico (354). § 29.4. Motor térmico y segundo principio de termodinámica (355). § 29.5. Ciclo de Carnot (357). § 29.6. Rendimiento de un motor real (358). § 29.7. Ciclo inverso de Carnot (359). § 29.8. Instalación frigorífica y bomba térmica (361).

## Capítulo 30. Principios de dinámica de los gases 363

§ 30.1. Parámetros termodinámicos de un gas en movimiento (363). § 30.2. Ecuación de continuidad (363). § 30.3. Ecuación de la cantidad de movimiento (364). § 30.4. Ecuación de Bernoulli (365). § 30.5. Velocidad de propagación de perturbaciones elásticas (367). § 30.6. Cómo tener en cuenta la compresibilidad de un gas. Número de Mach (369). § 30.7. Cono de Mach (370). § 30.8. Onda de choque frontal (372). § 30.9. Resistencia de ondas (373). § 30.10. Tobera (374). § 30.11. Analogía entre la tobera y la máquina térmica (376). § 30.12. Tobera de Laval (377). § 30.13. Motor de retropropulsión (377). § 30.14. Ala de avión (379). § 30.15. Presión en la corriente de un líquido (381). § 30.16. Definición de la viscosidad (382).

CUARTA PARTE  
FUERZAS MOLECULARES Y ESTADOS  
DE AGREGACIÓN DE LA MATERIA

<b>Capítulo 31. Fuerzas moleculares . . . . .</b>	<b>384</b>
§ 31.1. Densidad y compresibilidad de la materia (384). § 31.2. Fuerzas moleculares (386). § 31.3. Origen eléctrico de las fuerzas moleculares (387). § 31.4. Gráfica de las fuerzas moleculares (389). § 31.5. Curva de potencial de la interacción molecular (394). § 31.6. Dilatación térmica de los sólidos y líquidos (392).	
<b>Capítulo 32. Orden de largo alcance . . . . .</b>	<b>395</b>
§ 32.1. Monocristal (395). § 32.2. Policristal (397). § 32.3. Red cristalina. Orden de largo alcance (398). § 32.4. Defectos del empaquetamiento y estructura en bloques del cristal (399). § 32.5. Movimiento de los defectos y difusión (401). § 32.6. Movimiento de las dislocaciones y deformaciones del cristal (403).	
<b>Capítulo 33. Empaquetamiento compacto de las partículas . . . . .</b>	<b>405</b>
§ 33.1. Tipos de enlaces cristalinos (405). § 33.2. Empaquetamiento muy compacto de bolas iguales (408). § 33.3. Empaquetamientos muy compactos de bolas con radios diferentes (410). § 33.4. Redes que no se pueden representar como empaquetamiento de bolas (410). § 33.5. Estructura del hielo (413). § 33.6. Polímeros (414).	
<b>Capítulo 34. Ordenación próxima . . . . .</b>	<b>415</b>
§ 34.1. Singularidades del estado líquido (415). § 34.2. Estructura del líquido y sus propiedades (417). § 34.3. Tiempo medio del estado sedentario (419). § 34.4. Difusión en los líquidos (421). § 34.5. Viscosidad de los líquidos (422). § 34.6. Cuerpos amorfos (424). § 34.7. Energía de la capa superficial y tensión superficial de líquido (425). § 34.8. Presión bajo la superficie curvada de un líquido (426). § 34.9. Fenómenos capilares (428).	

**Capítulo 35. Vapor . . . . . 429**

§ 35.1. Evaporación (429). § 35.2. Vapor saturado (431).  
§ 35.3. Presión del vapor saturado (433). § 35.4. Isoterma del vapor (435). § 35.5. Estado crítico de la sustancia (437). § 35.6. Humedad del aire (439).

**Capítulo 36. Transiciones de fase . . . . . 441**

§ 36.1. Variación del estado de agregación (441). § 36.2. Diagrama de la transición líquido—gas (442). § 36.3. Diagrama de la transición cristal—gas (443). § 36.4. Diagrama de la transición cristal—líquido (443). § 36.5. Diagrama de la transición cristal—cristal (445). § 36.6. Punto triple (447). § 36.7. Variación de la energía interna y de la entropía con las transiciones de fase de primer género (447). § 36.8. Estados metaestables (450). § 36.9. Condensación. Vapor sobresaturado (452). § 36.10. Ebullición. Líquido sobrecalentado (454). § 36.11. Licuación de los gases (455).

QUINTA PARTE  
ELECTRODINÁMICA

**Capítulo 37. Campo de cargas inmóviles en el vacío 459**

§ 37.1. Líneas de fuerza (459). § 37.2. Superficies equipotenciales (460). § 37.3. Relación entre la intensidad y el potencial (462). § 37.4. Dipolo en el campo eléctrico (463). § 37.5. Condensador plano (465). § 37.6. Capacidad eléctrica (467). § 37.7. Energía del campo. Densidad de energía (468). § 37.8. Fuerza de interacción entre las placas de un condensador (468). § 37.9. Conductor en el campo eléctrico (469). § 37.10. Determinación de la carga del electrón (471).

**Capítulo 38. Dieléctricos . . . . . 474**

§ 38.1. Campo eléctrico en presencia de un dieléctrico (474). § 38.2. Vector de polarización (475). § 38.3. Susceptibilidad eléctrica (476). § 38.4. Energía del campo en un dieléctrico (477). § 38.5. Polarizabilidad de deformación (478). § 38.6. Polarizabilidad dipolar (480).

**Capítulo 39. Corriente continua . . . . . 483**

§ 39.1. Campo exterior. Tensión y fem (483). § 39.2. Intensidad y densidad de corriente (486). § 39.3. Ley de Ohm para un sector homogéneo del circuito (488). § 39.4. Resistencia (488). § 39.5. Ley de Ohm en forma diferencial (489). § 39.6. Ley de Ohm para un sector heterogéneo del circuito y para un circuito cerrado (490). § 39.7. Ley de Joule—Lenz (491). § 39.8. Carga y descarga de un condensador (492).

**Capítulo 40. Campo magnético en el vacío . . . . . 493**

§ 40.1. Interacción de corrientes. Fuerzas magnéticas (493). § 40.2. Ley de transformación para la cantidad de movimiento transversal y la fuerza transversal (495). § 40.3. Interacción entre cargas en movimiento (497). § 40.4. Vector de inducción del campo magnético. Líneas de fuerza (499). § 40.5. Campo magnético de un conductor con corriente (500). § 40.6. Momento magnético (503). § 40.7. Intensidad del campo magnético (506). § 40.8. Invariancia de la carga eléctrica (507).

**Capítulo 41. Cargas y corrientes en el campo magnético 509**

§ 41.1. Fuerza de Lorentz (509). § 41.2. Movimiento de las partículas cargadas en un campo magnético homogéneo (510). § 41.3. Determinación del signo de la carga de las partículas elementales (512). § 41.4. Ciclotrón (513). § 41.5. Energía de la partícula y condición de sincronización (516). § 41.6. Sincrofasotróon (518). § 41.7. Carga específica del electrón (521). § 41.8. Carga específica del ion (523). § 41.9. Conductor con corriente en el campo magnético (525). § 41.10. Cuadro con corriente en el campo magnético (526).

**Capítulo 42. Sustancias magnéticas . . . . . 527**

§ 42.1. Tres tipos de sustancias magnéticas (527). § 42.2. Momento magnético del átomo (529). § 42.3. Magnitudes que caracterizan el campo magnético en la sustancia (531). § 42.4. Diamagnetismo (532). § 42.5. Paramagnetismo (535). § 42.6. Ferromagnetismo. Punto de Curie (536). § 42.7. Histéresis (539). § 42.8. Estructura por do-

minios de las sustancias ferromagnéticas (541). § 42.9. Experimento de Einstein-de-Haas (545). § 42.10. Experimento de Stern-Gerlach (547). § 42.11. Spin del electrón (548). § 42.12. Antiferromagnetismo (550).

### Capítulo 43. Inducción electromagnética . . . . . 553

§ 43.1. Descubrimiento de Faraday (553). § 43.2. Fenómeno de inducción electromagnética y fuerza de Lorentz (554). § 43.3. Fuerza electromotriz de la inducción (556). § 43.4. Fenómeno de inducción en un conductor inmóvil (557). § 43.5. Intensidad del campo inducido (558). § 43.6. Campo electromagnético y principio de la relatividad (559). § 43.7. Ley de inducción de Faraday (560). § 43.8. Regla de Lenz (562). § 43.9. Inducción electromagnética y ley de la conservación de la energía (562). § 43.10. Autoinducción (564). § 43.11. Energía del campo electromagnético (565). § 43.12. Conexión de un circuito con inductancia (567).

### Capítulo 44. Conductividad eléctrica de los sólidos 568

§ 44.1. Base experimental de la teoría electrónica de conductividad de los metales (568). § 44.2. Efecto Hall (570). § 44.3. Gas electrónico (574). § 44.4. Deducción de la ley de Ohm de la teoría electrónica (576). § 44.5. Conductividad de los metales y los semiconductores (579). § 44.6. Deducción de la ley de Joule-Lenz (580). § 44.7. Diferencia de potencial de contacto (583). § 44.8. Termoelectricidad (584). § 44.9. Trabajo de salida (586).

### Capítulo 45. Capacidad calorífica y conductividad térmica de los sólidos . . . . . 588

§ 45.1. Capacidad calorífica (588). § 45.2. Capacidad calorífica de los metales (590). § 45.3. Conductividad térmica de los aisladores (591). § 45.4. Conductividad térmica de los metales (594).

### Capítulo 46. Conductividad eléctrica de los electrolitos 597

§ 46.1. Disociación electrolítica (597). § 46.2. Ley de Ohm y conductividad de los electrolitos (598). § 46.3. Leyes de Faraday (600). § 46.4. Elemento galvánico (601).



Capítulo 47. Corriente en el vacío . . . . .	602
§ 47.1. Emisión termoeléctrica (602). § 47.2. Diodo y su característica (604). § 47.3. Triodo y su característica (606). § 47.4. Tubo de rayos catódicos (608).	
Capítulo 48. Corriente en los gases . . . . .	610
§ 48.1. Ionización y recombinación (610). § 48.2. Descarga no espontánea (611). § 48.3. Ionización por choque (614). § 48.4. Contador de Geiger-Müller (616). § 48.5. Descarga espontánea. Plasma (617). § 48.6. Descarga luminiscente (619). § 48.7. Plasma en el campo magnético (622). § 48.8. Generador magnetohidrodinámico (MHD) (624).	
Índice alfabético	627

## PRÓLOGO

En la actualidad, la física va a la cabeza de las ciencias naturales. Esto es debido a la riqueza y variedad de las ideas y los métodos de las investigaciones de física moderna, su importancia fundamental para la gnoseología (teoría de los conocimientos), para el desarrollo de la concepción dialéctico-materialista del mundo. No es de menor importancia la influencia de la física para el desarrollo de las fuerzas productivas de la sociedad. Una serie de dominios de la técnica moderna, como electrónica (incluida la electrónica de semiconductores y cuántica), técnica nuclear y construcción de cohetes, radiotecnica, etc., se entrelazan tan estrechamente con la física, que se han convertido en sus partes integrantes. Al mismo tiempo, en las ramas «clásicas» de la ciencia y la técnica, formadas hace mucho, la aplicación de nuevas ideas y métodos físicos de investigación llevan con frecuencia a soluciones, nuevas en principio, de una serie de problemas.

Han surgido y desarróllanse de modo impetuoso, asignaturas afines a las ciencias generales e ingeniería, que se encuentran en el punto de unión de varias ciencias y que se basan en la física (cibernética, radioastronomía, biónica, biofísica, etc.). Se han ampliado de forma notable las posibilidades para la ulterior penetración, unos en otros, de diversos ámbitos de los conocimientos. Además, es característica para nuestro tiempo la brusca reducción de los plazos entre los descubrimientos científicos y su aplicación en la economía nacional, la vida cotidiana y las actividades prácticas.

Todo lo dicho ha provocado un aumento considerable de las exigencias que se presentan al curso moderno de física en los sistemas de enseñanza tanto en la escuela básica, como en la superior. En la primera, ha sido introducido un nuevo programa de física, se han creado nuevos libros de texto y materiales didácticos. En los grados superiores de la

escuela básica incluyéronse cursos facultativos que tienen como fin familiarizar a los alumnos, interesados por esto, con ciertos problemas de la física moderna. En clases especializadas y escuelas básicas fisicomatemáticas, la física es estudiada por programas de elevado nivel.

La elevación del nivel de la enseñanza de física en la escuela básica y los centros de enseñanza superior, plantea una serie de problemas metódicos. El más complicado de ellos yace en la creación de los correspondientes libros de texto y materiales didácticos. Al mismo tiempo, es necesario resolver el problema que (sin pretensiones de plenitud y rigurosidad) enunciaríamos del modo siguiente: exponer las ideas fundamentales de física moderna, su sentido físico, los métodos de investigación y los resultados más importantes sin aplicar un complicado aparato matemático. Con la particularidad de que hay que mostrar las relaciones orgánicas de física moderna y clásica, el valor y la importancia inapreciable de aquellos resultados de física «clásica», sin la asimilación de los cuales es imposible penetrar en el círculo de ideas de física moderna, comprender sus métodos y abarcar sus logros.

La experiencia de la enseñanza de física en la escuela básica y centros de enseñanza superior, adquirida en el transcurso de muchos años, llevó a los autores a la idea, de que el libro en que fuera resuelto este problema, podría ser creado al desechar la sucesión tradicional de exposición del material didáctico. La idea metódica fundamental del libro, que ofrecemos al lector, consiste en que *desde el principio hace resaltar las relaciones orgánicas entre la física clásica y la moderna.*

En particular, esto nos obliga a llevar por todo el curso de mecánica y electrodinámica las ideas de la teoría especial de la relatividad y, en la medida más completa, utilizarlas al enunciar los conceptos fundamentales. Algunas de las más importantes ideas de la mecánica cuántica, también han de ser utilizadas durante todo el curso de física.

Al realizar estas ideas, los autores han tropezado con grandes dificultades metódicas. La principal de ellas consiste en introducir desde el principio del curso sistematizado los conceptos y representaciones, cuyo sentido va aclarándose sólo de modo gradual durante todo el curso de física. No obstante, semejante dificultad también existe en la confección tradicional de dicho curso.

Además, con el sistema tradicional de exposición, cuando los conceptos y representaciones de la física moderna se aducen al final del curso, de forma inconsciente, creamos en los estudiantes cierta barrera psicológica que impide la asimilación de las ideas de la física moderna, es decir, éstas parecen contradecir al «sentido común», que precisamente tiende a consolidar la metodología tradicional.

He aquí la causa por la que, a pesar de todo, nos hemos decidido a escribir este libro, aunque con claridad comprendemos que las dificultades con que vamos a tropezar, tienen que llevar a notables insuficiencias en la exposición de la materia. El libro está destinado para aquellos lectores que han asimilado el curso escolar de física y desean conocer los fundamentos de física clásica y moderna. El manual será útil a los que piensan ingresar en los centros de enseñanza superior, permitirá repetir el curso escolar a nivel más elevado, lo que, sin duda alguna, favorecerá a la profundización y concretización de los conocimientos. Esperamos que también prestará ayuda a los alumnos de los grados superiores de la escuela básica tanto al estudiar el curso fundamental de física, como, y en particular, al estudiar los cursos escolares facultativos.

También sacarán determinado provecho al trabajar con este libro los estudiantes de los centros de enseñanza superior.

Sin embargo, no debemos suponer que la falta de un aparato matemático complicado en el libro, lo hace de inmediato fácil para su lectura y asimilación. La física es una asignatura complicada y su estudio requiere serios esfuerzos. Por esta razón, todo libro por el que puede ser estudiada la física, exige tiempo y trabajo serio e intenso. Semejante libro no puede ser simplemente leído, con él hay que trabajar.

Los autores tienen la esperanza de que el tiempo y los esfuerzos que gasten los lectores para estudiar los fundamentos de física con ayuda de este manual, serán compensados en los posteriores estudios y trabajos.

En la tercera edición del libro, en determinado grado, se ha tenido en cuenta la gran cantidad de referencias de los lectores acerca de las dos primeras ediciones y cierta experiencia de trabajo con este libro de los profesores de una serie de escuelas corrientes y fisicomatemáticas en diversas ciudades y pueblos de la Unión Soviética, así como de

las secciones preparatorias de los centros de enseñanza superior.

De acuerdo con el nuevo contenido de la enseñanza de la matemática, los graduados de las escuelas han asimilado elementos de cálculo diferencial e integral. Tomando en consideración este hecho, en la tercera edición del libro han sido introducidos los correspondientes conceptos y símbolos.

En la tercera edición hemos precisado los valores de las magnitudes físicas fundamentales, así como algunos términos y definiciones.

Expresamos nuestro profundo reconocimiento a todos los lectores que han enviado sus indicaciones y deseos. Reconocemos con claridad que esta edición también necesita un posterior perfeccionamiento y agradeceremos toda clase de observaciones críticas.

Rogamos envíen sus observaciones y referencias acerca de este libro a la siguiente dirección: Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 1-110, GSP, URSS.

### *Cómo trabajar con el libro*

El estudio exitoso de la física elemental tiene como objetivo, no sólo la preparación para los exámenes de ingreso al centro de enseñanza superior, sino que, principalmente, la creación de una sólida base para la enseñanza posterior en dichos centros.

Durante el estudio reiterado del curso surge una complicada situación psicológica: el lector cree que todo le es ya conocido, que para la asimilación del material no hay que aplicar grandes esfuerzos y, por fin, que es suficiente hojear el libro. Todo esto es una profunda equivocación. El libro de texto no se puede leer, hay que estudiarlo, es decir, con atención estudiar a fondo todos sus apartados, prestando particular atención a las definiciones de las nociones fundamentales, a las enunciaciones de las leyes principales y a los corolarios que de ellas se desprenden.

En la actualidad toda la física, todos sus conceptos y leyes se agrupan alrededor de las teorías fundamentales: la mecánica newtoniana y la teoría de la relatividad, la teoría cinético-molecular y los principios de termodinámica, la teoría del campo electromagnético y la teoría electrónica, la teoría de oscilaciones y la teoría cuántica. La asimilación

de estas teorías favorece a la comprensión más profunda de la esencia de los fenómenos y leyes físicos, permite desde un punto de vista único, contemplar el enorme material real. Al mismo tiempo, el estudio de las teorías fundamentales exige del que estudia el presente manual, el atento análisis de concepciones, factores y regularidades aislados y la determinación de su puesto en el sistema de teorías físicas. Con ello, es de importancia comprender si la concepción dada es una definición, factor experimental, corolario lógico o generalización, etc. Sólo tratando de semejante modo el material expuesto, es posible su profunda comprensión, lo que es condición obligatoria para la sólida asimilación de la física.

Queremos llamar la atención del lector acerca de la necesidad del trabajo sistemático y consecutivo con el manual. La cuestión consiste en que tanto por el volumen del material, como por su estructura, el presente libro se diferencia considerablemente del libro de texto escolar y de otros manuales para aquellos que van a ingresar en los centros de enseñanza superior. La singularidad de este libro consiste en que en él están entrelazadas de forma orgánica la física clásica y la moderna.

En el libro, el material está expuesto en una secuencia lógica que corresponde a la idea fundamental y, por lo tanto, debe estudiarse observando dicha secuencia. Sólo la atenta lectura, el análisis de todos los cálculos y su deducción por el estudiante, la asimilación de la lógica de los razonamientos físicos, llevará a la comprensión real de la esencia del problema y de forma automática inconscientemente favorecerá a su sólida retención en la memoria. En este sentido es muy útil tomar apuntes del material, sobre todo de su parte que está indicada en el programa para las personas que piensen ingresar en los centros de enseñanza superior. Deben tratar de enunciar con precisión las definiciones y deducciones, comprobándolas por el texto del manual, teniendo en cuenta que hablamos de la precisión en esencia y no de la coincidencia textual de las formulaciones.

Al trabajar con el manual presten atención a la descripción de los experimentos. La mayoría de los estudiados en el manual, son experimentos fundamentales, que han servido para la creación de una u otra teoría física.

El alto nivel teórico de desarrollo de la física conduce a que en ella se utilicen con extensidad los métodos matemá-

tivos y múltiples conceptos se deducen de los fundamentales. Junto con esto, la física, como parte de las ciencias naturales, es una ciencia experimental. En la física, el experimento sirve tanto de base inicial, que suministra material real, como de método de comprobación de uno u otro corolario de la teoría. Es decir, el experimento sirve de criterio de la realidad. Por otro lado, la descripción en el libro de una serie de experimentos tiene como objetivo familiarizar al lector con las múltiples aplicaciones de la física en la práctica.

No se puede estudiar la física sin aprender a resolver problemas. Para fijar los conocimientos y perfeccionar el hábito de resolver problemas, se puede hacer uso de una serie de compendios de problemas, editados para ayudar a los que piensan ingresar en los centros de enseñanza superior. En particular ha sido editado un compendio de problemas\* en el cual éstos y sus soluciones están de acuerdo con el material teórico del manual de dos tomos según el volumen de nociones, orden de exposición, sistema de designaciones, etc.

Previamente examinen todos los ejemplos que se estudian en los dos tomos, esto facilitará la resolución de problemas análogos. Hay que tener en cuenta, que la resolución de problemas físicos (salvo los ejercicios estándar) es un trabajo creador que con dificultad se somete a estandarización y algoritmización. ¡Por esta razón, no hay que dejarse llevar por el pánico si no se consigue resolver el problema de golpe! Con la mayor frecuencia, esto significa que la teoría se ha asimilado de manera superficial y formal. Retornen de nuevo al correspondiente apartado del manual y estúdiendo con mayor atención. En casos complicados no se debe despreciar la ayuda de los profesores, los compañeros, así como las indicaciones que hay al final del compendio de problemas.

En los dos tomos del manual ha sido aceptado un sistema de citas sobre el material anterior, dadas en forma de indicación del párrafo donde aquel se estudió o bien de las fórmulas que sirven de base para los razonamientos. Si no se acuerdan de dicho material, retornen a él y sólo entonces quedará claro el material nuevo que se expone. En el texto también están indicados los capítulos o párrafos posteriores.

---

\* A. A. Pinski. Problemas de física. Moscú, Naúka, 1977 (en ruso).

donde el material que se considera será empleado o bien ampliado y profundizado. Esto señala la importancia del presente material para la ulterior exposición.

Con el fin de facilitar la búsqueda de la información necesaria —nociones, leyes, fenómenos, etc.— el manual tiene detallado contenido e índice de materias. En ellos se indican las páginas, en las que dicho material se expone de la manera más completa o por primera vez. Las siguientes citas pueden ser halladas en el texto.

Apreciado lector: ¡le deseamos éxitos al trabajar con el presente manual!

*Los autores*



## MOVIMIENTO Y FUERZAS

### *Capítulo 1*

### VELOCIDAD

#### § 1.1. Movimiento mecánico

1. Todos los cuerpos que nos rodean, desde las estrellas y los planetas, hasta tan diminutas partículas como los átomos y sus partes componentes, están en constante movimiento. *El movimiento mecánico* en su forma más sencilla consiste en el cambio de la posición de los cuerpos unos respecto a otros.

El movimiento mecánico es la base del funcionamiento de la mayoría de los mecanismos y las máquinas, del desplazamiento de todos los tipos de transporte. Al mismo tiempo, es parte componente de procesos más complicados, no mecánicos. Por ejemplo, los fenómenos térmicos están relacionados con el movimiento caótico (desordenado) de las moléculas; la radiación luminosa, con el movimiento de los electrones en los átomos; las reacciones nucleares, con el movimiento e interacción de las partículas elementales (protones, neutrones, mesones). El número de estos ejemplos puede ser ampliado.

2. Para describir el movimiento del cuerpo hay que indicar como se desplazan todos sus puntos.

Uno de los tipos de movimiento de los cuerpos es el *de traslación*, con el cual todos los puntos del cuerpo se desplazan de forma absolutamente igual; una recta

que un dos puntos arbitrarios del cuerpo, se traslada permaneciendo paralela a sí misma (fig. 1.1). Es evidente, que para la descripción del movimiento de traslación es suficiente describir el de uno cualquiera de sus puntos.

Otro tipo sencillo de movimiento es el de *rotación*, con el cual todos los puntos del cuerpo describen circunferencias en planos paralelos, con la particularidad de que los centros de dichas circunferencias yacen en una misma línea recta llamada eje de rotación (fig. 1.2).

3. Al resolver una serie de problemas de mecánica podemos abstraernos de la forma y las dimensiones del cuerpo

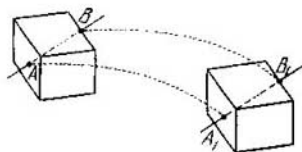


Fig. 1.1.

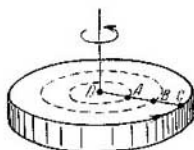


Fig. 1.2.

y considerar que éste es un punto material. Un cuerpo, cuyas dimensiones pueden ser despreciadas en el problema dado, llámase *punto material*.

Es lógico que la noción de punto material sea una abstracción, puesto que en la naturaleza no existen puntos materiales. No obstante, el planteamiento de una serie de problemas de mecánica es tal, que permite hacer uso con éxito de semejante abstracción.

Efectivamente, si a un pasajero le interesa cuánto tiempo necesita el avión para cubrir la distancia de Moscú a Novosibirsk, no precisa, en absoluto, conocer el carácter del movimiento de partes aisladas del avión. De otro lado, no pueden ser despreciadas las dimensiones y forma del avión cuando se estudian fenómenos como el despegue, aterrizaje, la resistencia del aire, etc. De forma análoga podemos considerar que la Tierra y otros planetas son puntos, si nos interesa el carácter de sus movimientos alrededor del Sol. Pero, cuando precisamos aclarar las causas del cambio del día y la noche o las estaciones del año, ya no podemos considerar que la Tierra es un punto, sino que debemos tener en cuenta sus dimensiones, rotación alrededor de su eje, inclinación de éste respecto del plano de la órbita, etc.

Es decir, un mismo cuerpo puede considerarse en unos problemas como punto material, mientras que en otros esto no puede hacerse.

## § 1.2. Sistema de referencia. Trayectoria

1. Si examinamos los fenómenos que transcurren en las proximidades de la superficie de la Tierra, nos cercioraremos de que diversas direcciones en el espacio no son equivalentes. Así, pues, un cuerpo que soltamos de las manos siempre se desplaza hacia abajo en dirección vertical (de modo aproximado hacia el centro de la Tierra); la superficie libre de un líquido se dispone en el plano horizontal; para el movimiento vertical de un cuerpo hacia arriba hay que comunicarle velocidad inicial, mientras que para el vertical del cuerpo hacia abajo semejante velocidad no es necesaria, etc. Esta desigualdad de diferentes direcciones en el espacio es provocada a causa de que la Tierra atrae los cuerpos.

Tanto a considerable distancia de la Tierra, como de otros planetas y estrellas, descubriríamos que *en el espacio, libre de grandes cuerpos, todas las direcciones son equivalentes*. Decimos que *el espacio libre es isótropo*, o sea, que en él no hay direcciones que posean propiedades especiales.

De la misma forma, son equivalentes todos los puntos del espacio si cerca de ellos no hay grandes cuerpos como los planetas o las estrellas. El espacio libre es *homogéneo*, es decir, en él no hay puntos que posean propiedades especiales.

2. *El tiempo también es homogéneo*. A saber, todo fenómeno que transcurra en iguales condiciones, pero en diferentes momentos de tiempo transcurre de forma absolutamente igual. Efectivamente, si hoy una pequeña bola que cae de una altura de 6 m en el lapso de 1,1 s, en ese mismo laboratorio, de esa misma altura la bolita caía al pasar la misma cantidad de tiempo un mes y un año atrás y su caída durará igual tiempo dentro de 1000 años.

3. Como nos convenceremos más adelante de la homogeneidad del tiempo así como de la homogeneidad e isotropía del espacio libre se desprende una serie de importantes corolarios (véase el cap. 23), de inmediato, podemos tener en cuenta uno de ellos: ya que el espacio es homogéneo e isótropo, es imposible definir la posición de un punto material respecto del espacio.

Sin embargo, resulta por completo posible determinar la posición de un cuerpo con relación a otro. Por ejemplo, la posición de una lámpara en la habitación se prefija enteramente por su distancia del suelo y por las distancias desde dos paredes perpendiculares entre sí. Con ayuda de estos tres mismos números podemos definir la posición de cualquier otro cuerpo ubicado tanto en el interior de la habitación, como fuera de ella.

Llamamos *de referencia* a un cuerpo inmóvil, con relación al cual se define la posición de los demás cuerpos.

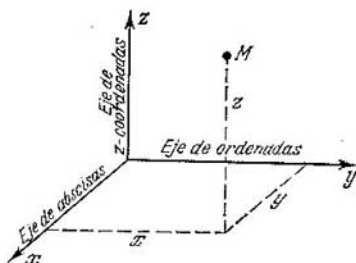


Fig. 1.3.

Por regla, con el cuerpo de referencia se enlazan tres líneas perpendiculares entre sí, es decir, los *ejes de coordenadas* (fig. 1.3). La posición de un punto es caracterizada por las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Denomínase *sistema de referencia* un sistema de coordenadas enlazado con el cuerpo de referencia y el conjunto de relojes sincronizados, ubicados en diferentes puntos del sistema de coordenadas. El sistema de sincronización de los relojes será examinado en el § 12.3.

En principio, cualquier cuerpo puede tomarse como de referencia, pero no todo sistema de referencia es igualmente cómodo. Por ejemplo, es mejor considerar el movimiento de un automóvil en un sistema de referencia relacionado con la Tierra y no con el Sol o la Luna. Y al revés, el movimiento de los planetas es más oportuno examinarlo en un sistema de coordenadas enlazado precisamente con el Sol y no con la Tierra u otro planeta, ya que en el primer caso las leyes de movimiento serán descritas con mayor sencillez.

Algunos criterios para elegir el sistema de referencia se examinarán más adelante.

4. En el sistema de referencia prefijado el punto en movimiento describe una línea llamada *trayectoria*. Así, al prender un palito y hacerlo girar con rapidez en el aire, en particular en una habitación a oscuras, veremos con claridad la trayectoria de movimiento del extremo encendido del palito. La forma de la trayectoria depende de la elección del sistema de referencia. Efectivamente, sea que un cuerpo cae dentro de un vagón en movimiento respecto de la Tierra. Entonces, la trayectoria de este cuerpo respecto del vagón será una línea recta, mientras que en relación con la Tierra, una curva (al no haber resistencia del aire — una parábola). Podemos decir lo mismo de la trayectoria que describe cualquier punto de la hélice de un avión en movimiento. En el sistema de coordenadas del avión, este punto describirá una circunferencia; en el sistema de coordenadas enlazado con la Tierra, dicho punto se desplaza por una hélice.

De esta forma, la noción de forma de la trayectoria tiene *sentido relativo*. No se puede hablar en general de la forma de la trayectoria; sólo podemos examinar la forma de la trayectoria en el sistema prefijado de referencia (sistema de coordenadas).

### § 1.3. Movimiento rectilíneo. Ley de movimiento

1. Sea que en cierto sistema de referencia un punto material se mueve por una recta. En semejante caso es cómodo dirigir a lo largo de esta trayectoria uno de los ejes de coordenadas, por ejemplo, la abscisa. En cada momento de tiempo, el punto en movimiento tendrá una coordenada enteramente definida. Esto significa que la coordenada de nuestro punto será función del tiempo:  $x = f(t)$ . La forma de esta función será *la ley de movimiento*.

2. Para determinar de modo experimental la ley de movimiento, es preciso que el punto que se mueve deje, de alguna manera, marcas en el eje de coordenadas.

Supongamos, por ejemplo, que nos interesa la ley de movimiento de la escalera mecánica del metro. Para definirla, podemos tensar a lo largo de la pared una cinta de papel, mientras que damos al experimentador un instrumento que a intervalos iguales de tiempo (por ejemplo,

cada segundo) hace en la cinta una marca. El resultado del experimento puede reducirse a una tabla:

Momento de tiempo $t$ , s	1	2	3	4	5	6	7	8
Coordenada, $x$ , m	1,75	2,50	3,25	4,00	4,75	5,50	6,25	7,00

Tal experimento no permite determinar con seguridad la posición del punto en los momentos intermedios de tiempo. Sin embargo, es posible elegir la función  $x = f(t)$  de tal forma, que sus valores para  $t = 1; 2; 3$ , etc. fueran  $x = 1,75; 2,50; 3,25$ , etc. Con facilidad nos cercioramos de que ésta será la función lineal  $x = 1 + 0,75t$ . Si suponemos que el carácter del movimiento no cambió en el proceso de nuestra investigación, tenemos derecho a considerar que para los demás momentos de tiempo, que yacen en los márgenes que nos interesan, la coordenada se calcula mediante esa misma ley.

Notemos, que mientras menores sean los intervalos de tiempo entre dos marcas contiguas, mayor será la base para suponer que nuestra conjetura acerca del carácter de la ley de movimiento es próxima a la realidad. Por esta razón, al estudiar la ley de movimiento de un cuerpo de manera experimental, juega un papel esencial el volumen de información: mientras más marcas tengamos y menores sean los intervalos de tiempo entre dos de éstas vecinas, con mayor precisión podrá ser definida la ley de movimiento.

3. La suposición de que el carácter del movimiento no varía en el proceso de éste, tiene una importancia básica. En efecto, sea que al final del décimo segundo, un hombre, que hasta entonces estaba parado sobre un escalón de la escalera mecánica, decidió acelerar su bajada y empezó a bajar a pie por la escalera. Como es natural, el carácter de su movimiento cambió considerablemente y ya no podremos hacer uso de la ley de movimiento hallada con anterioridad para los momentos de tiempo después del décimo segundo (a partir del comienzo del experimento).

Así pues, la ley de movimiento hallada de forma experimental puede sólo emplearse para el intervalo de tiempo durante el que se efectuó la investigación. La extrapolación

(o sea, la aplicación de la ley obtenida para un intervalo más amplio de tiempo) sólo es posible después de una investigación complementaria que permita establecer que no varía el carácter del movimiento.

### § 1.4. Movimiento uniforme

1. Es llamado *uniforme* el movimiento de un punto material si la coordenada del punto es una función lineal del tiempo:

$$x = vt + x_0, \quad (1.1)$$

donde  $v$  y  $x_0$  son, correspondientemente, la velocidad de movimiento y la coordenada inicial.

2. La ley de movimiento se representa de forma muy evidente por medio de una *gráfica*. Con este fin, en el plano

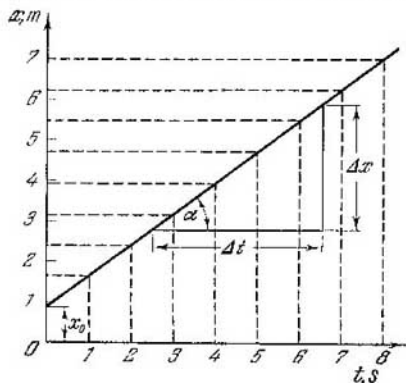


Fig. 1.4.

construimos un sistema de coordenadas, trazando en el eje de abscisas el tiempo  $t$ , mientras que en el eje de ordenadas, la coordenada variable del punto (por ejemplo,  $x$ ). Poniendo en los dos ejes los correspondientes valores de las variables tomadas de la tabla, trazamos desde estos puntos perpendiculares a los ejes de coordenadas. La línea que, de modo uniforme, une los puntos de intersección es la *gráfica del movimiento*. Como con el movimiento uniforme, la coordenada

es función lineal del tiempo, la gráfica de semejante movimiento es una línea recta (fig. 1.4).

3. Haciendo  $t = 0$  en la ley de movimiento,  $x = x_0$ . Esta es la coordenada inicial, es decir, la distancia desde el punto en movimiento hasta el origen de coordenadas en el momento inicial de tiempo.

Hay que prestar particular atención al sentido de la noción *momento inicial de tiempo*. Esto no significa de manera alguna el comienzo del movimiento, sino *el comienzo del experimento para la investigación de dicho movimiento*.

En lo que se refiere al momento en que comienza el movimiento, éste no siempre nos interesa y, en ocasiones, no puede ser en absoluto establecido. Por ejemplo, un astrónomo que estudia la ley de movimiento de un meteoro, sólo puede descubrirlo cuando él penetra en las capas relativamente densas de la atmósfera alta y se encandee. Este será el momento inicial, o sea, el comienzo de las observaciones, pero de ninguna forma el principio del movimiento del meteoro. Esto también se refiere al movimiento de otros cuerpos celestes (planetas, cometas), al de las partículas cósmicas registradas por los aparatos de medición, al de un avión o cohete, cuando son detectados por un radar, etc.

### § 1.5. Movimiento variado

1. Todo movimiento no uniforme se llama *variado*. Examinemos este tipo de movimiento en dos ejemplos: un cuerpo que cae desde cierta altura y un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba. En los dos casos se trata de movimiento rectilíneo, pero no uniforme, es decir, variado.

Sea que una bola pequeña, pero bastante pesada, cae a lo largo del eje  $z$ -coordenada. Las marcas en el eje de coordenadas pueden, por ejemplo, obtenerse mediante fotografías, abriendo el obturador del aparato de fotografiar después de iguales intervalos de tiempo. Los resultados del experimento se reducen en la tabla:

Momento de tiempo $t$ , s	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Coordenada $z$ , m	0,049	0,196	0,431	0,784	1,22	1,76	2,40	3,14	3,97	4,90



Construida la gráfica de movimiento, vemos que ésta no es una línea recta, sino una parábola; la ley de movimiento tiene la forma  $z = 4,9t^2$  (fig. 1.5).

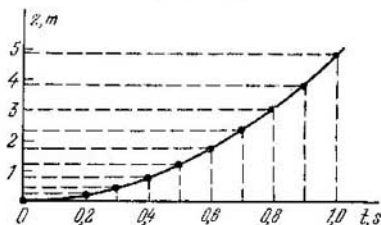


Fig. 1.5.

2. Si mediante el método descrito investigamos el carácter del movimiento del cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba, obtenemos la siguiente tabla de datos:

Momento de tiempo $t$ , s	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Coordenada $z$ , m	0	1,74	3,14	4,12	4,70	4,90	4,70	4,12	3,14	1,74	0

Aquí, el movimiento es rectilíneo variado. La ley de movimiento tiene la forma  $z = 9,8 t - 4,9 t^2$ . En la gráfica la ley de movimiento está representada por una parábola (fig. 1.6).

3. Hay que prestar atención a la diferencia de principio entre la gráfica de movimiento y la trayectoria. La trayectoria es la curva por la que el punto material se mueve en el sistema de referencia; la gráfica es una curva en el plano que une los puntos representativos en el plano coordenada—tiempo.

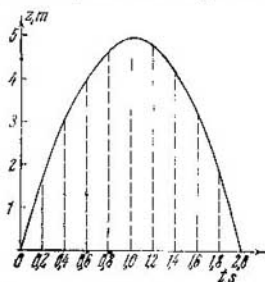


Fig. 1.6.

La bola que cae desde cierta altura y la lanzada verticalmente hacia arriba muévase por una trayectoria de la

misma forma, o sea, por una recta, mientras que sus gráficas son diferentes a causa del carácter desigual del movimiento.

### § 1.6. Velocidad media

1. Consideremos el caso cuando un punto material está en movimiento a lo largo de cierto eje de coordenadas, siempre en una misma dirección.

El segmento  $\Delta x = x_2 - x_1$  es llamado *desplazamiento* del punto material en el intervalo de tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Señalemos que si el punto siempre se mueve en una misma dirección, el espacio recorrido es igual al valor absoluto del desplazamiento:  $\Delta s = |\Delta x|$ . Pero si el punto se mueve primero en una dirección y, después de pararse, comienza a desplazarse en dirección inversa (por ejemplo, en el caso de movimiento oscilatorio o el movimiento del cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba), el espacio recorrido es igual a la suma de los valores absolutos de los desplazamientos en una y otra dirección:  $\Delta s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots$

Como ejemplo, examinemos de nuevo el caso de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba. Tomemos los momentos de tiempo  $t_1 = 0,8$  s y  $t_2 = 1,4$  s, a los que corresponden las coordenadas  $x_1 = 4,70$  m y  $x_2 = 4,12$  m (véase la tabla anterior). El desplazamiento

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4,12 - 4,70 = -0,58 \text{ m.}$$

El signo negativo nos indica que el desplazamiento está dirigido en sentido opuesto a la dirección del eje de coordenadas. El espacio recorrido será mucho mayor, ya que el punto en movimiento alcanzó en el momento de tiempo  $t = 1,0$  s la altura máxima  $x_{\text{máx}} = 4,90$  m y, a continuación, comenzó a caer. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \Delta s &= |x_{\text{máx}} - x_1| + |x_2 - x_{\text{máx}}| = |4,90 - 4,70| + \\ &+ |4,12 - 4,90| = 0,20 + 0,78 = 0,98 \text{ m.} \end{aligned}$$

2. Se llama *velocidad media* de movimiento, en el intervalo dado de tiempo, una magnitud física numéricamente igual a la razón del desplazamiento al intervalo de tiempo:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.2)$$

La velocidad media es un vector. Su dirección coincide con la del desplazamiento.

La *unidad de velocidad* se define como la velocidad de tal movimiento, con el cual el desplazamiento del punto mate-

rial por la unidad de tiempo es igual a la unidad de longitud:

$$[v] = \frac{[x]}{[t]}. \quad (1.3)$$

En esta fórmula los corchetes indican unidad de magnitud.

En el Sistema Internacional de unidades SI, la unidad de desplazamiento es el metro (m) y la de tiempo, el segundo (s), por lo tanto, la unidad de velocidad será m/s.

3. En el movimiento variable el valor de la velocidad media de manera notable depende de la elección del intervalo de tiempo durante el que el cuerpo estaba en movimiento. Por ejemplo, con la caída libre, que fue examinada más arriba, la velocidad media en el intervalo de  $t_1 = 0,1$  s a  $t_2 = 0,2$  s (véase la tabla en la pág. 33)

$$v_m = \frac{0,196 - 0,049}{0,2 - 0,1} = \frac{0,147}{0,1} = 1,47 \text{ m/s};$$

en el intervalo de tiempo de  $t_1 = 0,7$  s a  $t_2 = 0,8$  s la velocidad media

$$v_m = \frac{3,14 - 2,40}{0,8 - 0,7} = \frac{0,74}{0,1} = 7,4 \text{ m/s},$$

mientras que de  $t_1 = 0,7$  s a  $t_2 = 1,0$  s

$$v_m = \frac{4,90 - 2,40}{1,0 - 0,7} = \frac{2,50}{0,3} = 8,33 \text{ m/s}.$$

Sólo con el movimiento uniforme la velocidad media es una magnitud constante, que no depende de la elección del intervalo de tiempo. En efecto, aquí  $x_1 = vt_1 + x_0$ ,  $x_2 = vt_2 + x_0$  y la velocidad media

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{vt_2 + x_0 - vt_1 - x_0}{t_2 - t_1} = v.$$

4. Con el fin de apreciar el valor numérico de la velocidad media, en la práctica se usa, a veces, la siguiente definición: la velocidad media es igual a la razón del espacio recorrido al tiempo de movimiento. Indiquemos, que la velocidad media definida de dicha forma es un escalar y no un vector.

### § 1.7. Velocidad instantánea del movimiento variado

1. Con frecuencia, no nos interesa la velocidad media de movimiento de un cuerpo en el transcurso de determinado intervalo de tiempo, sino que *la velocidad del cuerpo en el*

*momento dado*, es decir, *la velocidad instantánea*. Por ejemplo, si un cuerpo choca contra un obstáculo, la fuerza con la que él actúa en el momento dado contra el obstáculo, es determinada por la velocidad en dicho momento y no por la velocidad media; la distancia de vuelo de un proyectil y la forma de su trayectoria son definidas por la velocidad en el momento del disparo y no por la velocidad media, etc. Como, de acuerdo con (1.2), la velocidad media es igual a  $v_m = \Delta x / \Delta t$ , mientras menor sea el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , menor será la diferencia entre la velocidad media y la velocidad instantánea que nos interesa.

Definamos la velocidad media  $v$  por el límite a que tiende la velocidad media durante un intervalo de tiempo infinitésimo

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.4)$$

Semejante límite en matemáticas se llama *derivada\**) o sea, la velocidad instantánea es la derivada de la coordenada en el tiempo:

$$v = dx/dt = x' (t). \quad (1.5)$$

2. Como la velocidad media de un punto material en movimiento uniforme es magnitud constante y el límite de semejante magnitud es ella misma, *la velocidad instantánea de un punto material en movimiento uniforme también es una magnitud constante*.

Así pues, el movimiento uniforme puede definirse como movimiento a velocidad constante.

Como vemos en la gráfica (véase la fig. 1.4), la velocidad del movimiento uniforme es numéricamente igual a la tangente del ángulo de inclinación de la gráfica respecto del eje de tiempo:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = K \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

donde  $K$  es un coeficiente dimensional, igual a la razón de las escalas de las unidades de desplazamiento (eje de ordenadas) y de tiempo (eje de abscisas). Al movimiento a mayor velocidad corresponderá una gráfica de mayor inclinación.

---

\* La derivada  $y = f(x)$  se designa  $dy/dx$  o bien  $y'(x)$ .

En las gráficas del movimiento variado (véanse las figs. 1.5 y 1.6) la velocidad instantánea es numéricamente igual al ángulo entre la tangente a la gráfica y el eje de abscisas.

## Capítulo 2

# INERCIA

### § 2.1. Principio de la inercia

1. El estudio del movimiento de los cuerpos en uno u otro sistema de referencia y las causas que determinan el carácter de dichos movimientos es el problema fundamental de mecánica.

Hay que aclarar en qué condiciones muévase el cuerpo por una trayectoria rectilínea o curvilínea: de modo uniforme o no uniforme, acelerado o retardado.

La experiencia muestra que durante la interacción de los cuerpos, su movimiento varía. Por ejemplo, cuando un cuerpo cae, al chocar con la Tierra se para y su movimiento cesa o bien salta hacia arriba y la dirección de su velocidad cambia por la opuesta; un cuerpo en reposo respecto de la Tierra nunca comienza a moverse por sí solo, abandona el estado de reposo y empieza a desplazarse solamente bajo la acción de cualquier otro cuerpo. Como es natural, el número de semejantes ejemplos puede ser aumentado.

2. Sin embargo, de la correcta deducción acerca de que la interacción de los cuerpos provoca el cambio de las velocidades de sus movimientos, algunos pensadores de la antigüedad, como Aristóteles, llegaron a la falsa conclusión de que el propio movimiento de los cuerpos era resultado de la interacción con otros cuerpos.

Una de las causas que les llevó a una conclusión tan errónea consistía en que consideraban que la Tierra era el centro inmóvil de Universo. Por este motivo, el reposo con relación a la Tierra se tomaba como el estado natural de los cuerpos, mientras que el movimiento, un estado temporal, forzado que, según ellos, era resultado de la acción de fuerzas ajenas. Bien es verdad, que surgían determinadas dificultades al explicar, por ejemplo, el movimiento de una piedra

lanzada o un dardo arrojado por el arco: ¡allí no había cuerpos que empujasen permanentemente a la piedra o dardo! Entonces, para explicar estos fenómenos, los sabios de la antigüedad proponían diversas hipótesis arbitrarias, con el solo fin de conservar su principal suposición acerca del origen forzado del movimiento.

3. A fines del siglo XVI, dos problemas sacaron de nuevo a la luz el movimiento. El primero de ellos consistía en que con el desarrollo de la artillería, era preciso hallar las leyes de movimiento de los proyectiles. Además, al ser creado el sistema heliocéntrico de Copérnico quedó claro que la Tierra no es el centro del Universo, sino un planeta corriente que gira, junto con otros, alrededor del Sol. De esto se desprendería inevitablemente que los planetas (y, por consiguiente, otros cuerpos) se mueven por sí mismos, ya que resulta en absoluto inverosímil que a la Tierra y otros planetas algo los empuje en el transcurso de miles de millones de años.

Además, era preciso explicar por qué causa no sentimos la rotación de la Tierra y, también, por qué al separarse de nuestro planeta, por ejemplo al dar un salto, caemos en el mismo punto de la Tierra.

La primera solución correcta, aunque no completa, sobre el problema de movimiento fue proporcionada a principios del siglo XVII por Galileo. Pero sólo 50 años después, Newton pudo hallar una enunciación clara de las tres leyes fundamentales de movimiento, que constituyó la base para crear la mecánica clásica.

4. Para solucionar de modo exacto los problemas de movimiento, había, ante todo, que abstraerse de todos los influjos exteriores y plantear el problema de la forma siguiente: ¿qué ocurrirá con un cuerpo si cesa la interacción de éste con otros cuerpos? En nuestra ayuda debo venir *el experimento mental*, que propuso Galileo. En efecto, durante cualquier experimento real en la Tierra, no podemos liberar a éste de la acción de la fuerza de gravedad y de la fuerza de rozamiento. Pero la cuestión puede ser planteada del siguiente modo: ¿qué sucederá si, por lo menos, mentalmente disminuimos de manera gradual estas fuerzas?

Al desplazarse por la arena una carretilla se parará con rapidez; por un trozo de vidrio su movimiento durará mucho más aunque en este caso, al fin y al cabo, también se detendrá. ¿Qué pasará si el vidrio es absolutamente liso? Por lo

visto, la carretilla se moverá por sí misma tiempo ilimitado.

Esta fue la idea del experimento mental con un cuerpo, libre de todo influjo externo, que permitió a Galileo llegar al concepto del movimiento *inercial* del cuerpo. Y aunque el propio Galileo estaba errado al considerar que un cuerpo puede desplazarse por inercia no sólo de modo uniforme y rectilíneo, sino que también moverse uniformemente por una circunferencia. (¡lo que es erróneo!), su idea permitió a Newton enunciar correctamente *la ley (el principio) de la inercia*, que también es llamada *primera ley de Newton*.

*Si el cuerpo dado no interactúa con los cuerpos que lo rodean, la velocidad de su movimiento no varía ni en magnitud ni en dirección, es decir, está en movimiento rectilíneo y uniforme.*

El movimiento inercial implica el desplazamiento por recorrido más corto, ya que en el espacio libre la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta.

Cuando decimos que cierto cuerpo está en reposo, éste no es absoluto, sino que lo es en el sistema dado de referencia, que se mueve respecto a otros cuerpos.

5. Gracias precisamente a la inercia, al saltar hacia arriba en un vagón en movimiento, caemos en el mismo sitio. En efecto, estando en el suelo de un vagón que se mueve uniformemente, tenemos la misma velocidad que él. Saltando en dirección vertical hacia arriba, la velocidad horizontal queda invariable, ya que en este sentido sobre nosotros nada actúa. Por esta razón, después de recorrer por el plano horizontal una distancia igual que el vagón, retornamos al mismo punto del que nos separamos al saltar. Lo mismo se puede decir respecto de nuestro movimiento junto con la Tierra.

Los cuerpos lanzados se mueven gracias a la inercia. Como es natural, en el momento del lanzamiento comunicamos a la piedra cierta velocidad. Si la piedra no sufriera la resistencia del aire y la atracción de la Tierra, ésta se movería conservando invariables el valor y la dirección de su velocidad. La interacción de la piedra con el aire y la Tierra provoca la deceleración de su movimiento y la curvatura de su trayectoria y, en fin de cuentas, su parada.

## § 2.2. Sistemas inerciales de referencia

1. La formulación del principio de la inercia ofrecida en el anterior párrafo no se puede considerar completa. En efecto, en él se habla del movimiento del cuerpo, pero ni una palabra se dice del sistema de referencia en el que transcurre el movimiento. No obstante, sabemos que se puede hablar de la forma de la trayectoria, así como de la velocidad, sólo respecto de cierto sistema de referencia, ya que, por ejemplo, una trayectoria rectilínea en un sistema de referencia, es posible que sea curvilínea en otro.

Por esta causa, hay que variar la enunciación del principio de la inercia, introduciendo claras indicaciones del carácter del sistema de referencia, respecto del cual el movimiento dado se examina. Con mayor precisión, el principio de la inercia se formula así:

*Existen tales sistemas de referencia, con relación a los cuales todos los cuerpos que no están en interacción con otros cuerpos se encuentran en movimiento rectilíneo y uniforme. Los sistemas de referencia que satisfacen este principio se denominan sistemas inerciales.*

2. El concepto de sistema inercial de referencia es una abstracción que en la práctica sólo se realiza con cierto grado de aproximación. En realidad, todo sistema de referencia está relacionado con ciertos cuerpos y en la naturaleza todos los cuerpos, en mayor o menor grado, están en interacción entre sí. Por esta razón, es imposible indicar sistemas de referencia que sean rigurosamente inerciales; sólo es posible mostrar tales sistemas que para el círculo dado de problemas a examinar pueden ser considerados inerciales. Es natural, que sólo de forma experimental podamos decidir si el sistema dado es inercial.

La práctica muestra que sólo en la primera aproximación el sistema de referencia relacionado con la Tierra puede considerarse inercial, a saber: sobre el transcurso de una serie de fenómenos no influye la rotación de la Tierra. Este sistema de referencia es llamado *geocéntrico*.

Así, la rotación de la Tierra no influye, prácticamente, sobre el funcionamiento de diferentes mecanismos y máquinas, sobre el movimiento de diversos tipos de transporte. Tampoco influye en la marcha de las reacciones térmicas, químicas y nucleares, así como sobre los procesos electromagnéticos que transcurren en los generadores, electromoto-



res, transformadores, receptores y transmisores de radio, así como sobre la propagación de las ondas electromagnéticas, los fenómenos luminosos y acústicos. Por consiguiente, al describir todos los indicados procesos físicos, con alto grado de precisión, podemos considerar que el sistema geocéntrico de referencia es inercial.

3. Por otro lado, hay una serie de fenómenos provocados por la rotación de la Tierra alrededor de su eje y por el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Como estos dos movimientos no son rectilíneos y uniformes, provocan efectos que son imposibles en sistemas inerciales de referencia.

Por ejemplo, observando de noche la bóveda celeste, vemos que todo el sistema de estrellas gira alrededor de un eje que pasa por la Estrella Polar y el centro de la Tierra. Desde el punto de vista del sistema geocéntrico de referencia hay que hallar, en este caso, cierto mecanismo de interacción entre la Tierra y todas las estrellas que permita explicar la causa de la curvatura de sus trayectorias. Además, los planetas realizan por la bóveda celeste movimientos bastante complicados. Moviéndose en cierta dirección, el planeta de pronto se para, a continuación se desplaza hacia atrás y, trazando un lazo, comienza a moverse en la dirección inicial.

Los múltiples intentos ejecutados por Aristóteles, Ptolomeo y otros investigadores para explicar el movimiento de los astros celestes en el sistema geocéntrico de referencia, resultaron inútiles. Copérnico, Galileo y Kepler ofrecieron una teoría correcta del movimiento de los cuerpos celestes, ligando el sistema de referencia no con la Tierra, sino que con el Sol. Este sistema de referencia fue llamado *heliocéntrico*. En grado considerable es más inercial que el sistema geocéntrico de referencia.

### § 2.3. Principio de la relatividad

1. Hay una gran cantidad de sistemas inerciales (con el grado de aproximación indicado más arriba). *Todo sistema de referencia en movimiento rectilíneo y uniforme con relación a cierto sistema inercial, también es inercial.*

En efecto, sea que un cuerpo se mueve por inercia en cierto sistema de referencia. Por consiguiente, no varía el valor y la dirección de su velocidad. Por otro sistema de

referencia, que se mueve de modo rectilíneo y uniforme respecto del primero, nuestro cuerpo tiene otra velocidad, pero también de valor y dirección constantes. O sea, el segundo sistema de referencia, en la misma medida que el primero, es inercial. *H*

Así pues, los sistemas de referencia ligados con un vagón o barco en movimiento uniforme y rectilíneo respecto de la Tierra, serán del mismo modo inerciales, como el sistema de referencia relacionado con la Tierra.

2. Como muestra la experiencia, en un barco en movimiento rectilíneo y uniforme en relación con la Tierra, es tan fácil moverse en cualquier dirección como en ella. Al disparar una pistola, la bala tarda igual tiempo en recorrer el espacio desde proa a popa, como a la inversa. Un cuerpo soltado de las manos cae verticalmente (claro está, respecto del barco; en relación con la Tierra muévase por una trayectoria parabólica). El agua vertida en cierto recipiente, tiene al igual que en la Tierra, la superficie horizontal.

De éstos y otros muchos fenómenos se desprende que ningún experimento mecánico nos permite destacar, del conjunto de sistemas inerciales, un sistema de referencia predominante. De aquí se deduce que de manera alguna podemos hablar de reposo o movimiento absoluto de los cuerpos. Sólo podemos referirnos a su movimiento relativo por cierto sistema inercial de referencia.

Esta ley fundamental recibe el nombre de *principio de la relatividad de Galileo*, que puede ser enunciado del modo siguiente:

*Las leyes de mecánica son igualmente válidas en todos los sistemas inerciales de referencia o de forma más breve, todos los sistemas inerciales de referencia son equivalentes.*

El análisis del principio de la relatividad, efectuado por Einstein, hizo que éste llegara en 1905 a la conclusión de que este principio es una de las leyes fundamentales de la naturaleza; puede ser aplicado no sólo a los fenómenos mecánicos, sino que también a otros, tales como los térmicos, electromagnéticos, ópticos, etc. Esto le permitió formular el principio general de la relatividad, llamado con frecuencia *principio de la relatividad de Einstein*:

*En todos los sistemas inerciales de referencia todas las leyes de la naturaleza son iguales.*

Este principio es una de las bases de la concepción física moderna del mundo.

## § 2.4. Transformaciones de Galileo

1. En la mecánica newtoniana tropezamos con velocidades relativamente pequeñas. Efectivamente, las mayores velocidades a las que se desplazan los cuerpos macroscópicos, son las de los planetas, meteoritos, naves cósmicas. Dichas velocidades no superan varias decenas de kilómetros por segundo, es decir, son mucho menores que la velocidad de la luz  $c = 300\,000$  km/s.

Si las coordenadas de cierto punto material están prefijadas en un sistema inercial de referencia, podemos calcular las coordenadas de este punto en cualquier otro sistema inercial

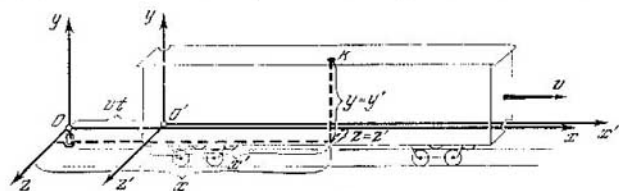


Fig. 2.1.

cial de referencia, en movimiento rectilíneo uniforme respecto del primero. La forma precisa de las correspondientes transformaciones de las coordenadas será deducida en el § 12.7. Aquí examinaremos las llamadas *transformaciones de Galileo* que permiten ligar entre sí las coordenadas de cierto punto material en dos sistemas inerciales de referencia diferentes, a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz.

2. Para mayor precisión ligaremos un sistema de referencia con la Tierra, mientras que el segundo, con un vagón en movimiento rectilíneo uniforme respecto de la Tierra a una velocidad  $v$ . Con el fin de simplificar los razonamientos, vamos a dirigir uno de los ejes de coordenadas (por ejemplo, el de abscisas) a lo largo de la dirección de movimiento del vagón (fig. 2.1). En la figura vemos que la  $z$ -coordenada y la ordenada del punto  $K$  coinciden en los dos sistemas de coordenadas:  $z' = z$  e  $y' = y$ . Las abscisas divergen por el segmento  $OO' = vt$ . De aquí, las transformaciones de Galileo toman el aspecto

$$z' = z, \quad y' = y, \quad x' = x - vt. \quad (2.1)$$

3. Para que nos cercioramos de que las transformaciones de Galileo satisfacen el principio de la relatividad, examinemos cuál será su aspecto al considerar inmóvil el vagón, en tanto que la Tierra se desplaza en sentido opuesto a una velocidad  $V$ . Los valores absolutos de las velocidades  $V$  y  $v$  coinciden, mientras que sus direcciones son contrarias; por consiguiente,  $V = -v$ . Razonamientos, en absoluto análogos a los aducidos más arriba, nos llevan a las fórmulas

$$z = z', \quad y = y', \quad x = x' + vt. \quad (2.2)$$

Así pues, las transformaciones de Galileo son recíprocas: cualquiera de los sistemas inerciales de referencia puede ser adoptado convencionalmente como inmóvil, mientras que

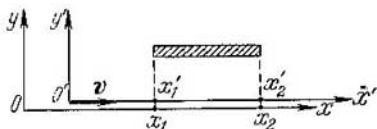


Fig. 2.2.

las transformaciones a cualquier otro sistema inercial son realizadas mediante las mismas fórmulas, pero tomando en consideración el signo de la velocidad relativa del sistema. Esto significa, precisamente, que las transformaciones dadas corresponden al principio de la relatividad.

4. Los desplazamientos de un punto por diversos sistemas de coordenadas son diferentes. En efecto, sea que en el momento  $t_1$  el punto material tenía la coordenada  $x_1$  y en el momento  $t_2$ , la coordenada  $x_2$ . El desplazamiento del punto en el sistema de referencia ligado con la Tierra:

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

El desplazamiento de ese mismo punto en el sistema de referencia relacionado con el vagón:

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1) = \Delta x - v \cdot \Delta t. \quad (2.3)$$

En correspondencia

$$\Delta x = \Delta x' + v \cdot \Delta t. \quad (2.4)$$

5. Sin embargo, se conserva la longitud del segmento en ambos sistemas. En realidad, la longitud del segmento (fig. 2.2.) es llamada diferencia de coordenadas de sus dos

extremos, medidos simultáneamente:  $l = x_2 - x_1$  para  $t_2 = t_1$ , o sea,  $\Delta t = 0$ . Entonces de (2.3) o (2.4) se desprende:

$$l = l'. \quad (2.5)$$

Este resultado parece ser en absoluto evidente y, a primera vista, no está incluso claro la necesidad de definirlo. El sentido de la deducción quedará obvio más adelante (§ 12.8).

### § 2.5. Ley clásica de composición de velocidades

1. Sea que un punto material está en movimiento uniforme a lo largo del eje de abscisas a una velocidad  $u = \Delta x / \Delta t$ . Hallemos la velocidad de este mismo punto en otro sistema inercial de referencia  $u' = \Delta x' / \Delta t$ . Con este fin hacemos uso de la fórmula (2.3). Dividiendo los dos miembros de la igualdad por  $\Delta t$ , obtenemos

$$u' = u - v, \quad (2.6)$$

o bien

$$u = u' + v. \quad (2.7)$$

Esta es la *ley clásica de composición de velocidades* para el caso particular que consideramos.

2. La ley clásica de composición de velocidades se confirma perfectamente a velocidades mucho menores que la de la luz.

Por ejemplo, si un vagón se mueve respecto de la Tierra a una velocidad de 80 km/h y un pasajero va por el vagón en la misma dirección, a la velocidad de 6 km/h, en relación a la Tierra la velocidad del pasajero constituirá 86 km/h. Si la velocidad de la corriente de un río es igual a 2 m/s y la de un barco respecto a la del agua 8 m/s, al moverse el barco contra la corriente su velocidad con relación a la Tierra será de 6 m/s, y al moverse aguas abajo, 10 m/s.

3. Las consideraciones lógicas, en las que se basa la deducción de las transformaciones de Galileo, son evidentes, mientras que los corolarios que obtenemos de ellas, tales como la constancia de la longitud de un segmento en diversos sistemas de referencia, la ley de composición de velocidades, etc., de modo perfecto se han mostrado válidos en experimentos, a aquellas velocidades de movimiento que trataban los científicos en el transcurso aproximado de tres siglos, pasados después de las obras de Galileo y Newton. Gradual-

mente se creó la opinión de que estas transformaciones debían ser válidas para cualesquiera fenómenos físicos. Y sólo a fines del siglo pasado fue descubierto que la aplicación de las representaciones de la mecánica newtoniana a fenómenos ligados con la propagación de la luz, lleva a una serie de contradicciones. En el capítulo 12 mostraremos cómo surgieron dichas contradicciones y cómo fueron liquidadas con ayuda de la teoría de la relatividad.

### Capítulo 3

## MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

### § 3.1. Magnitudes escalares

Denomínase *escalar* una magnitud a la que corresponde en todo sistema de referencia un número determinado, que es función del sistema de unidades elegido. Por ejemplo:

$$l = 3 \text{ m} = 300 \text{ cm} = 3000 \text{ mm.}$$

El valor numérico de una magnitud escalar es inversamente proporcional a la unidad de medida. De forma simbólica, esto puede expresarse del siguiente modo:

$$a [A] = a' [A'] \text{ o bien } a/a' = [A']/[A], \quad (3.1)$$

donde  $[A]$  y  $[A']$  son unidades de la magnitud escalar;  $a$  y  $a'$ , sus valores numéricos.

El tiempo, la longitud, el área, volumen, la temperatura, masa, energía, el trabajo son ejemplos de magnitudes escalares.

Cualquier operación algebraica con escalares nos da una magnitud escalar.

Señalemos, que si cierta expresión, compuesta de magnitudes escalares, se encuentra bajo el signo de una función no algebraica (transcendente), dicha magnitud se convierte en número abstracto. A esa clase pertenecen las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas. Por ejemplo, si la coordenada  $x$  está expresada en metros ( $[x] = \text{m}$ ), la expresión  $y = a^{kx}$  sólo tiene sentido cuando  $[k] = \text{m}^{-1}$ . De modo análogo, la expresión  $x = A \cos \omega t$ , sólo tiene sentido para  $[\omega] = \text{c}^{-1}$ .

## § 3.2. Magnitudes vectoriales

1. Se llama *vector* una magnitud que en cualquier sistema de referencia corresponde a un *segmento dirigido*. El vector se caracteriza por su valor absoluto (módulo), dirección y punto de aplicación de su origen. La velocidad y la fuerza son ejemplos de magnitudes vectoriales.

El vector, cuyo origen coincide con el origen de coordenadas y su extremo define la posición de cierto punto material, denominábase *radio vector* de este punto (fig. 3.1).

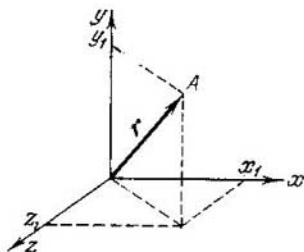


Fig. 3.1.

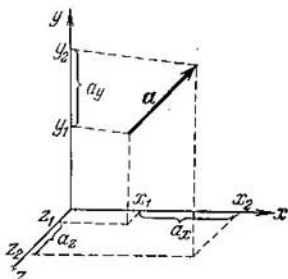


Fig. 3.2.

Se ha adoptado designar los vectores con letras latinas minúsculas con una flecha horizontal encima ( $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , etc.) o con letras en negrita ( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  . . .). El radio vector suele designarse con la letra  $r$ .

2. Cualquier vector puede ser proyectado en los ejes de coordenadas.

Las proyecciones del vector  $\mathbf{a}$  en los ejes de coordenadas se designan correspondientemente, por  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ , donde el índice caracteriza el eje en que se proyecta el vector (fig. 3.2). Como vemos en el plano

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1, \quad (3.2)$$

donde  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  son las coordenadas del origen del vector,  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ , las coordenadas de su extremo.

Las proyecciones del radio vector  $r$  son las coordenadas de su extremo, ya que las coordenadas de su origen son nulas:

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z. \quad (3.3)$$

3. El valor absoluto de un vector o su *módulo*, es una magnitud escalar, igual a la longitud del segmento que representa el vector. Se designa por  $|a|$  o simplemente  $a$ . Haciendo uso del teorema de Pitágoras, obtenemos

$$|a| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (3.4)$$

El módulo del radio vector

$$|r| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.5)$$

### § 3.3. Ciertas operaciones con vectores

1. La suma de dos vectores es un nuevo vector, cuya proyección es la suma de las correspondientes proyecciones de los sumandos. Si las proyecciones de los sumandos  $a$  y  $b$  son  $a_x, a_y, a_z$  y  $b_x, b_y, b_z$ , de la definición se desprende:

$$c = a + b, \text{ si } c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z. \quad (3.6)$$

De esta definición sigue una serie de importantes corolarios.

*Ley conmutativa de adición:*

$$a + b = b + a. \quad (3.7)$$

En efecto, como para todo número, la ley conmutativa es válida para las proyecciones.

De igual modo se demuestra la ley asociativa de adición:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c). \quad (3.8)$$

*Regla del polígono:* para sumar varios vectores, por ejemplo,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  y  $a_5$ , es preciso hacer coincidir el origen del segundo sumando con el extremo del primero, el origen del tercero, con el extremo del segundo, etc. Seguidamente, se construye el nuevo vector, cuyo origen coincidirá con el del primer sumando y su extremo con el extremo del último (fig. 3.3). El vector de cierre  $b$  será la suma buscada:

$$b = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Para demostrar este corolario ubiquemos dos vectores  $a_1$  y  $a_2$  en el plano  $xy$ , con la particularidad de que haremos



coincidir el origen del vector  $a_2$  con el extremo del vector  $a_1$  (fig. 3.4). Uniendo el origen de  $a_1$  con el extremo de  $a_2$ , obtenemos el vector  $b$  que, de acuerdo con la definición, es la suma buscada. Como vemos en el plano, las proyecciones de vector  $b$  en los ejes de coordenadas son las sumas de las correspondientes proyecciones de los vectores  $a_1$  y  $a_2$  en estos mismos ejes.

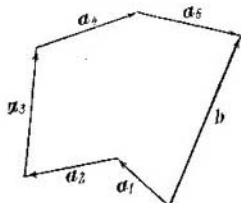


Fig. 3.3.

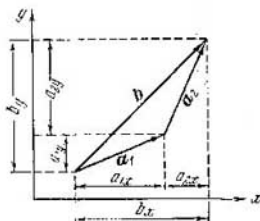


Fig. 3.4.

Para varios vectores puede hacerse uso de la ley asociativa de adición.

Señalemos que también es posible confeccionar la suma de dos vectores por la regla del paralelogramo (fig. 3.5).

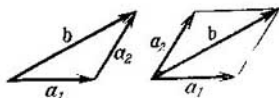


Fig. 3.5.

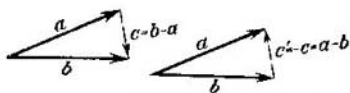


Fig. 3.6.

Sin embargo, la regla del polígono es más cómoda para realizar la suma de varios vectores.

2. Denomínase *diferencia* de dos vectores un vector construido de la forma siguiente: se hacen coincidir los orígenes del vector minuendo  $b$  y del sustraendo  $a$  (fig. 3.6). El vector  $c$ , trazado del extremo del sustraendo al extremo del minuendo, es la diferencia buscada:

$$c = b - a. \quad (3.9)$$

En proyecciones

$$c_x = b_x - a_x, \quad c_y = b_y - a_y, \quad c_z = b_z - a_z.$$

La demostración se desprende directamente de la regla del polígono, ya que  $a + c = b$ .

3. El producto del vector  $a$  por un escalar  $k$  es un nuevo vector  $b$ , cuya proyección es  $k$  veces mayor que las correspondientes proyecciones del vector  $a$ . De esta definición sigue, que

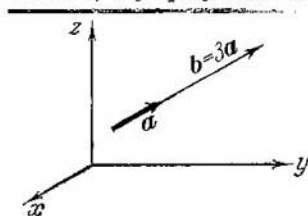


Fig. 3.7.1

$$b = ka, \text{ si } b_x = ka_x,$$

$$b_y = ka_y, \quad b_z = ka_z. \quad (3.10)$$

Para un número  $k$ , entero y positivo, esto se desprende de forma directa de la ley de adición de vectores.

Cuando un vector es multiplicado por un escalar positivo, su dirección no cambia, pero el módulo del vector crece  $k$  veces (fig. 3.7):

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{k^2 a_x^2 + k^2 a_y^2 + k^2 a_z^2} = \\ &= k \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = ka. \end{aligned}$$

4. El cociente de la división del vector  $a$  por un escalar  $k \neq 0$ , es un nuevo vector  $b$ , cuyas proyecciones son  $k$  veces menores que las correspondientes proyecciones del vector  $a$ . Así, pues, de la definición se deduce, que

$$b = \frac{a}{k}, \quad \text{si } b_x = \frac{a_x}{k}, \quad b_y = \frac{a_y}{k}, \quad b_z = \frac{a_z}{k}. \quad (3.11)$$

Dejemos que, por su cuenta, el lector muestre que al dividir un vector por un escalar positivo, su dirección no varía, en tanto que su módulo disminuye  $k$  veces.

### § 3.4. Descomposición de un vector en dos sumandos (componentes)

1. Descomponer el vector  $a$  en dos sumandos significa hallar dos vectores  $b$  y  $c$  tales que  $a = b + c$ . En semejante caso  $b$ ,  $c$  y  $a$  forman un triángulo cerrado (regla del polígono).

Este problema es indeterminado: sobre un segmento de largura  $a$  puede ser construido un conjunto ilimitado de triángulos, dos de cuyos lados son los módulos de los vectores

buscados (fig. 3.8). El problema será determinado, si prefijamos ciertas condiciones complementarias.

2. En la práctica se tropieza con frecuencia con el problema de descomposición del vector dado  $a$  en dos sumandos cuya dirección es paralela a ciertas rectas. Este problema es por completo determinado.

Por los extremos del segmento  $a$  trazamos dos rectas, paralelas a rectas prefijadas  $BD$  y  $CE$ , que determinan la

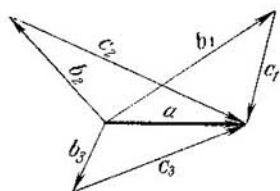


Fig. 3.8.

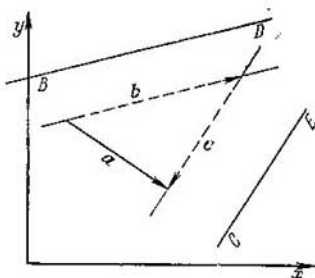


Fig. 3.9.

dirección de los vectores  $b$  y  $c$  (fig. 3.9). En el triángulo obtenido construimos dos vectores, de manera que el origen del primero coincida con el origen del vector  $a$ , mientras que su extremo, con el vértice del triángulo hallado; el origen del segundo vector coincide con el vértice del triángulo, y su extremo, con el extremo del vector  $a$ . Estos serán los vectores  $b$  y  $c$  buscados. En efecto, son paralelos a las rectas prefijadas y su suma, según la regla del polígono, es igual al vector inicial:  $b + c = a$ .

### § 3.5. Velocidad vector

1. Sea que un punto material se mueve por una trayectoria rectilínea, que no coincide con los ejes de coordenadas. En el momento de tiempo  $t_1$  la posición del punto es determinada por el radio vector  $r_1$ , en el momento  $t_2$ , por el radio vector  $r_2$  (fig. 3.10). Determinemos el vector de desplazamiento:

$$\Delta r = r_2 - r_1. \quad (3.12)$$

Entonces, la velocidad media también será, por lo visto, un vector:

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}. \quad (3.13)$$

En efecto, al dividir el vector  $\Delta r$  por el escalar  $\Delta t$  obtenemos un nuevo vector, cuya dirección coincide con la de des-

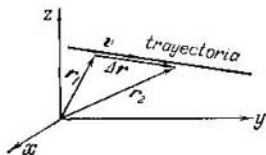


Fig. 3.10.

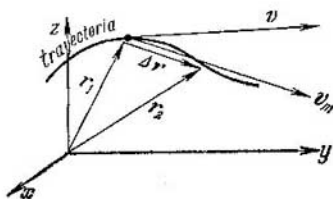


Fig. 3.11.

plazamiento. Por consiguiente, los vectores de velocidad y desplazamiento tienen la misma dirección.

La velocidad instantánea de un punto en movimiento uniforme, también es un vector

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = r'(t) \quad (3.14)$$

que coincide por la dirección con el vector de desplazamiento.

Así, pues, *la velocidad de un punto en movimiento uniforme es un vector dirigido a lo largo de la trayectoria.*

2. Al moverse un punto material por una trayectoria curvilínea, conservaremos las definiciones de velocidad media e instantánea (3.13) y (3.14). En tal caso, los vectores de desplazamiento y de velocidad media están dirigidos por la cuerda que une dos puntos de la trayectoria, correspondientes a la posición del punto material en los momentos de tiempo  $t_1$  y  $t_2$  (fig. 3.11). Cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , la dirección de la cuerda tiende a la dirección de una tangente. En el límite, el vector infinitésimo de desplazamiento y el vector de la velocidad instantánea coincidirán con la dirección de la tangente.

Así que, *durante el movimiento de un punto material por una trayectoria curvilínea, el vector de la velocidad instantánea está dirigido por la tangente a la trayectoria.*

### 3. Proyecciones del vector de desplazamiento:

$$\begin{aligned} \Delta r_x = x_2 - x_1 = \Delta x, \quad \Delta r_y = y_2 - y_1 = \Delta y, \quad \Delta r_z = \\ = z_2 - z_1 = \Delta z. \end{aligned} \quad (3.15)$$

De aquí, obtenemos las proyecciones correspondientes del vector de la velocidad instantánea:

$$\begin{aligned} v_x &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t), \\ v_y &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = y'(t), \\ v_z &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} = z'(t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

El módulo de la velocidad instantánea:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (3.17)$$

## § 3.6. Composición de velocidades

1. Como en la mecánica newtoniana la velocidad es un vector, la composición de velocidades se reduce a la suma

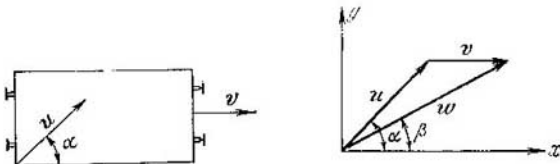


Fig. 3.12.

de las correspondientes proyecciones de la velocidad. O sea, que las velocidades se componen según la regla del polígono (o paralelogramo).

Sea que una persona se mueve por una plataforma a velocidad  $u$ , que forma un ángulo  $\alpha$  con uno de los lados de la plataforma. Esta misma está en movimiento a velocidad  $v$  con relación a la Tierra (fig. 3.12). Hallemos el valor y la dirección de la velocidad  $w$  de la persona respecto de la Tierra.

El problema puede ser resuelto del siguiente modo. Las proyecciones del vector  $u$ :

$$u_x = u \cos \alpha, \quad u_y = u \sin \alpha;$$

las correspondientes proyecciones del vector  $v$ :

$$v_x = 0, \quad v_y = 0,$$

de aquí

$$w_x = u_x + v_x = u \cos \alpha + v, \quad w_y = u_y + v_y = u \sin \alpha.$$

El módulo de la velocidad de la persona con relación a la Tierra:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{u^2 \cos^2 \alpha + 2uv \cos \alpha + v^2 + u^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

y su dirección se determina de la razón

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{w_y}{w} = \frac{u \operatorname{sen} \alpha}{w}. \quad (3.19)$$

Este mismo resultado puede ser obtenido con ayuda del teorema del coseno.

2. El movimiento de la persona respecto a la plataforma es llamado *relativo*, el de la plataforma con relación a la Tierra, *de traslación*, mientras que el de la persona respecto de la Tierra, *compuesto*.

Así, pues, en la mecánica newtoniana *la velocidad de un movimiento compuesto es igual a la suma vectorial de las velocidades de los desplazamientos relativo y de traslación*

$$w = u + v. \quad (3.20)$$

La expresión (3.20) es *la ley clásica de composición de velocidades en forma vectorial*.

En la teoría de la relatividad, como se mostrará en el § 12.5, las velocidades se componen por reglas mucho más complicadas y, en aquel caso, no se puede hacer uso de la expresión (3.20).

## ACELERACIÓN

### § 4.1. Aceleración media e instantánea

1. La *aceleración media* en el intervalo de tiempo dado es una magnitud física, numéricamente igual a la razón de la variación de la velocidad y el intervalo de tiempo.

Sea que en el momento de tiempo  $t_1$  el punto material tenía una velocidad instantánea  $v_1$ , mientras que en el momento  $t_2$ , la velocidad  $v_2$ . Entonces, por definición

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

De la definición es evidente que la aceleración es un vector. La dirección del vector de aceleración depende del carácter del movimiento del punto material. Esto será examinado con detalle más adelante.

Se denomina *aceleración instantánea* una magnitud física, numéricamente igual al límite al que la aceleración media tiende por un intervalo infinitésimo de tiempo, es decir, es la derivada del vector de velocidad en el tiempo:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t). \quad (4.2)$$

2. La unidad de aceleración  $[a] = [v]/[t]$ , en el Sistema Internacional de unidades (SI), es un metro por segundo cuadrado ( $m/s^2$ ).

### § 4.2. Movimiento rectilíneo variable

1. Si un punto material se mueve por una trayectoria rectilínea, los vectores de velocidad y aceleración estarán dirigidos a lo largo de esa misma recta y sólo variará el módulo de la velocidad. Las aceleraciones media e instantánea son calculadas de la forma siguiente:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (4.3)$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t). \quad (4.4)$$

2. El movimiento variable denominase *acelerado* si el módulo de la velocidad del punto material crece permanentemente, es decir, para cualesquiera  $t_2 > t_1$  es válida la condición  $v_2 > v_1$ . Nos sirve de ejemplo el movimiento de una bola pesada que cae libremente de una pequeña altura.

En correspondencia, llámase *retardado* el movimiento de un punto, si el módulo de su velocidad decrece constantemente: para cualesquiera  $t_2 > t_1$  es válida la condición  $v_2 < v_1$ . Puede servir de ejemplo el movimiento de una bola pesada, lanzada verticalmente hacia arriba (hasta su parada).

De las definiciones (4.3) y (4.4) se desprende que con el movimiento acelerado de un punto material, la aceleración se expresa por un número positivo, mientras que con el movimiento retardado, por un número negativo. Esto quiere decir, que en el primer caso la dirección de los vectores de velocidad y aceleración coincide, en el segundo caso la dirección de la aceleración es opuesta a la de la velocidad.

### § 4.3. Movimiento rectilíneo uniformemente variado

1. El movimiento de un punto material es llamado *uniformemente variado* si su velocidad instantánea es una función lineal del tiempo:

$$v = v_0 + at, \quad (4.5)$$

donde  $v_0$  y  $a$  son magnitudes constantes.

Aquí  $v_0$  tiene el sentido de *velocidad inicial*. En efecto para  $t = 0$  la velocidad  $v = v_0$ , entendiéndose por  $t = 0$  el momento de tiempo en que comenzamos a observar el movimiento del punto material. Por regla, este momento no coincide con el lapso cuando comienza el movimiento, que con frecuencia es en general desconocido (véase el § 1.4). Al mismo tiempo, no podemos excluir el caso, en el que los momentos del comienzo de la observación y del movimiento coincidirán (por ejemplo, si conectamos el cronómetro en el momento cuando soltamos la piedra de las manos y ella empieza a caer). En este caso particular  $v_0 = 0$  y  $v = at$ .

2. Aclaremos el sentido de  $a$  en la expresión (4.5). Si derivamos (4.5) y tomamos en consideración que  $v_0$  y  $a$  son



magnitudes constantes, obtenemos

$$v'(t) = a.$$

Así, pues, con el movimiento uniformemente variado la magnitud  $a$ , que entra en la expresión para la velocidad instantánea (4.5), es la aceleración instantánea.

Esto nos permite definir de nuevo modo la noción de movimiento uniformemente variado. Denomínase *uniformemente variado* el movimiento con aceleración constante.

#### § 4.4. Gráfica de velocidad con el movimiento uniformemente variado

Para construir la gráfica de velocidad, tracemos en el eje de abscisas los valores instantáneos del tiempo y en eje de ordenadas, los valores de la velocidad instantánea que

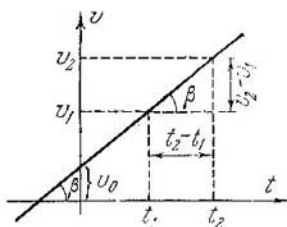


Fig. 4.1.

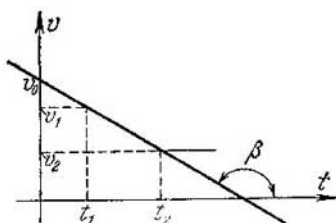


Fig. 4.2.

corresponden a los primeros. La línea que une los puntos obtenidos es la *gráfica de velocidad*.

Para el movimiento uniformemente variado, la gráfica de velocidad es una recta que corta en el eje de ordenadas el valor de la velocidad inicial (fig. 4.1). La tangente del ángulo de inclinación de la gráfica es numéricamente igual a la aceleración:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = a,$$

Para el caso de movimiento acelerado, la gráfica de velocidad forma con el eje de abscisas un ángulo agudo (fig. 4.1), mientras que para el movimiento retardado, obtuso (fig. 4.2).

## § 4.5. Cálculo gráfico de los desplazamientos

1. La correlación entre el desplazamiento y el espacio recorrido fue examinada en el § 1.6, cuando considerábamos el ejemplo de un punto en movimiento a lo largo del eje de abscisas. Dicha correlación es válida en caso de que el punto se mueva por una trayectoria arbitraria.

En la gráfica de velocidad del movimiento uniforme (fig. 4.3), el producto  $vt$  está representado por el área del rectángulo sombreado. Por consiguiente, el desplazamiento

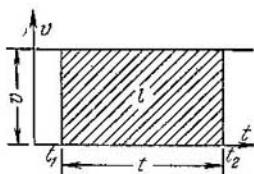


Fig. 4.3.

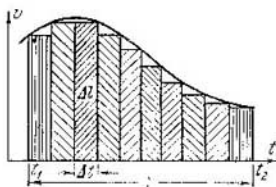


Fig. 4.4.

$l = l_2 - l_1 = v(t_2 - t_1) = vt$  es igual *numéricamente* al área de dicho rectángulo (al elegir la escala del modo correspondiente).

Esta deducción puede ser generalizada para el caso de movimiento variable arbitrario. En efecto, sea que la velocidad de un punto material cambie de acuerdo con la ley arbitraria  $v = f(t)$ ; la gráfica de esta función está representada en la fig. 4.4.

Dividamos el intervalo de tiempo  $t = t_2 - t_1$  en varias partes y consideraremos que en el transcurso del pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t$  la velocidad no varía, mientras que, a continuación, por salto toma un nuevo valor. Semejante movimiento «a saltos», con cierto grado de precisión, representa el movimiento real con el que la velocidad variaba no a saltos, sino uniformemente, como está representado en la gráfica. El desplazamiento  $\Delta l$  en el transcurso de un pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t$  es igual numéricamente al área rayada, ya que durante este tiempo considerábamos que el movimiento era uniforme. En lo que se refiere al desplazamiento en el intervalo de tiempo  $t$ , podemos decir que *aproximadamente* es igual al área de la figura escalonada (se trata, claro

está, de la igualdad numérica). Mientras menores sean los intervalos  $\Delta t$ , el movimiento «a saltos» representa con mayor precisión el movimiento variable real. Obtendremos el resultado preciso si pasamos al límite para  $\Delta t \rightarrow 0$ .

2. En la gráfica de velocidad, el desplazamiento, con movimiento variable arbitrario de un punto material, es numéricamente igual al área del trapecio curvilíneo limitado por abajo por el eje de abscisas, a derecha e izquierda por los valores de la velocidad instantánea en los momentos  $t_1$  y  $t_2$  y por arriba, por la gráfica de velocidad. Hemos de señalar, que el cálculo de semejantes áreas es objeto de la parte de las matemáticas, llamada cálculo integral. Así, pues, el desplazamiento

$$l = l_2 - l_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_0^t v dt. \quad (4.6)$$

#### § 4.6. Desplazamiento y velocidad media con movimiento uniformemente variado

1. Haciendo uso de las deducciones del párrafo anterior, nos será fácil calcular el desplazamiento para el movimiento uniformemente variado de un punto material. En efecto, la velocidad es aquí una función lineal del tiempo, la gráfica de velocidad es una línea recta y el área buscada del trapecio es igual al producto de la semisuma de la base por la altura (véase la fig. 4.1). De aquí se desprende que con  $t_1 = 0$  y  $t_2 = t$ , el desplazamiento puede ser calculado por la fórmula

$$l - l_0 = \frac{v_0 + v}{2} t. \quad (4.7)$$

Sustituyendo el valor de  $v = v_0 + at$ , obtenemos

$$l = l_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (4.8)$$

Es decir, la coordenada de un punto material, en movimiento uniformemente variado, es una función cuadrática del tiempo. La ecuación (4.8) representa la ley de movimiento buscada. La gráfica del espacio recorrido es una parábola. La fig. 4.5 ofrece la gráfica del caso más sencillo de movimiento, cuando

$$l_0 = 0, v_0 = 0 \text{ y } l = at^2/2.$$

Es fácil cerciorarse de que los movimientos variados examinados en el § 1.5 son uniformemente variados.

2. Si se hace uso de la definición de la velocidad media (3.13), se muestra con facilidad que *el valor absoluto de la velocidad media para el movimiento uniformemente variado de un punto material es igual a la semisuma de las velocidades inicial y final:*

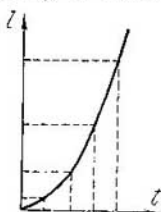


Fig. 4.5.

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (4.9)$$

Efectivamente, por definición

$$v_m = \frac{l_2 - l_1}{t_2 - t_1}. \quad (4.10)$$

Sustituyendo los valores de  $l_2$  y  $l_1$  y después de realizar sencillas transformaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{l_0 + v_0 t_2 + (at_2^2/2) - [l_0 + v_0 t_1 + (at_1^2/2)]}{t_2 - t_1} = \\ &= \frac{v_0(t_2 - t_1) + (1/2)a(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2v_0 + at_1 + at_2}{2} = \\ &= \frac{(v_0 + at_1) + (v_0 + at_2)}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \end{aligned}$$

Hay que indicar que esta deducción *sólo* es aplicable para el movimiento uniformemente variado. En el caso general del movimiento variable no es válida. Por ejemplo, si un autobús parte de una parada y frena en la siguiente,  $v_1 = v_2 = 0$ , pero la velocidad media no es igual a cero.

#### § 4.7. Movimiento uniforme de un punto material por una circunferencia

1. Sea que un punto material está en movimiento por una circunferencia de radio  $r$ . En el transcurso de tiempo  $\Delta t$  el punto se desplazará por el arco  $\Delta l = r\Delta\alpha$ , donde  $\Delta\alpha$  es el ángulo de giro del radio (fig. 4.6).

Durante el movimiento de un punto material por una circunferencia, la magnitud

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t) \quad (4.11)$$

denomínase *velocidad angular del punto*.

La unidad de velocidad angular es un radián por segundo (rad/s). La dimensión de la velocidad angular:

$$[\omega] = [\alpha]/[t].$$

De la definición de la velocidad de un punto material, se deduce que

$$v = \frac{dl}{dt} = r \frac{d\alpha}{dt} = r\omega. \quad (4.12)$$

2. Se denomina *período* el tiempo  $T$ , durante el que el punto realiza una vuelta completa alrededor de la circunferencia. La magnitud  $\nu$ , inversa al período, muestra cuantas vueltas realiza el punto por la unidad de tiempo. Esta magnitud se llama *frecuencia*:

$$\nu = 1/T. \quad (4.13)$$

3. En el transcurso del intervalo de tiempo llamado período, el punto en movimiento uniforme describe una circunferencia completa, es decir, para  $\Delta t = T$  el arco  $\Delta l = 2\pi r$ . De aquí se desprende que

$$v = 2\pi r/T = 2\pi r\nu. \quad (4.14)$$

Después de comparar (4.12) y (4.14), obtenemos

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu. \quad (4.15)$$

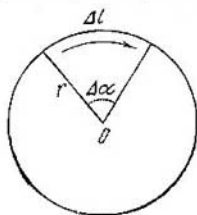


Fig. 4.6.

#### § 4.8. Aceleración con movimiento uniforme de un punto material por una circunferencia

1. Con el movimiento uniforme de un punto material por una circunferencia, el módulo de la velocidad no varía:  $[v] = v = \text{const.}$  No obstante, esto no quiere decir que el punto se mueva sin aceleración. En efecto, aquí de forma constante cambia la *dirección* de la velocidad, como vector dirigido por la tangente a la trayectoria, lo que significa que el punto está en movimiento con aceleración.

2. El vector de variación de la velocidad

$$\Delta v = v' - v$$

se construye (fig. 4.7) de acuerdo con la regla expuesta en el p. 2, § 3.4. Siendo  $\Delta t$  pequeño, el arco  $AB$  casi no se diferencia de la cuerda  $AB$ . De la semejanza de los triángulos  $OAB$

y  $BMN$  se desprende que:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta l}{r}.$$

De aquí el módulo de la aceleración media

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

El módulo de la aceleración instantánea

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{v}{r} \frac{\Delta l}{\Delta t} \right).$$

El factor constante  $v/r$  lo sacamos fuera del signo del límite; entonces

$$a = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{v}{r} v = \frac{v^2}{r}. \quad (4.16)$$

3. Nos queda determinar la dirección del vector de la aceleración instantánea. El vector de la aceleración media

forma con el vector de velocidad el ángulo  $\beta = (\pi + \Delta\alpha)/2$ . Para  $\Delta t \rightarrow 0$  el ángulo  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ . Por consiguiente, el vector de la aceleración instantánea formará con el vector de velocidad el ángulo

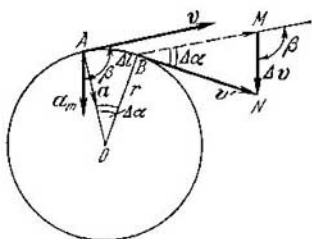


Fig. 4.7.

$$\varphi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi + \Delta\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.17)$$

Así, pues, un punto material en desplazamiento uniforme por una circunferencia, se mueve con aceleración dirigida de manera perpendicular al vector de velocidad, es decir, por el radio hacia el centro. Por esto, esta aceleración denominase *normal* o *centrípeta* y se designa por  $a_n$ .

De acuerdo con (4.12)  $v = \omega r$ . Sustituyendo esta igualdad en (4.16), obtenemos

$$a_n = v^2/r = \omega^2 r. \quad (4.18)$$

## FUERZA

### § 5.1. La fuerza como medida de interacción de los cuerpos

1. Como nos muestra la experiencia, en la naturaleza todos los cuerpos, de una u otra forma, interaccionan entre sí. Por ejemplo, el aire de la atmósfera presiona sobre la Tierra y sobre todos los objetos que en ella se encuentran; la interacción entre las moléculas de agua y la superficie del cuerpo del bañador hace que gotas de agua se adhieran al cuerpo; la fuerte interacción entre las partes componentes del núcleo del átomo (protones y neutrones) es la causa de que sea extremadamente difícil destruir los núcleos atómicos.

*La fuerza es la medida de la interacción entre los cuerpos o entre las partículas de las que éstos constan.*

El origen de la noción de fuerza surgió al apreciar la tensión muscular. Para elevar una piedra, desplazar una barca, tensar la cuerda del arco, etc., se necesita cierta tensión de los músculos, diferente en diversos casos. El grado de esta tensión se apreciaba por la fuerza. Podemos aducir como ejemplos una serie de expresiones, en las que incluso ahora, la palabra fuerza se toma en sentido original: «un hombre fuerte», «realizar un violento esfuerzo», «mis fuerzas han llegado al límite», etc.

Más adelante, el hombre se cercioró que la noción de fuerza puede también servir para caracterizar la acción de unos cuerpos sobre otros. Así, surgieron los conceptos de «fuerte viento», «fuerte corriente», «fuerte golpe» como características de influjos externos, equivalentes al esfuerzo muscular.

Posteriormente, el término «fuerza» fue interpretado de modo muy amplio. Aparecieron las expresiones «fuerza de voluntad», «fuerza moral», «más fuerte que la muerte», etc. Semejante ampliación de la noción de fuerza fue y sigue siendo la causa de una serie de equívocos y, por eso, debe ser evitada. Por desgracia, hasta la fecha, por ejemplo, se hace uso de tales términos como «fuerza luminosa», «fuerza electromotriz», «caballo de fuerza», etc., aunque semejantes conceptos nada tienen que ver con la fuerza.

En mecánica, el término «fuerza» será aplicado sólo en su sentido directo, es decir, como medida de interacción entre los cuerpos.

2. En la física moderna se distinguen los siguientes tipos de interacciones:

a) gravitatoria, que surge entre los cuerpos a cuenta de la gravitación;

b) electromagnética, que aparece entre partículas o cuerpos cargados inmóviles o en movimiento;

c) fuerte o nuclear, que caracteriza la interacción de las partículas elementales, por ejemplo, aquellas que constituyen el núcleo atómico;

d) interacción débil, que como resultado proporciona la desintegración de ciertas partículas elementales.

En mecánica se examinan fuerzas que surgen al haber contacto directo entre los cuerpos, o sea, fuerzas de rozamiento y de elasticidad. Además, en mecánica estudiándose las fuerzas de gravitación.

3. El resultado de la interacción entre los cuerpos es su deformación (cambio de las dimensiones o la forma del cuerpo) o bien la aceleración (variación del valor o la dirección de la velocidad). Es natural, que no puede ser excluida la simultaneidad de surgimiento de las deformaciones y la aceleración.

Cada una de estas manifestaciones de la fuerza, puede ser utilizada para su medición. Sin embargo, con frecuencia resulta ser mucho más fácil medir el valor de la deformación que el de la aceleración. Por este motivo, la pieza principal del instrumento para medir las fuerzas, o sea,

del *dinamómetro* (del griego *dynamis* — fuerza), es un muelle cuyo grado de deformación depende del valor de la fuerza que se mide (fig. 5.1).

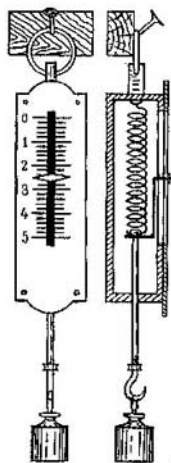


Fig. 5.1.

## § 5.2. Deformaciones elásticas y plásticas

1. La deformación del cuerpo se denomina *elástica* si después de quitar la carga, las dimensiones y la forma del cuerpo por completo se restablecen. La deformación que



no desaparecen después de cesar la acción de la fuerza, denominase *plástica*. Después de semejante deformación el cuerpo conserva (parcial o completamente) la forma adquirida de nuevo y las dimensiones variadas.

Los puentes, las vigas, paredes, piezas de las máquinas-herramientas, bajo la acción de las fuerzas que sobre ellos actúan, deben trabajar en la región de las deformaciones elásticas, lo que asegura su longevidad y la fiabilidad de la estructura. Por lo contrario, durante el maquinado del material (forja, estampado, etc.), éste se somete a deformaciones plásticas de manera que la pieza obtenida después del maquinado tenga las dimensiones y forma necesarias y las conserve después de quitar los esfuerzos.

2. El carácter de la deformación depende del valor y la duración de actuación del esfuerzo, así como también del material de que está fabricado el cuerpo y del estado del material (temperatura que precede al maquinado, etc.).

Por ejemplo, si una placa de acero se dobla y de inmediato se suelta, ella tomará su forma inicial; está claro que se trata de una deformación elástica. Sin embargo, si la placa es fijada en posición doblada para tiempo prolongado, después de quitar los esfuerzos externos, la pieza ya no se desdoblará por completo. El aumento considerable de la duración del influjo exterior, convierte la deformación elástica en plástica.

La temperatura influye de modo considerable sobre el carácter de las deformaciones. Una placa de acero, calentada hasta la temperatura de calda al amarillo, se hace plástica con esfuerzos externos relativamente pequeños, que a la temperatura del medio ambiente sólo puede provocar en la placa deformaciones elásticas. Al revés, el plomo que es muy plástico a la temperatura del medio ambiente, adquiere elasticidad a bajas temperaturas. Una campanilla de plomo, enfriada con aire líquido, omite un sonido puro, lo que significa que en ella se producen deformaciones elásticas. El aumento de la plasticidad de los materiales con el crecimiento de la temperatura, es utilizado en la técnica al maquinar los metales.

Es decir, no hay límites estrictos entre las deformaciones elásticas y plásticas. Sin embargo, como muestra la práctica, pequeñas deformaciones de poca duración pueden tomarse, con suficiente grado de precisión, como elásticas.

3. Por experiencia, sabemos que cuanto mayor deforma-

ción queramos crear, mayores esfuerzos hay que aplicar al cuerpo a deformar. Por consiguiente, según el valor de la deformación, podemos juzgar acerca del valor de la fuerza. El análisis de una serie de experimentos, nos muestra que *el valor absoluto de la deformación elástica es proporcional a la fuerza aplicada*. Esta afirmación constituye el contenido de la ley de Hooke:

$$F = k (l - l_0) = k \Delta l, \quad (5.1)$$

donde  $F$  es la fuerza exterior aplicada;  $l_0$ , la longitud inicial del cuerpo;  $l$ , la longitud del cuerpo deformado y  $k$ , un coeficiente de proporcionalidad llamado *rigidez* (antes se denominaba coeficiente de elasticidad).

De la ley de Hooke se deduce que la escala del dinamómetro debe ser uniforme (véase la fig. 5.1). Esto facilita de modo notable su graduación.

### § 5.3. Fuerza — vector

1. Toda fuerza tiene determinada dirección, con la particularidad de que la acción de la fuerza depende no sólo de su valor, sino que también de su dirección. Por ejemplo, la fuerza de rozamiento está dirigida, con mayor frecuencia, en sentido opuesto al vector de velocidad. Si un muelle se estira bajo la acción de cierta fuerza, al cambiar la dirección de la fuerza el muelle se comprimirá. Cuando un futbolista golpea sobre el balón, comunica a éste una aceleración dirigida en la misma dirección que la fuerza, con la que el pie del futbolista actúa sobre el balón. La ley de Hooke también muestra que la fuerza es un vector, ya que la rigidez es una magnitud escalar, mientras que el alargamiento  $\Delta l = l - l_0$  es un vector y el resultado de multiplicar un vector por un escalar es un vector (§ 3.3).

2. Escribamos la ley de Hooke en forma vectorial. Con ello, hay que tener en cuenta la dirección de los vectores de desplazamiento y fuerza. Sea que un cuerpo ajeno, por ejemplo, la mano, estira un muelle (fig. 5.2). La fuerza con la que el cuerpo ajeno actúa sobre el muelle se llama *fuerza externa*. La dirección de dicha fuerza coincide con la dirección de desplazamiento y, por lo tanto, los dos vectores tienen la misma dirección:

$$F_{\text{ext}} = k \Delta l. \quad (5.2)$$

La práctica muestra que el muelle deformado actúa sobre la mano con una fuerza de igual valor que la exterior, pero de dirección opuesta (fig. 5.3). La fuerza con la que el muelle

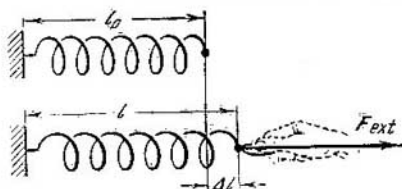


Fig. 5.2.

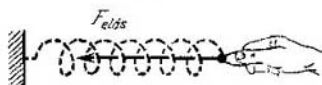


Fig. 5.3.

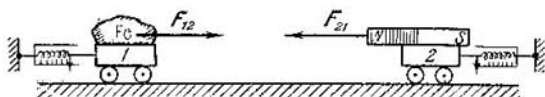


Fig. 5.4.

deformado actúa sobre el cuerpo ajeno, denomínase *fuerza elástica*. Como la dirección de esta fuerza es inversa a la del vector de alargamiento,

$$F_{el} = -k \Delta l. \quad (5.3)$$

3. Al analizar diversos tipos de interacciones entre los cuerpos, Newton llegó a la conclusión de que siempre *la interacción de dos cuerpos transcurre con fuerzas de igual valor, pero dirigidas en sentidos opuestos*:

$$F_{12} = -F_{21}, \quad (5.4)$$

donde  $F_{12}$  es la fuerza con la que el primer cuerpo actúa sobre el segundo, mientras que  $F_{21}$ , la fuerza con la que el segundo cuerpo actúa sobre el primero. Esta afirmación se llama *tercera ley de Newton*.

Como ejemplo podemos considerar el experimento de interacción de un imán y un trozo de hierro. Los dinamómetros sujetos en los dos cuerpos, registran fuerzas de interacción de igual valor, pero de direcciones opuestas (fig. 5.4).

En los siguientes capítulos se examinan ejemplos de aplicación de la tercera ley de Newton.

### § 5.4. Composición y descomposición de fuerzas aplicadas a un punto material

1. Si sobre un punto material están aplicadas varias fuerzas, éstas pueden ser sustituidas por la fuerza resultante o vector suma. La resultante es la suma vectorial de las fuerzas que se componen y puede ser hallada mediante la regla del polígono (fig. 5.5).

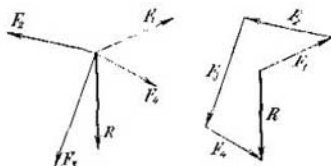


Fig. 5.5.

Si el polígono de fuerzas resulta cerrado, esto quiere decir, que la resultante de este sistema de fuerzas es igual a cero.

Semejante sistema de fuerzas se denomina *equilibrado*. Por ejemplo, un sistema de tres fuerzas de igual valor absoluto, ubicadas en un mismo plano bajo ángulos de  $120^\circ$  entre sí (fig. 5.6).

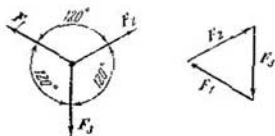


Fig. 5.6.

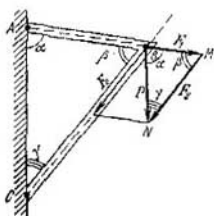


Fig. 5.7.

El sistema de fuerzas aplicado sobre un punto puede ser equilibrado aplicándole una *fuerza de equilibrio*, cuyo módulo es igual a la resultante, pero de dirección opuesta.

2. Como cualquier otro vector, la fuerza puede ser descompuesta en dos componentes (véase § 3.4). En la práctica se tropieza frecuentemente con el caso de descomposición de una fuerza en dos componentes de direcciones prefijadas.

Por ejemplo, sea que sobre un soporte actúa cierta fuerza  $P$  (fig. 5.7). Es necesario hallar los esfuerzos en las barras. En este caso, las fuerzas buscadas están dirigidas a lo largo de las barras. Construimos el triángulo  $BMN$  de forma que sus lados sean paralelos a la fuerza  $P$  y a las barras. En la escala elegida, la largura del lado  $BN$  es igual a  $P$ . Entonces el vector  $F_1 = \vec{BM}$  es la fuerza que estira la barra  $AB$ , mientras que el vector  $F_2 = \vec{MN}$ , la fuerza que comprime la barra  $BC$ . En la escala elegida las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  pueden ser calculadas con ayuda de la proporción

$$\frac{F_1}{AB} = \frac{F_2}{BC} = \frac{P}{AC}.$$

## Capítulo 6

### FUERZA DE LA GRAVEDAD, PESO Y MASA

#### § 6.1. Fuerza de la gravedad. Peso

1. De la experiencia cotidiana sabemos que todos los cuerpos caen a la Tierra, si este movimiento no se obstaculiza por otros cuerpos. ¿Cuál es la causa de la caída?

Realicemos el siguiente experimento. Mediante un hilo atemos un cuerpo de un muelle y después soltémoslo (fig. 6.1). El cuerpo se desplazará un poco hacia abajo, estirará el muelle y, a continuación, quedará parado. El muelle deformado actúa sobre el cuerpo con la fuerza  $F_{el}$ , dirigida verticalmente hacia arriba, pero el cuerpo seguirá en equilibrio. Este fenómeno sólo es posible en el caso de que, además de la fuerza elástica, sobre el cuerpo actúa una fuerza más  $P$ , igual a la primera por su valor absoluto, pero dirigida verticalmente hacia abajo, o sea, hacia la Tierra.

Si quemamos el hilo que liga el cuerpo con el muelle, la interacción entre ellos desaparece. El muelle tomará de

nuevo sus dimensiones y forma iniciales. La acción mutua entre la Tierra y el cuerpo se conserva, es decir, la Tierra continúa atrayendo el cuerpo con la fuerza  $P$ . Bajo el influjo de esta fuerza el cuerpo abandona el estado de reposo y comienza a caer hacia la Tierra.

*La fuerza con que la Tierra atrae los cuerpos llámase fuerza de la gravedad.*

2. La fuerza de la gravedad actúa sobre todos los cuerpos situados en las cercanías de la Tierra. La causa por la que no todos ellos caen a la Tierra consiste en que su movimiento está limitado por otros cuerpos: apoyos, hilo, muelle, pared, etc.



Fig. 6.1.

Los cuerpos que limitan el movimiento de otros, son llamados *enlaces* o *ligadura mecánica*. El origen de este término es evidente: dichos cuerpos «enlazan» el movimiento del cuerpo dado, obstaculizando su desplazamiento libre. Por ejemplo, la superficie de la mesa es la ligadura mecánica para todos los objetos que en ella se encuentran; el suelo es la ligadura para mesa, etc.

Bajo la acción de la fuerza de la gravedad los enlaces se deforman y la reacción de los enlaces deformados, según la tercera ley de Newton, equilibran dicha fuerza. Pero si es fácil observar la

deformación del muelle, para advertir la deformación de otros enlaces, son con frecuencia necesarios instrumentos que permitan registrar muy pequeños desplazamientos.

3. *Denomínase peso la fuerza con que el cuerpo actúa sobre el enlace (presiona sobre el apoyo horizontal o estira el muelle) a causa de la atracción de este cuerpo por la Tierra.*

Como se mostrará en el § 7.2 el peso del cuerpo es igual a la fuerza de la gravedad, si tanto el cuerpo como el enlace están en reposo con relación a la Tierra (o respecto de ella su movimiento es rectilíneo y uniforme).

Para medir el peso puede hacerse uso de la reacción del enlace deformado. Con este fin se utiliza un dinamómetro (báscula de resorte), graduado según cualesquiera unidades de fuerza.

Pero podemos proceder de otro modo. Tomemos una *pesa patrón*, es decir, un cuerpo cuyo peso es igual a la unidad de fuerza y fabriquemos pesas varias veces mayores y menores que la patrón. Este sistema de pesas es llamado juego de pesas.

Coloquemos en uno de los platos de una balanza de brazos iguales el cuerpo, cuyo peso deseamos determinar y, en el otro, una pesa de tal valor que equilibre la balanza (fig. 6.2). Como para equilibrar la balanza de brazos iguales es preciso

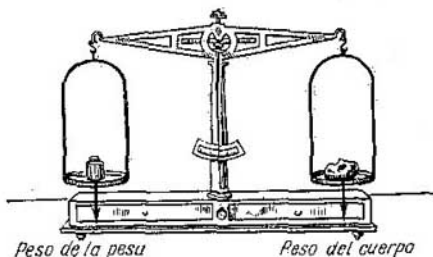


Fig. 6.2.

que sobre los dos platos actúen fuerzas iguales, llegamos a la conclusión de que el peso del cuerpo que probamos es igual al de las pesas.

Así, pues, *el peso se puede determinar en la báscula de resorte o en la balanza de palanca.*

## § 6.2. Caída libre

1. Llamamos *caída libre* el movimiento de los cuerpos que transcurre bajo la acción sólo de la fuerza de la gravedad. Para investigar la caída libre de los cuerpos, hay que librarlos del influjo de todas las fuerzas ajenas y, en particular, de la resistencia del aire.

Es fácil cerciorarse de que la resistencia del aire influye de forma notable sobre el carácter de la caída de los cuerpos. Dejemos caer una piedra y un trozo de algodón. La piedra llegará con rapidez a la Tierra, mientras que el algodón bajará con mayor lentitud. Puede crearse la impresión de que los cuerpos pesados caen con mayor velocidad que los ligeros. Pero si del algodón se forma una bolita compacta, ésta caerá a Tierra con más rapidez. ¿Qué ha variado en este experimento? Ha disminuido el tamaño de la bolita y, correspondientemente, la resistencia del aire. De la misma manera,

una hoja de papel arrugada, sufre una resistencia del aire mucho menor y, por esto, su velocidad de caída es mayor que la de esa misma hoja sin arrugar.

Es natural que surja la pregunta: ¿cómo caerán los cuerpos en el vacío, cuando la resistencia del aire está excluida? ¿Caerán con la misma aceleración? Examinemos el siguiente experimento (fig. 6.3). Tomemos un tubo de vidrio de más de un metro de longitud, soldado por un lado y que por el otro está cerrado con una tapa, en la que hay una tobera. Dentro del tubo se encuentran un trocito de plomo y una pluma. Si se da con brusquedad la vuelta al tubo, el plomo cae con rapidez, en tanto que la pluma cae muy despacio. Unamos el tubo a una bomba y absorbamos el aire de éste. Dando de nuevo la vuelta al tubo nos cercioraremos de que los dos cuerpos caen de igual forma, ¡la pluma no queda en absoluto atrás del plomo!

Es decir, *la caída libre de todos los cuerpos, independientemente de su peso, transcurre con igual aceleración.*

2. Fue Galileo quien, a comienzos del siglo XVII, llegó por primera vez a esta idea. Hasta entonces, en las ciencias dominaba la representación de Aristóteles, de que los cuerpos pesados caen más rápidamente que los ligeros. Para convencerse de que su punto de vista era correcto, Galileo ejecutó una serie de experimentos, tirando diversos cuerpos desde la famosa torre inclinada de Pisa y midiendo el tiempo de su caída.

Galileo mostró que la caída libre es un movimiento uniformemente acelerado. Para demostrar esta tesis es suficiente, por ejemplo, cerciorarse de que *la distancia recorrida por el cuerpo con la caída libre, es proporcional al cuadrado del tiempo de movimiento* (véase el § 4.6). Galileo no tenía instrumentos que permitieran medir con precisión pequeños intervalos de tiempo. Por esta causa, el sabio imitaba la caída libre al moverse el cuerpo por un plano inclinado.

3. En la actualidad, mediante un cronómetro eléctrico es posible medir con gran precisión el tiempo de caída de un cuerpo de cualquier altura. Sea que una pequeña bola de



Fig. 6.3.



acero está detenida a cierta altura por medio de un electroimán. Un relé especial permite desconectar la corriente en el circuito del electroimán y conectar, simultáneamente, el cronómetro eléctrico. Al caer a lo largo de una regla vertical, la bolita recorre determinada distancia y al final del recorrido abre el circuito del cronómetro, haciendo que éste se pare. Cambiando la distancia y midiendo cada vez el tiempo de caída, con facilidad puede ser establecida la ley de movimiento. La resistencia del aire puede ser eliminada introduciendo toda la instalación en un tubo y practicando el vacío en él. Por cierto, que cuando una bolita pesada cae de una pequeña altura, la resistencia del aire puede ser despreciada (véase el § 11.9).

Los resultados de los experimentos certifican con evidencia lo siguiente:

a) *La caída libre es un movimiento uniformemente acelerado.*

b) *Bajo la acción de la fuerza de la gravedad todos los cuerpos caen con igual aceleración  $g$  (del latín—gravitas—peso), llamada aceleración de caída libre.*

c) *La aceleración de la caída libre en diversos puntos de la Tierra, es algo diferente.* Al realizar mediciones de precisión no muy alta, esta diferencia (que no es más del 0,6%) puede ser despreciada y considerarse  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

### § 6.3. Masa de un cuerpo

1. La práctica enseña que la fuerza de la gravedad que en diversos puntos de la Tierra actúa sobre el cuerpo dado, es en cierto grado diferente: varía en función de la latitud geográfica y de la altitud sobre el nivel del mar; del mismo modo cambia la aceleración de caída libre. Sin embargo, para todo cuerpo la razón de la fuerza de la gravedad y la aceleración de caída libre es una magnitud constante:

$$\frac{P_1}{g_1} = \frac{P_2}{g_2} = \frac{P_3}{g_3} = \dots = \text{const.}$$

y, por consiguiente, ofrece cierta característica del cuerpo que consideramos.

*La razón entre la fuerza de la gravedad, que actúa sobre el cuerpo, y la aceleración de caída libre se denomina masa del cuerpo:*

$$m = P/g. \quad (6.1.)$$

El concepto de masa es uno de los fundamentales en física. Será examinado en las siguientes partes del curso: al estudiar las leyes de Newton, las leyes de gravitación, en relación con tan importantes nociones como cantidad de movimiento y energía, lo que permite de modo considerable profundizar y ampliar nuestras representaciones acerca de la masa.

2. Masa es una magnitud escalar, en tanto que la fuerza de la gravedad y la aceleración de caída libre, son vectores de igual dirección. Es mejor anotar la correlación (6.1) en forma vectorial:

$$P = mg. \quad (6.2)$$

3. Como la aceleración de caída libre es constante para todos los cuerpos, de (6.1) se desprende:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1}{P_2}, \quad (6.3)$$

es decir, *la razón entre las masas de dos cuerpos es igual al cociente de sus pesos*, ya que aquí el peso es igual a la fuerza de la gravedad.

En este hecho se basa la definición de las masas mediante la balanza de palanca. Como ya hemos señalado, dicha balanza está equilibrada si el peso del cuerpo es igual al de las pesas. *Pero, en semejante caso la masa del cuerpo también es igual a la de las pesas.* Si fabricamos una pesa patrón y tomando su masa por la unidad, en la balanza de palanca podemos comparar con ella la masa de cualquier otro cuerpo. Por lo tanto, la palabra «ponderación» se aplica en realidad, en dos sentidos: como definición del peso y de la masa.

Así, pues, *la masa de un cuerpo puede ser determinada en la balanza de palanca.*

#### § 6.4. Densidad de la sustancia

Si cuerpos de distintos volúmenes se fabrican de una misma sustancia, sus masas también serán diferentes. Sin embargo, como muestra la experiencia, *la razón entre las masas de estos cuerpos y sus volúmenes es igual a una magnitud constante:*

$$\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2} = \dots = \text{const.}$$

Esta razón es una característica de la materia.

*La razón de la masa del cuerpo respecto a su volumen es llamada densidad de la materia:*

$$\rho = m/V. \quad (6.4)$$

Como mostraremos más adelante, la densidad de la sustancia depende de su temperatura, presión exterior y de su estado de agregación. Por esta causa, en los manuales siempre se indican las condiciones para las que los datos de las tablas son válidos. Sin dichas indicaciones éstos no tienen sentido.

### Capítulo 7

## LEY FUNDAMENTAL DE DINÁMICA

### § 7.1. Fuerza y aceleración

1. De la ley de inercia se deduce que el cuerpo, por sí mismo, sin interacción con los cuerpos que le rodean, no puede variar su velocidad. Todo cambio del valor o la dirección de la velocidad es provocado por fuerzas exteriores aplicadas sobre él. Como sabemos, este influjo se caracteriza por las fuerzas (véase el § 5.1). *La ley fundamental de dinámica (llamada de otro modo, segunda ley de Newton) expresa la correlación entre la fuerza y la variación de la velocidad de los cuerpos en interacción.*

La ley fundamental de dinámica tiene la forma más sencilla en los sistemas inerciales de referencia. El caso que transcurre en sistemas no inerciales será examinado más abajo (cap. 24).

Para empezar, estudiaremos la ley fundamental de dinámica a condición de que la velocidad de movimiento de un punto material respecto del sistema inercial de referencia elegido, sea mucho menor que la velocidad de la luz. Más adelante, mostraremos que muchos problemas de dinámica pueden ser resueltos con esta aproximación hasta una precisión suficiente para las actividades prácticas. Posteriormente, consideraremos el caso relativista más general (cap. 13).

2. El siguiente experimento aclara el sentido de la ley fundamental de dinámica. Entre las dos paredes de una vago-

meta está sujeta una barra dura y lisa, por la que se desliza un cuerpo de masa  $m$  con el rozamiento mínimo. En el cuerpo está fijado un dinamómetro, que con su segundo extremo se fija en la pared delantera (fig. 7.1). Sea que la vagoneta se mueve respecto de un sistema inercial de referencia (por ejemplo, la Tierra) con cierta aceleración  $a$ .

Si el cuerpo queda inmóvil con relación a la vagoneta, en lo que se refiere a la Tierra (sistema inercial de referencia), él se mueve con la misma aceleración  $a$  que la vagoneta. La experiencia muestra que en semejante caso, el resorte del

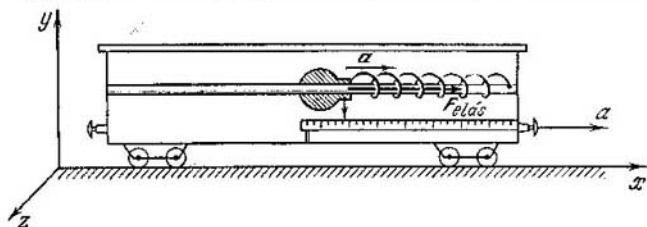


Fig. 7.1.

dinamómetro está deformado. Esto significa que *el resorte actúa sobre el cuerpo con cierta fuerza que le comunica aceleración*. En efecto, eliminando la interacción entre el resorte y el cuerpo (digamos, se quema el hilo que los une), el resorte dejará de estar deformado. En lo que concierne al cuerpo, éste, en lo tocante a la Tierra, se moverá uniformemente, conservando por inercia la velocidad que adquirió en el momento cuando cesó la interacción.

Al experimentar con cuerpos de diferentes masas y con diversas aceleraciones de la vagoneta, podremos cerciorarnos que el grado de alargamiento del resorte es proporcional a la masa del cuerpo acelerado (con aceleración constante) y a la aceleración (para la masa del cuerpo prefijada). Además, el alargamiento del resorte no depende de la velocidad de movimiento del cuerpo y la vagoneta. Pero por definición (véase el § 5.2), la fuerza elástica es proporcional al alargamiento del resorte, de forma que según el valor de éste, podemos juzgar acerca del valor de la fuerza aplicada.

Los resultados del experimento pueden ser enunciados del siguiente modo:

a) Si un cuerpo está en movimiento con aceleración respecto a cierto sistema inercial de referencia, sobre él actúa una fuerza.

b) La fuerza provoca una aceleración que es proporcional a dicha fuerza y cuya dirección coincide con ella; con la acelera-

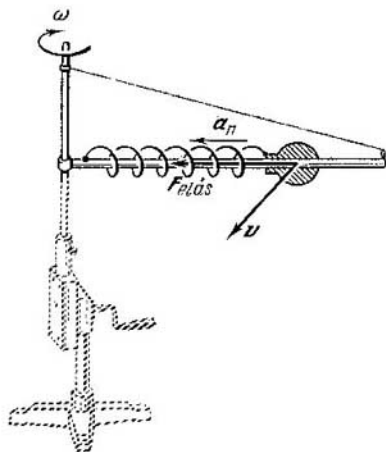


Fig. 7.2.

ción prefijada, la fuerza es proporcional a la masa del cuerpo al que comunica aceleración.

c) A velocidades mucho menores que la de la luz, dicha fuerza no depende de la velocidad de movimiento del cuerpo que se acelera.

3. Un resultado análogo se obtiene al estudiar el movimiento curvilíneo de un punto material, lo que vemos en el siguiente experimento. Una barra, con un peso y un muelle, se fija por un extremo en una máquina centrífuga y se pone en rotación alrededor de este eje (fig. 7.2). Advertiremos, que al girar el sistema el muelle se deforma y actúa sobre el cuerpo con una fuerza, que es función de la masa del cuerpo, la distancia desde el cuerpo al eje de rotación y la velocidad de rotación.

Este resultado es fácil de explicar. Cuando el cuerpo está en movimiento uniforme por una circunferencia, el módulo

de la velocidad queda constante, mientras que la dirección del vector de velocidad varía constantemente. A este respecto, ya hemos establecido (véase el § 4.8) que en semejante caso hay *aceleración normal* o bien *centrípeta*:

$$a_n = v^2/r = \omega^2 r.$$

Esta aceleración es comunicada al cuerpo por el muelle deformado.

Después de realizar experimentos con diversos cuerpos a diferentes velocidades de sus movimientos y a variadas distancias del cuerpo al eje de rotación, nos cercioramos de que al moverse el cuerpo, sobre él actúa una fuerza proporcional a la masa del cuerpo y a la aceleración centrípeta.

4. Al generalizar los resultados de los experimentos, que hemos examinado más arriba, llegamos a la conclusión: *la fuerza es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración que ella comunica a dicho cuerpo*:

$$F = ma. \quad (7.1)$$

Así se enuncia la segunda ley de Newton (o la ley fundamental de dinámica) para el caso cuando la velocidad de movimiento del cuerpo es mucho menor que la velocidad de la luz en el vacío.

5. La ley fundamental de dinámica puede ser escrita de otra forma, que con frecuencia resulta ser más cómoda. Según la definición  $a = dv/dt$ . Sustituyendo este valor en (7.1) y teniendo en cuenta que en la mecánica newtoniana la masa es invariante, obtenemos

$$F = m \frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}. \quad (7.2)$$

Se llama *cantidad de movimiento* (impulso o impulsión) el producto de la masa del cuerpo por su velocidad:

$$p = mv. \quad (7.3)$$

Entonces la ley fundamental de dinámica (7.2) puede ser enunciada del modo siguiente: *la fuerza es igual a la derivada de la cantidad de movimiento en el tiempo*:

$$F = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{dp}{dt} = p'(t). \quad (7.4)$$

Esta es la enunciación más general de la ley fundamental de dinámica.

6. Por fin, si sobre el cuerpo actúa cierto conjunto de fuerzas, cuya resultante es igual a  $R$ , la segunda ley de Newton se escribe de la manera siguiente:

$$R = ma = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt}. \quad (7.5)$$

Señalemos, que si el punto material está en movimiento uniforme por una circunferencia, la resultante de todas las fuerzas está dirigida al centro. En ocasiones, esta resultante, es llamada *fuerza centrípeta*.

## § 7.2. Aplicaciones de la ley fundamental de dinámica

1. Con ayuda de la ley fundamental de dinámica pueden ser determinadas las fuerzas aplicadas al cuerpo o bien, por las fuerzas profijadas, el carácter del movimiento del cuerpo. Por ejemplo, si fue preestablecida la ley de movimiento, podemos hallar la aceleración con la que el cuerpo se mueve. Conociendo la aceleración y la masa del cuerpo es fácil determinar la fuerza aplicada.!

Al confeccionar la ecuación de movimiento hay que hacer uso de la siguiente regla:

primero, es preciso hallar *todas* las fuerzas que actúan sobre el punto material dado (incluyendo las fuerzas de reacción);

después, calcular la resultante de estas fuerzas;

sobre la base de la ley fundamental de dinámica, hay que escribir que la resultante de todas las fuerzas es igual al producto de la masa por la aceleración.

La ecuación de movimiento confeccionada debe ser resuelta respecto de la magnitud buscada.

2. *Ejemplo 1.* Sobre el suelo de un ascensor está una persona, cuya masa es  $m$ . Determinar con qué fuerza presiona ésta contra el suelo del ascensor, si éste se mueve:

- verticalmente hacia arriba con aceleración;
- verticalmente hacia arriba con deceleración;
- verticalmente hacia abajo con aceleración;
- verticalmente hacia abajo con deceleración;
- uniformemente.

Como, en lo que se refiere al ascensor, la persona está en reposo, ésta se mueve con relación a la Tierra con la misma aceleración que el ascensor. Según la tercera ley de Newton, sabemos que el suelo del ascensor presiona sobre la persona

con la misma fuerza que ésta aprieta sobre el suelo, pero que las direcciones de dichas fuerzas son opuestas. Así, pues, sobre el hombre actúan dos fuerzas: la de la gravedad  $P$  y la reacción del suelo  $Q$ .

Dirijamos el eje  $z$  verticalmente hacia arriba. Entonces, la fuerza de la reacción es un vector positivo, mientras que la fuerza de la gravedad, es negativa. El signo del vector de aceleración depende del carácter del movimiento (fig. 7.3).

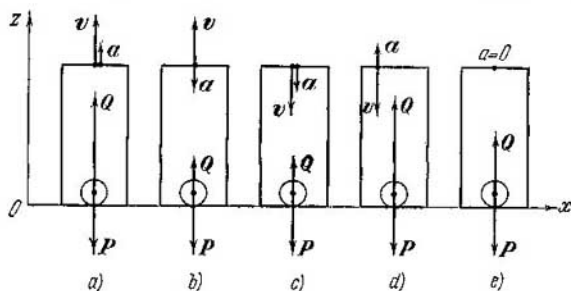


Fig. 7.3.

En el caso a), el vector de aceleración está dirigido verticalmente hacia arriba y, por lo tanto, es positivo; lo mismo resulta en el caso d), el vector de aceleración para el movimiento retardado está dirigido en sentido opuesto al vector de velocidad. En los casos b) y c) el vector de aceleración se dirige verticalmente hacia abajo.

La ecuación de movimiento en forma vectorial se escribe del modo siguiente:

$$P + Q = ma. \quad (7.6)$$

Para pasar a la anotación en forma escalar, hay que tomar en consideración los signos de los vectores. Para los casos a) y d):  $-P + Q = ma$ , de donde

$$Q = P + ma = m(g + a).$$

Para los casos b) y c):  $-P + Q = -ma$ , de donde

$$Q = m(g - a).$$



Por fin, para el caso e):  $-P + Q = 0$ , de donde  

$$Q = P.$$

3. Así, pues, si el ascensor se mueve con relación a la Tierra con aceleración  $y$ , por lo tanto, en un sistema *no inercial* de referencia, la fuerza con la que el cuerpo presiona sobre el apoyo (es decir, su peso) no es igual a la fuerza de la gravedad. En caso que la aceleración del ascensor esté dirigida en sentido inverso a la aceleración de caída libre, la fuerza de presión sobre el apoyo *es mayor* que la fuerza de la gravedad. Pero si la aceleración del ascensor coincide por su dirección con la de caída libre, la fuerza con la que el cuerpo presiona sobre el apoyo *es menor* que la fuerza de la gravedad. Con ello, si resulta que  $a = g$ , de (7.6) sigue que  $Q = 0$ , o sea, que el cuerpo no presiona por completo sobre el apoyo.

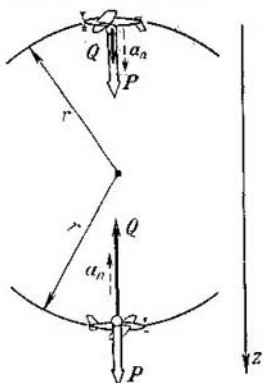


Fig. 7.4.

Sólo en el caso, cuando el ascensor se mueve uniformemente respecto de la Tierra ( $y$ , por lo tanto, es un sistema *inercial* de referencia), la fuerza de presión del cuerpo sobre el apoyo es igual a la fuerza de la gravedad.

4. *Ejemplo 2.* Un avión que se mueve a una velocidad  $v$ , riza en el plano vertical un rizo de radio  $r$ . ¿Con qué fuerza es presionado el piloto contra el asiento? ¿Con qué velocidad mínima el piloto se mantiene en el asiento? Considerar los puntos superior e inferior de la trayectoria.

En lugar de la fuerza con la que el piloto se ve apretado contra el asiento, hallaremos la fuerza de reacción numéricamente igual a ella, pero de dirección opuesta. Sobre el piloto actúan dos fuerzas: la reacción de asiento y la atracción de la Tierra. En el punto inferior la reacción está dirigida verticalmente hacia arriba, en el superior, verticalmente hacia abajo (fig. 7.4). Aunque el avión se mueve por la circunferencia de modo uniforme, la dirección del vector de velocidad cambia constantemente, por lo que la aceleración

$a_n = v^2/r$  es normal (centrípeta). En el punto inferior de la trayectoria está dirigida verticalmente hacia arriba, en el superior, hacia abajo. Para mayor comodidad, dirijamos el eje  $z$  en sentido vertical hacia abajo, a lo largo de la fuerza de la gravedad.

En forma vectorial, la ecuación de movimiento tiene la forma

$$P + Q = ma_n. \quad (7.7)$$

Para el punto inferior, en las proyecciones sobre el eje  $z$ , obtenemos  $P - Q = -\frac{mv^2}{r}$ , de donde

$$Q = P + \frac{mv^2}{r} = m \left( \frac{v^2}{r} + g \right).$$

Por consiguiente, aquí el piloto sufre sobrecarga. Para el punto superior  $P + Q = \frac{mv^2}{r}$ , de donde

$$Q = \frac{mv^2}{r} - P = m \left( \frac{v^2}{r} - g \right).$$

Como  $Q$  es el módulo de la fuerza de reacción, es decir, un número positivo, la magnitud  $v^2/r$  no puede ser menor que  $g$ . En consecuencia, el piloto se mantendrá en el asiento, si  $v^2/r \geq g$ . La velocidad mínima se halla de la condición

$$v_{\min} = \sqrt{gr}. \quad (7.8)$$

### § 7.3. Ingravidez

1. En el § 6.1 definimos el peso como la fuerza con la que el cuerpo actúa en el enlace a causa de la atracción de éste por la Tierra. En el párrafo anterior nos hemos cerciorado de que cuando, tocante a la Tierra, el cuerpo está inmóvil, su peso es igual a la fuerza de la gravedad.

El análisis de la solución del ejemplo 1 del párrafo anterior, nos lleva a la conclusión de que el peso también es igual a la fuerza de la gravedad, cuando el cuerpo se encuentra en un ascensor en movimiento rectilíneo uniforme respecto de la Tierra, es decir, en un sistema inercial de referencia. Por consiguiente, *el peso es igual a la fuerza de la gravedad en todo sistema inercial de referencia.*

Si, al contrario, el cuerpo está en un ascensor en movimiento acelerado, en lo que atañe a la Tierra, o en un avión

que se mueve por una circunferencia (o sea, también con aceleración en relación a la Tierra), la fuerza de presión contra el apoyo, es decir, el peso, ya no será igual a la fuerza de la gravedad.

Un sistema de referencia en movimiento acelerado acerca de un sistema inercial, es llamado sistema *no inercial* de referencia. Los fenómenos que transcurren en sistemas no inerciales de referencia, serán tratados en el cap. 24. Aquí nos limitaremos al análisis del sentido de dos conceptos: la ingravidez y las sobrecargas.

2. Examinemos con qué fuerza presiona sobre el apoyo un cosmonauta, ubicado en el sillón de una nave cósmica, durante el despegue, frenado y con el vuelo libre por la órbita.

Por la acción del cohete impulsor, la nave cósmica se mueve durante el despegue (lanzamiento) con aceleración. Este caso es análogo al descrito en el punto a) del párrafo anterior. Aquí, la fuerza, con la que el astronauta presiona sobre el apoyo, es mayor que la de la gravedad. En efecto, según la tercera ley de Newton, la fuerza con la que aprieta el cosmonauta sobre el apoyo  $Q = m(g + a)$ , mientras que la fuerza de la gravedad es igual a  $mg$ . El cosmonauta sufrirá *sobrecarga*, es decir, le parecerá que su peso ha aumentado.

El organismo de una persona entrenada puede aguantar, aproximadamente, una carga séxtupla, es decir  $F_{pr} \approx 6P$ . Esto significa, que la aceleración de la nave cósmica no debe sobrepasar el valor quíntuplo de la aceleración de caída libre. Efectivamente, de la desigualdad  $m(g + a) \leq 6mg$  se desprende que  $a \leq 5g$ .

3. Basándose en los resultados de la solución del punto d) del párrafo anterior, dejemos que el lector muestre que durante el frenado de la nave cósmica surgen las mismas cargas (sobrecargas) que al despegar.

4. Si la nave cósmica gira por una órbita alrededor de la Tierra, la aceleración de aquélla es igual a la de caída libre:  $a = g$ . En este caso, de (7.6) se deduce que  $Q = 0$ . El cosmonauta no presiona contra el apoyo y tendrá la sensación de «haber perdido el peso».

Así, pues, *el estado de ingravidez surge en el caso cuando el sistema no inercial* (en nuestro caso, nave cósmica), *se mueve con relación a la Tierra con aceleración  $a = g$ .*

Señalemos, que semejante valor de la aceleración no predice aún el carácter del movimiento. Este puede ser rec-

tilíneo, si con el despegue o aterrizaje verticales el motor del cohete está desconectado, o bien curvilíneo, cuando la nave cósmica se mueve por una órbita alrededor de la Tierra, aquí la aceleración será centrípeta. Para que surja la ingravidez, la forma de la trayectoria no juega ningún papel. Sólo tiene importancia que la nave se mueva con aceleración  $a = g$ .

#### § 7.4. Sistema de unidades

1. Como hemos indicado más arriba, las unidades de medida de cualquier magnitud física pueden ser elegidas de forma arbitraria. La única condición necesaria consiste en la *homogeneidad* de la unidad de medida y de la propia magnitud: como unidad de longitud puede servir la largura de cierta barra sólida, como unidad de velocidad, la de cualquier movimiento uniforme, etc. Sin embargo, semejante arbitrariedad para la elección de las fórmulas que ligan ciertas magnitudes mediante dependencias funcionales, aparecen coeficientes numéricos.

Por ejemplo, es conocido que el área del rectángulo es proporcional a su longitud y altura:

$$S = \alpha lh,$$

donde  $S$  es el área,  $l$ , la longitud,  $h$ , la altura y  $\alpha$ , coeficiente que depende de la elección de las unidades. Si la unidad de longitud y altura es el metro y el área, una hectárea,  $\alpha = 0,0001$ ; entonces  $S = 0,0001 lh$ . No obstante, es más factible tomar como unidad de área, la de un cuadrado cuyo lado es igual a la unidad de longitud. Si la longitud se mide en metros, el área será medida en metros cuadrados y la expresión buscada tomará la forma más sencilla:

$$S = lh.$$

Así, pues, *es conveniente elegir las unidades de las magnitudes físicas de tal forma que estén ligadas entre sí por las mismas correlaciones que las magnitudes que se miden*. Esto permite reducir notablemente el número de coeficientes que entran en las fórmulas y que expresan las correlaciones entre las magnitudes físicas.

El conjunto de unidades, confeccionado de acuerdo con la regla indicada, se denomina *sistema de unidades*.

2. Todas las unidades que forman un sistema determinado, se dividen en dos clases:

*Unidades básicas* (fundamentales), establecidas de forma arbitraria e independientes unas de otras. Las unidades fundamentales se determinan por medio de modelos (patrones).

*Unidades complementarias* (derivadas) que se expresan por mediación de las fundamentales, con ayuda de las leyes físicas correspondientes.

Por ejemplo, la unidad de longitud es básica, mientras que la del área, derivada.

La *dimensión* de la magnitud física  $B$  es la correlación que determina el enlace entre la unidad de esta magnitud  $[B]$  y las unidades básicas  $[A_1]$ ,  $[A_2]$ ,  $[A_3]$ , ... del sistema dado. Las fórmulas de dimensión tienen la forma

$$[B] = [A_1]^{n_1} \cdot [A_2]^{n_2} \cdot [A_3]^{n_3} \dots$$

Por regla, se tiende a disminuir el número de las unidades básicas, pero esto no siempre es cómodo en la práctica. Por esta razón, al confeccionar el sistema de unidades hay que tener en cuenta las necesidades de la técnica de medida y las tradiciones históricas.

## § 7.5. Sistema Internacional de Unidades

1. En junio de 1978, la Comisión Permanente de estandarización aprobó el Estándar CAME 1052—78 «Metrología. Unidades de magnitudes físicas», de acuerdo con el cual las unidades del Sistema Internacional deben ser obligatoriamente aplicadas en todas las ramas de las ciencias, la técnica, economía nacional y en la enseñanza. En la Unión Soviética, el empleo obligatorio de las unidades SI fue ordenado por la disposición de GOSSTANDART\*/de la URSS a partir del 1 de enero de 1980.

El sistema internacional de unidades (SI) es el conjunto de unidades de las magnitudes físicas, correctamente confeccionado y en interacción, que consta de siete unidades básicas, dos complementarias y de gran cantidad de derivadas.

*Unidades básicas:*

metro (m)—unidad de longitud;

kilogramo (kg)—unidad de masa;

segundo (s)—unidad de tiempo;

---

\* Comité de Normas y Estándares de la URSS (N. del T.)

amperio (A)—unidad de intensidad de corriente eléctrica (§ 41.9);

kelvin (K)—unidad de temperatura termodinámica (§§ 26.7, 36.6);

mol (mol)—unidad de cantidad de materia (§ 26.9);

candela (cd)—unidad de intensidad luminosa (§ 66.1).

*Unidades complementarias:*

radián (rad)—unidad de ángulo plano;

estereorradián (sr)—unidad de ángulo sólido (§ 66.1).

2. Las unidades derivadas para medir magnitudes mecánicas se determinan de la forma siguiente:

la unidad de velocidad—metro por segundo (m/s)— es la velocidad de movimiento uniforme de un punto material, que cubre el espacio de un metro en el transcurso de un segundo;

la unidad de aceleración —metro por segundo cuadrado (m/s<sup>2</sup>)— es la aceleración del movimiento uniformemente variado de un punto material, cuya velocidad varía en 1 m/s en el transcurso de 1 s;

la unidad de fuerza —newton (N)— es la fuerza que a una masa igual a 1 kg comunica una aceleración igual a 1 m/s<sup>2</sup>.

Las unidades de las demás magnitudes serán determinadas en la medida de su utilización.

3. A las unidades básicas, es decir, a la longitud, masa, el tiempo, la intensidad de corriente eléctrica, temperatura termodinámica, cantidad de materia e intensidad luminosa, se les atribuye la dimensión L, M, T, I,  $\Theta$ , N, J. Las dimensiones de las unidades derivadas se confeccionan sobre la base de las fórmulas que se utilizan para determinar las correspondientes magnitudes derivadas, por ejemplo:

$[v] = [l/t] = LT^{-1}$ ,  $[a] = [v/t] = LT^{-2}$ ,  $[F] = [ma] = MLT^{-2}$ ,  $[\rho] = [m/V] = L^{-3}M$ , etc.

Tabla 7.1

Factor	Prefijo	Designación	Factor	Prefijo	Designación
10 <sup>12</sup>	tera	T	10 <sup>-3</sup>	mili	m
10 <sup>9</sup>	giga	G	10 <sup>-6</sup>	micro	$\mu$
10 <sup>6</sup>	mega	M	10 <sup>-9</sup>	nano	n
10 <sup>3</sup>	kilo	k	10 <sup>-12</sup>	pico	p

4. Para la formación de unidades decimales múltiples y fraccionales se hace uso de un sistema de prefijos decimales, cada uno de los cuales corresponde a un factor del tipo  $10^n$ , donde  $n$  es un número entero. Los prefijos que más se utilizan están aducidos en la tabla 7.1.

Por ejemplo, 1 nm (nanómetro) =  $10^{-9}$  m, 1 Gm (gigmetro) =  $10^9$  m;  $1\mu\text{s}$  (microsegundo) =  $10^{-6}$  s, 1 MN (meganeutron) =  $10^6$  N, 1 mg (miligramo) =  $10^{-3}$  g, 1.Mg (megagramo) =  $10^6$  g = 1 t, etc.

## Capítulo 8

### LEY DE MOVIMIENTO DE UN PUNTO MATERIAL Y CONDICIONES INICIALES

#### § 8.1. Problema fundamental de dinámica

1. Muchos problemas de astronomía, transporte, artillería y de otra serie de ámbitos de las ciencias y la técnica se enuncian del modo siguiente: hay un cuerpo que puede ser considerado como punto material (por ejemplo, un planeta, proyectil, cohete, etc.); son conocidas las fuerzas aplicadas a este cuerpo. Hay que hallar la ley de movimiento del punto, es decir, expresar sus coordenadas en forma de determinadas funciones del tiempo.

Este es el problema fundamental de dinámica que, en forma breve, se enuncia así: *determinar la ley de movimiento de un punto material, si son conocidas las fuerzas aplicadas a él.*

Para su solución, primeramente, con ayuda de la ley fundamental de dinámica (segunda ley de Newton), se halla la aceleración con la que se mueve el punto material. A continuación, mediante las conocidas fórmulas de cinemática, son buscadas las expresiones para las velocidades y coordenadas.

2. Las dificultades matemáticas que surgen al resolver los problemas en forma general, pueden resultar muy considerables. Al mismo tiempo, la resolución particular de cualquier problema puede ser obtenida por métodos numéricos aproximadamente, pero con el grado de precisión prefijado de antemano.

Dos sencillos problemas serán considerados más adelante. Uno de ellos, en forma general, el segundo, por métodos numéricos. Tomándolos como ejemplo, trataremos de aclarar qué es preciso conocer para poder resolver el problema fundamental de dinámica.

La solución precisa del problema podrá ser obtenida sólo en el caso más sencillo, al calcular el movimiento del cuerpo al aplicar una *fuerza constante*. En lo que atañe a los métodos numéricos, éstos son aptos para resolver todo problema, pero siempre requieren gran cantidad de cálculos matemáticos. En la actualidad, semejantes cálculos son realizados en computadores digitales de acción rápida, que con facilidad resuelven los problemas dados, claro está con la correspondiente programación.

### § 8.2. Movimiento de un punto material bajo la acción de la fuerza de la gravedad

1. Sea que sobre un punto material en movimiento, salvo la fuerza de la gravedad, no está aplicada ninguna otra fuerza. Este podría ser, por ejemplo, un cuerpo en la Luna,

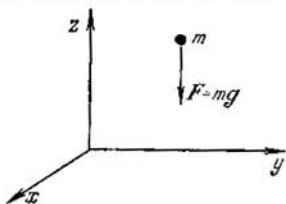


Fig. 8.1.

donde no hay atmósfera. Por cierto, que con suficiente aproximación esto puede también transcurrir en la Tierra, si la velocidad del punto no es mayor que varios metros por segundo, ya que a tales velocidades puede despreciarse la resistencia del aire.

Vamos a considerar que el sistema de referencia relacionado con la Tierra es inercial y elegir los ejes de coordenadas como se muestra en la fig. 8.1. La expresión para la fuerza aplicada sobre el punto material, se escribe así:

$$F = P = mg, \quad (8.1)$$

o en las proyecciones sobre los ejes de coordenadas

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg. \quad (8.2)$$



La ley fundamental de dinámica toma la forma

$$F_x = ma_x = 0, \quad F_y = ma_y = 0, \quad F_z = ma_z = -mg. \quad (8.3)$$

Por consiguiente, las proyecciones de la aceleración en los ejes de coordenadas serán:

$$a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad a_z = -g. \quad (8.4)$$

2. Ahora ya no nos es difícil hallar la ley de movimiento. A lo largo del eje de abscisas el punto se mueve sin aceleración, o sea, uniformemente. En tal caso, la velocidad del punto queda constante, en tanto que su coordenada, es una función lineal del tiempo (véase el § 1.4):

$$v_x = u_0 = \text{const}, \quad x = x_0 + u_0 t. \quad (8.5)$$

Por analogía, para el eje de ordenadas

$$v_y = w_0 = \text{const}, \quad y = y_0 + w_0 t. \quad (8.6)$$

Por fin, a lo largo del eje de la coordenada  $z$ , el punto está en movimiento con aceleración constante. Entonces (véanse los §§ 4.3—4.6) su velocidad es función lineal del tiempo, mientras que su coordenada, una función cuadrática del tiempo:

$$\begin{aligned} v_z = v_0 + a_z t = v_0 - gt, \quad z = z_0 + v_0 t + \frac{a_z t^2}{2} = \\ = z_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

3. Así, pues, hemos hallado la ley de movimiento. Tiene la forma

$$x = x_0 + u_0 t; \quad y = y_0 + w_0 t, \quad z = z_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (8.8)$$

En (8.8) antes de la aceleración hemos obtenido el signo menos, mientras que en (4.8) teníamos el signo más. Esto está relacionado con la dirección del eje de la coordenada  $z$ : en (4.8) la aceleración está dirigida a lo largo del eje  $z$ , aquí la dirección del vector de aceleración es opuesta.

En la expresión para la ley de movimiento han entrado seis constantes arbitrarias: *las coordenadas iniciales*  $x_0, y_0, z_0$  y *las velocidades iniciales*  $u_0, w_0, v_0$ , que determinan la posición y la velocidad de movimiento del punto material en el momento de tiempo  $t = 0$ , que hemos tomado como inicial.

4. El sistema de ecuaciones (8.5)—(8.8) describe todos los posibles casos de movimiento del punto bajo la acción de la fuerza de la gravedad. Para obtener cierta solución particular, hay que indicar condiciones iniciales concretas.

Sea que el punto ha sido lanzado desde el origen de coordenadas a la velocidad  $V_0$  bajo un ángulo  $\alpha$  respecto del horizonte, con la particularidad de que el vector de la velocidad inicial yace en el plano  $yz$  (fig. 8.2). Entonces las condiciones iniciales toman la forma

$$u_0 = 0, \quad w_0 = V_0 \cos \alpha, \quad v_0 = V_0 \sin \alpha. \quad (8.9)$$

La ley de movimiento tiene la forma:

$$x = 0, \quad y = V_0 t \cos \alpha, \\ z = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (8.10)$$

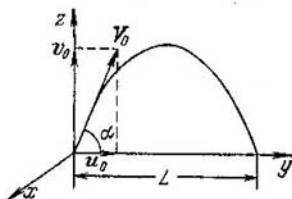


Fig. 8.2.

Mostremos que el punto se mueve por una parábola que yace en el plano vertical. En efecto, de (8.10) se desprende:  $t = y/(V_0 \cos \alpha)$ . Sustituyendo este valor de  $t$  en la tercera ecuación, obtenemos

$$z = y \operatorname{tg} \alpha - \frac{gy^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (8.11)$$

Como vemos, esta es la ecuación de una parábola en forma general. El alcance del vuelo será obtenido haciendo en (8.11)  $z = 0, y = L$ ; entonces

$$L = \frac{2V_0^2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (8.12)$$

El alcance máximo del vuelo es conseguido al lanzar el cuerpo bajo un ángulo  $\alpha = 45^\circ$  respecto al horizonte; aquí  $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1$ .

5. Recomendamos al lector que obtenga de modo independiente las expresiones para dos casos particulares:

a) Un cuerpo que se encuentra a cierta altura  $h$  de la Tierra, es lanzado en dirección horizontal a una velocidad inicial  $u_0$ . Hallar la ley de movimiento; la trayectoria; alcance del vuelo.

b) Un cuerpo ha sido lanzado verticalmente hacia arriba desde el origen de coordenadas a una velocidad inicial  $v_0$ . Hallar la ley de movimiento; la trayectoria; la altura máxima de elevación y el tiempo necesario para esto.

### § 8.3. Solución numérica del problema fundamental de dinámica

1. En el párrafo anterior hemos conseguido hallar, de forma muy sencilla, la ley general de movimiento sólo por la causa de que sobre el punto estaba aplicada una fuerza constante. Si, al contrario, sobre el punto actúa una fuerza variable, la ley general de movimiento sólo puede ser hallada por métodos de matemática superior. Sin embargo, la solución particular, cuando las condiciones iniciales son concretas, siempre puede ser obtenida por métodos numéricos. En semejante caso, la solución se reduce a operaciones aritméticas del tipo más elemental, pero muy largas.

2. Durante los cálculos hay que partir de los siguientes razonamientos. La aceleración media en el transcurso de cierto intervalo de tiempo  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$  se determina de la correlación (§ 4.1)

$$a_m = \frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t},$$

Suponiendo (para  $\Delta t$  pequeño) que la aceleración media poco se diferencia de la instantánea en el momento final  $t = t_n$ , aproximadamente, tenemos

$$v_n \approx v_{n-1} + a_n \Delta t. \quad (8.13)$$

Para la velocidad media  $\bar{v}_n$  obtenemos una fórmula análoga

$$\bar{v}_n \approx \bar{v}_{n-1} + a_n \Delta t, \quad (8.14)$$

donde la velocidad media

$$\bar{v}_n \approx \frac{v_n + v_{n-1}}{2}.$$

Pero según la definición (§ 1.6) la velocidad media

$$\bar{v}_n = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t};$$

de donde sigue:

$$x_n = x_{n-1} + v_n \Delta t. \quad (8.15)$$

Ahora ya tenemos todo lo necesario para el cálculo numérico de la ley de movimiento. En realidad, sea que conozcamos la coordenada y la velocidad de un punto en cierto momento inicial; la aceleración será hallada por medio de la ley fundamental de dinámica. Con ayuda de la fórmula (8.13) calcularemos la velocidad al pasar el tiempo  $\Delta t$ , en tanto que por la fórmula (8.15), la coordenada. Tomando estos nuevos valores de la velocidad y la coordenada como iniciales y haciendo uso de las mismas fórmulas daremos un paso más, etc. Al hacer un número finito de pasos obtendremos la velocidad y la coordenada en el momento necesario de tiempo.

Como es natural, mientras menor sea  $\Delta t$ , de mayor precisión será el resultado. Pero esto exigirá el aumento de la cantidad de cálculos.

#### § 8.4. Movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza elástica

1. Con el ejemplo del movimiento de un punto material bajo la acción de una fuerza elástica, vamos a ilustrar la aplicación del método numérico para resolver el problema fundamental de dinámica.

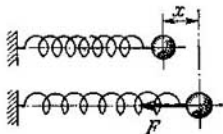


Fig. 8.3.

Sea que sobre un punto material está aplicada la fuerza elástica  $F = -kx$  (fig. 8.3). Entonces, la ecuación fundamental de dinámica tiene la forma

$$-kx = ma, \quad (8.16)$$

o bien en las proyecciones sobre los ejes de coordenadas

$$-kx = ma_x, \quad 0 = ma_y, \quad 0 = ma_z. \quad (8.17)$$

Supongamos que  $y_0 = z_0 = 0$  y  $w_0 = u_0 = 0$ ; por consiguiente, el punto material sólo se mueve por el eje de abscisas con una aceleración

$$a_x = a = -\frac{k}{m} x. \quad (8.18)$$

Para la solución numérica del problema, hay que profijar cierto valor concreto de la constante  $k/m$ , la coordenada  $x_0$  y la velocidad inicial  $v_0$ . Sea

$$k/m = 2,467 = \pi^2/4; \quad x_0 = 1,000; \quad v_0 = 0. \quad (8.19)$$

Realicemos el cálculo, suponiendo que  $\Delta t = 0,1$  s.

De (8.18) se deduce que la aceleración en el transcurso del primer intervalo de tiempo es aproximadamente  $a_0 = -2,467 \cdot x_0 = -2,467$ .

La velocidad final después de  $\Delta t = 0,1$  s

$$v_0^{\text{fin}} = v_0 + a_0 \Delta t = -2,467 \cdot 0,1 = -0,2467.$$

Tabla 8.1

$t$	$x$	$a = -2,467 \text{ m/s}^2$	$v$	Cálculos
0,0	1,000	-2,467	-0,123	$v_0 = 0$ $v_0^{\text{fin}} = v_0 + a_0 \Delta t = -0,246$
0,1	0,988	-2,437	-0,367	$x_1 = x_0 + \bar{v}_0 \Delta t = 1,000 - 0,012 = 0,988$ $\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + a_1 \Delta t = -0,123 - 0,244 = -0,367$
0,2	0,951	-2,347	-0,602	$x_2 = x_1 + \bar{v}_1 \Delta t = 0,988 - 0,037 = 0,951$ $\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + a_2 \Delta t = -0,367 - 0,235 = -0,602$
0,3	0,891	-2,199	-0,822	$x_3 = x_2 + \bar{v}_2 \Delta t = 0,951 - 0,060 = 0,891$ $\bar{v}_3 = \bar{v}_2 + a_3 \Delta t = -0,602 - 0,220 = -0,822$
0,4	0,809	-1,996	-1,022	$x_4 = x_3 + \bar{v}_3 \Delta t = 0,891 - 0,082 = 0,809$ $\bar{v}_4 = \bar{v}_3 + a_4 \Delta t = -0,822 - 0,200 = -1,022$
0,5	0,707	-1,743	-1,196	$x_5 = x_4 + \bar{v}_4 \Delta t = 0,809 - 0,102 = 0,707$ $\bar{v}_5 = \bar{v}_4 + a_5 \Delta t = -1,022 - 0,174 = -1,196$
0,6	0,587	-1,450	-1,341	$x_6 = x_5 + \bar{v}_5 \Delta t = 0,707 - 0,120 = 0,587$ $\bar{v}_6 = \bar{v}_5 + a_6 \Delta t = -1,196 - 0,145 = -1,341$
0,7	0,453	-1,120	-1,453	$x_7 = x_6 + \bar{v}_6 \Delta t = 0,587 - 0,134 = 0,453$ $\bar{v}_7 = \bar{v}_6 + a_7 \Delta t = -1,341 - 0,112 = -1,453$
0,8	0,308	-0,722	-1,525	$x_8 = x_7 + \bar{v}_7 \Delta t = 0,453 - 0,145 = 0,308$ $\bar{v}_8 = \bar{v}_7 + a_8 \Delta t = -1,453 - 0,072 = -1,525$
0,9	0,156	-0,380	-1,563	$x_9 = x_8 + \bar{v}_8 \Delta t = 0,308 - 0,152 = 0,156$ $\bar{v}_9 = \bar{v}_8 + a_9 \Delta t = -1,525 - 0,038 = -1,563$
1,0	0,000	0,000	-1,563	$x_{10} = x_9 + \bar{v}_9 \Delta t = 0,156 - 0,156 = 0,000$ $\bar{v}_{10} = \bar{v}_9 + a_{10} \Delta t = -1,563 - 0,000 = -1,563$
1,1	-0,156	0,380	-1,525	$x_{11} = x_{10} + \bar{v}_{10} \Delta t = 0,000 - 0,156 = -0,156$ $\bar{v}_{11} = \bar{v}_{10} + a_{11} \Delta t = -1,563 + 0,038 = -1,525$
1,2	-0,308	0,722	-1,453	$x_{12} = x_{11} + \bar{v}_{11} \Delta t = -0,156 - 0,152 = -0,308$ $\bar{v}_{12} = \bar{v}_{11} + a_{12} \Delta t = -1,525 + 0,072 = -1,453$

En este mismo intervalo de tiempo, la velocidad media

$$\bar{v}_0 = \frac{v_0 + v_0^{\text{fin}}}{2} = \frac{0 - 0,2467}{2} = -0,1234.$$

La coordenada del punto al final del intervalo

$$x_1 = x_0 + \bar{v}_0 \Delta t = 1,000 - 0,1234 \cdot 0,1 = 0,988.$$

De modo análogo, los cálculos pueden continuarse (tabla 8.1).

2. Después de  $t = 1$  s no tiene sentido continuar los cálculos, ya que desde este momento de tiempo, los valores de la coordenada  $x$  se repiten, pero con signo opuesto. Por lo tanto, para  $t = 2$  s la coor-

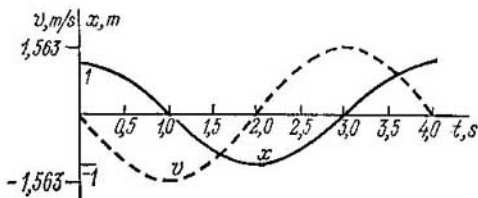


Fig. 8.4.

denada tomará el valor  $x = -1$ ; para  $t = 3$  s, el valor  $x = 0$ . Por fin, para  $t = 4$  s, la coordenada y la velocidad tendrán los mismos valores que para  $t = 0$ .

La gráfica de dependencia de la coordenada del punto del tiempo (fig. 8.4) mucho se parece a la gráfica de la función  $x = A \cos \omega t$ , donde  $\omega = \sqrt{k/m}$ . En la misma figura está representada la gráfica de la velocidad instantánea del punto, muy parecida a la gráfica de la función  $v = B \sin \omega t$ . En efecto, la solución exacta de este problema (§ 49.1) nos lleva al siguiente resultado:

$$x = \cos \frac{\pi}{2} t, \quad v = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t. \quad (8.20)$$

Si expresamos el ángulo variable  $\alpha = (\pi/2) t$  no en radianes sino en grados, en las tablas de funciones trigonométricas hallaremos los valores de la expresión (8.20) y los comparamos con los resultados de nuestros cálculos (tabla 8.2). Entonces hay que tener en cuenta, que la fórmula (8.20) nos ofrece los valores *instantáneos* de la velocidad al comienzo de cada intervalo de tiempo, en tanto que nosotros hemos calculado *el valor aproximado de la velocidad media* en el transcurso de dicho intervalo.

Notemos, que en realidad, durante el cálculo numérico hemos obtenido los datos dividiendo el intervalo de tiempo en 100 y no en 10 partes y en la tabla se aducen valores redondeados. Vemos muy buena coincidencia de los datos teóricos y calculados para las coordenadas.

Tabla 8.2

t, s	$\alpha = \frac{\pi}{2} t = 90^\circ t$	Datos teóricos		Datos calculados	
		$x = \cos \frac{\pi}{2} t$	$v = -\frac{\pi}{2} \times \times \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t$	x	v
0	0	1,0000	0,0000	1,000	-0,123
0,1	9°	0,9877	-0,2457	0,988	-0,367
0,2	18°	0,9544	-0,4854	0,951	-0,602
0,3	27°	0,8910	-0,7131	0,891	-0,822
0,4	36°	0,8090	-0,9233	0,809	-1,022
0,5	45°	0,7071	-1,1107	0,707	-1,196
0,6	54°	0,5878	-1,2708	0,587	-1,341
0,7	63°	0,4540	-1,3996	0,453	-1,453
0,8	72°	0,3090	-1,4938	0,308	-1,525
0,9	81°	0,1564	-1,5515	0,156	-1,563
1,0	90°	0,0000	-1,5708	0,000	-1,563
1,1	99°	-0,1564	-1,5515	-0,156	-1,525

3. El movimiento del punto material bajo la acción de una fuerza elástica se llama *oscilación armónica*. Este tipo de movimiento será examinado con detalle en el capítulo 49.

### § 8.5. Magnitudes que determinan la ley de movimiento de un punto material

1. En el ejemplo de los problemas estudiados en los párrafos anteriores, nos hemos cerciorado que para definir la ley de movimiento de un punto material se requieren los siguientes datos:

a) debe ser conocida *la fuerza* aplicada, prefijada como función del tiempo o de las coordenadas;

b) han de ser conocidas *las condiciones iniciales*: las coordenadas y la velocidad del punto en cierto momento de tiempo. (En lugar de la velocidad inicial puede ser preestablecida la cantidad de movimiento  $p_0 = mv_0$ .)

Si estas magnitudes son conocidas, siempre es posible hallar la ley de movimiento de un punto, o sea, expresar sus coordenadas en forma de una función del tiempo, lo que a su vez nos permite predecir su conducta en cualquier momento de tiempo, precedente o posterior.

Por ejemplo, sabiendo cuáles son las fuerzas de interacción entre el Sol y los planetas, así como las coordenadas y la velocidad de éstas en cierto lapso (es decir, las condiciones

iniciales), podemos predecir el estado de su movimiento tanto en tiempos remotos, como en el futuro. En particular, se pueden pronosticar tales fenómenos como los eclipses de Sol o de Luna, las oposiciones de la Tierra y Marte (o sea, los momentos de tiempo, cuando la distancia entre estos planetas es mínima), etc.

Conociendo la velocidad de un cohete cósmico y sus coordenadas en cierto momento de tiempo, así como las fuerzas sobre él aplicadas, podemos calcular su trayectoria; determinar en dónde se encontrará en cualquier lapso; pronosticar el tiempo y las coordenadas del punto de aterrizaje.

2. Si resulta que el movimiento real de un punto material no coincide con el calculado, esto significa que las condiciones iniciales han sido definidas incorrectamente o que la fuerza ha sido profijada de forma errónea. Por el grado de divergencia entre la trayectoria calculada y real consíguese, por regla, determinar también el valor del error realizado. Examinemos, como ejemplo, la historia del descubrimiento de Neptuno y Plutón.

El astrónomo inglés W. Herschel construyó en 1781 un telescopio que, para aquellos tiempos, era enorme. Con su ayuda él descubrió un nuevo planeta, el séptimo, que fue llamado Urano. Tomando en consideración el influjo sobre Urano del Sol y los demás planetas del Sistema Solar, entonces conocidos (Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno), fue hallada su ley de movimiento y definida su trayectoria en la bóveda celeste. Pero resultó que ésta era errónea: Urano se movía por otra curva. Como las condiciones iniciales también habían sido elegidas correctamente, la única suposición lógica era que no se tomaron en consideración todas las fuerzas aplicadas a Urano.

El científico francés Leverrier y el inglés Adams, independientemente uno de otro, enunciaron la suposición de que tras Urano debe encontrarse otro planeta, que nadie había observado. De acuerdo con la desviación de la trayectoria de Urano de la real, los científicos pudieron determinar la ley de movimiento del desconocido planeta y predecir en qué punto de la bóveda celeste puede ser hallado en uno u otro momento de tiempo. El experimento confirmó de forma brillante sus cálculos: el astrónomo alemán Galle dirigió su telescopio a ese punto del cielo y en 1846 descubrió que en realidad allí había un planeta que, posteriormente, fue llamado Neptuno.



A principios del siglo XX el astrónomo estadounidense Lowell, teniendo en cuenta los resultados de observaciones más precisas, llegó a la conclusión de que las divergencias entre la trayectoria calculada de Urano y el carácter real de su movimiento no pueden ser explicadas sólo por el influjo de Neptuno, de que tras éste hay otro planeta, el noveno. En 1930, ya después de la muerte de Lowell, en el observatorio fundado por él, el astrónomo C. Tombaugh descubrió dicho planeta, llamado Plutón.

Así, pues, en el ejemplo de una serie de problemas de mecánica newtoniana, nos hemos convencido de que *la fuerza y las condiciones iniciales determinan por completo la ley de movimiento del punto material.*

El desarrollo posterior de las ciencias ha mostrado que en el micromundo es imposible la prefijación de las condiciones iniciales, aplicable en la mecánica newtoniana (véase el cap. 14).

## Capítulo 9

# GRAVITACIÓN

### § 9.1. Descubrimiento de la ley de gravitación

1. A principios del siglo XVII la mayoría de los científicos se cercioró definitivamente de la justeza del sistema heliocéntrico del universo. Según este sistema, que fue propuesto por Nicolás Copérnico, la Tierra y los demás planetas están en movimiento alrededor del Sol, que es el centro de nuestro sistema planetario. No obstante, los científicos de aquel tiempo no comprendían con claridad tanto las leyes de movimiento de los planetas, como las causas que determinaban el carácter de su movimiento.

Después de estudiar los resultados de las extensas observaciones realizadas por Tycho Brahe y por él mismo, Juan Kepler obtuvo las leyes de movimiento de los planetas alrededor del Sol. El sabio comprendía que para explicar estas leyes había que hallar las fuerzas que actúan sobre los planetas. Sin embargo, ni él ni sus contemporáneos, consiguieron resolver este problema. Sólo el genial inglés Isaac Newton pudo resolverlo y exponerlo en su obra «Fundamen-

tos Matemáticos de la filosofía natural» (en aquel tiempo la física se denominaba filosofía natural), editada en 1687.

2. Con la primera aproximación podemos considerar que los planetas están en movimiento casi uniforme por órbitas que poco se diferencian de las circunferencias. Pero durante el movimiento de un punto material por una circunferencia hay aceleración normal (centrípeta), dirigida al centro de la órbita, donde se encuentra el Sol. De la ley fundamental de dinámica se desprende que la aceleración es provocada por cierta fuerza. Así, pues, el Sol actúa sobre cada planeta con una fuerza dirigida hacia su centro. Como se deduce de la tercera ley de Newton, el planeta también actúa sobre el Sol con la misma fuerza, pero dirigida en sentido opuesto.

3. Es sabido que la Luna gira alrededor de la Tierra. Es evidente que las fuerzas de atracción también existen entre ellas: la Luna es atraída por la Tierra, y ésta, por la Luna.

Newton presentó la suposición decisiva de que la fuerza de la gravedad, que actúa sobre los cuerpos en las proximidades de la superficie terrestre, y la fuerza con que la Tierra atrae la Luna, son de igual origen. Con este fin, él comparó la aceleración de caída libre y la aceleración normal, con la que la Luna se mueve por su órbita.

Esta aceleración puede ser calculada, partiendo de los siguientes razonamientos. La distancia de la Tierra a la Luna  $r = 384\,403 \text{ km} = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$ ; el período de revolución  $T = 27,322 \text{ días} = 27,3 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}$ . La velocidad orbital  $v = 2\pi r/T$ , y la aceleración normal:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 3,84 \cdot 10^8}{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2. \quad (9.1)$$

Como vemos, la aceleración normal de la Luna y de caída libre se diferencian grandemente entre sí por su valor. No obstante, Newton explicó la divergencia entre estas magnitudes, suponiendo que *la fuerza de gravitación decrece al aumentar la distancia entre los cuerpos en interacción según cierta ley, que ahora hallaremos*. Efectivamente, la aceleración de caída libre es igual a  $9,81 \text{ m/s}^2$  cerca de la superficie de la Tierra, es decir, cuando la distancia desde el cuerpo atraído hasta el centro de la Tierra es igual a su radio medio ( $R = 6371 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ ); la aceleración normal de la Luna fue obtenida para un punto en su órbita, cuando la distancia entre los cuerpos en interacción era igual al radio de la órbi-

ta lunar  $r = 3,84 \cdot 10^8$  m. Confeccionemos la correlación

$$\frac{g}{a_n} = \left( \frac{r}{R} \right)^n, \quad (9.2)$$

después de lo cual es posible definir el exponente desconocido. Introduciendo los valores de las distancias y las aceleraciones, obtenemos

$$\frac{9,81}{2,72 \cdot 10^{-3}} = \left( \frac{3,84 \cdot 10^8}{6,37 \cdot 10^6} \right)^n,$$

o bien  $3600 = 60^n$ , de donde  $n = 2$ .

Así, pues, la aceleración provocada por la fuerza de gravitación decrece inversamente proporcional al cuadrado de la distancia: siendo  $n = 2$ , de (9.2) se deduce que

$$a_n = \frac{gR^2}{r^2} = \frac{K}{r^2}, \quad (9.3)$$

donde  $K$  es cierta magnitud constante.

## § 9.2. Ley de gravitación universal

1. Los resultados obtenidos por Newton al analizar la aceleración normal que surge al girar la Luna alrededor de la Tierra, hicieron que llegara a la deducción de que en la naturaleza todos los cuerpos se atraen mutuamente con cierta fuerza de gravitación, con la particularidad de que la aceleración provocada por esta fuerza, decrece inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los cuerpos en interacción.

Sea que dos cuerpos de masa  $m_1$  y  $m_2$  están a una distancia  $r$  el uno del otro. Las fuerzas de interacción entre ellos  $F_1 = m_1 a_1$  y  $F_2 = m_2 a_2$ , siendo  $F_1 = F_2$ , según la tercera ley de Newton. Teniendo en cuenta (9.3), obtenemos

$$\frac{m_1 K_1}{r^2} = \frac{m_2 K_2}{r^2}. \quad (9.4)$$

Esta igualdad será válida si hacemos  $K_1 = \gamma m_2$  y  $K_2 = \gamma m_1$ , donde  $\gamma$  es cierta magnitud constante. Entonces

$$F = m_1 a_1 = \frac{m_1 K_1}{r^2} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Enunciemos la ley de gravitación del modo siguiente:

*La fuerza de gravitación entre dos cuerpos (puntos materiales) es directamente proporcional al producto de sus masas e in-*

versamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (9.5)$$

Las consideraciones expuestas más arriba, no pueden considerarse de ninguna manera como la deducción de la ley de gravitación. Sólo pueden servir como ilustración de los razonamientos del propio Newton.

Para la comprobación experimental de esta ley hay que saber hallar la fuerza de gravitación no sólo entre puntos materiales, sino que también entre cuerpos de dimensiones finitas. En caso general, este problema presenta enormes dificultades matemáticas y por métodos elementales es imposible de resolver. El cálculo exacto muestra que también se puede hacer uso de la fórmula (9.5) para el cálculo de la fuerza de interacción entre *bolas homogéneas* con masas  $m_1$  y  $m_2$ , entendiéndose por  $r$  la distancia entre los centros de las bolas.

2. El coeficiente  $\gamma$ , que entra en la expresión de la ley de gravitación, llámase *constante de gravitación*. Es numéricamente igual a la fuerza de interacción entre partículas de masa unitaria, separadas una de otra a una distancia unitaria.

En el Sistema Internacional de unidades, la constante de gravitación es numéricamente igual a la fuerza de interacción entre dos partículas con masas  $m_1 = m_2 = 1$  kg separadas entre sí a una distancia  $r = 1$  m. Esta magnitud sólo puede ser determinada por vía experimental.

### § 9.3. Experimento de Cavendish

En 1798 Cavendish realizó un experimento que permitió medir la fuerza de gravitación en el laboratorio y de esta forma, determinar la constante de gravitación. Para el experimento fue utilizada una balanza de torsión cuya estructura se muestra en la fig. 9.1.

Una ligera barra 2 está suspendida de un hilo fino de cuarzo 1, en el que está fijado un pequeño espejo 3. El rayo de luz 4 incide en el espejo y se refleja sobre la escala 5. Al girar la barra, el rayo reflejado se desplaza por la escala, registrando así el ángulo de torsión del hilo. En los extremos de la barra se hallan fijadas dos bolitas de plomo de igual masa  $m$ .

A ellas se acercan dos bolas de plomo, dispuestas simétricamente, cuya masa es  $M$  ( $M \gg m$ ). Con ello, el hilo se torsiona a cierto ángulo, hasta que la fuerza elástica del hilo deformado no equilibre la fuerza de interacción gravitatoria entre las bolas. Después de medir la fuerza de interacción según el

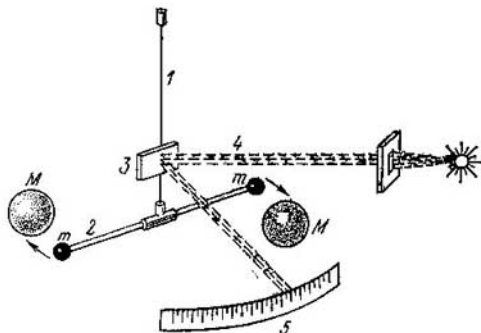


Fig. 9.1.

ángulo de torsión del hilo y conociendo la masa de las bolas y la distancia entre ellas, puede ser determinada la constante de gravitación.

Mediciones más exactas, realizadas de acuerdo con un método perfeccionado, ofrecieron el siguiente resultado

$$\gamma = (6,6720 \pm 0,0041) \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

#### § 9.4. Cálculo de las distancias del Sol a los planetas

Empleemos la ley de gravitación para calcular las distancias del Sol a los planetas. Para simplificar los razonamientos vamos a suponer que los planetas giran por órbitas circulares. Esto poco influirá en la precisión de los resultados del cálculo ya que las trayectorias reales de los planetas poco se diferencian de circunferencias.

La fuerza de gravitación que actúa desde el Sol sobre los planetas, comunica a éstos aceleración normal:  $a_n = F/m =$

$= \gamma M/r^2$ . Pero como  $a_n = v^2/r = 4\pi^2 r/T^2$ , entonces

$$\frac{\gamma M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}, \quad (9.6)$$

donde  $M$  es la masa del Sol,  $r$ , el radio de la órbita,  $T$ , período de revolución del planeta alrededor del Sol. De aquí

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} = \text{const.} \quad (9.7)$$

Así, pues, los cubos de las distancias medias de los planetas al Sol son proporcionales a los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas alrededor del Sol (tercera ley de Kepler).

Como los períodos de revolución de los planetas pueden ser medidos con gran exactitud, para determinar las distancias hasta todos los planetas es suficiente medir la distancia del Sol a un planeta cualquiera. En calidad de semejante patrón se ha aceptado la distancia media Tierra—Sol, llamada *unidad astronómica* de longitud: ( $1 \text{ UA} = 1,49589 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ).

En el transcurso de 1960—1962 los científicos soviéticos, mediante un potente radar, midieron la distancia Tierra—Venus, lo que permitió precisar el valor de la unidad astronómica y, por lo tanto, la distancia entre todos los planetas del Sistema Solar. La perfecta coincidencia de los resultados de las mediciones astronómicas y por radiolocalización es una buena demostración de la justeza de la ley de gravitación universal.

### § 9.5. Campo gravitatorio

En la física moderna, el mecanismo de las interacciones gravitatorias es representado de la siguiente forma. Cada cuerpo de masa  $M$  crea a su alrededor un campo; si en cierto punto de este campo se coloca un cuerpo de prueba de masa  $m$ , el campo actuará sobre la masa de prueba con la fuerza  $F$  que depende de las propiedades del campo en dicho punto y del valor de la masa del cuerpo de prueba. Como es natural, dicho cuerpo creará a su alrededor su propio campo, que a su vez actúa sobre el cuerpo de masa  $M$ .

El espacio libre de materia posee una serie de propiedades geométricas y físicas. Por ejemplo, la distancia más corta entre dos puntos es una recta; la marcha del tiempo en todos los puntos del espacio es igual; los rayos de la luz son líneas rectas, etc.

Einstein indicó que al introducir un cuerpo de masa  $M$  en cierta región del espacio, el primero varía las propiedades del segundo. En particular, la distancia mínima entre dos puntos ya no será una recta, sino una curva cuya forma depende de la masa del cuerpo y de la distancia entre el cuerpo y los puntos del espacio que se estudian. Como anteriormente, la luz se propaga por la distancia más corta entre dos puntos, pero los rayos luminosos se curvarán. En correspondencia, en las proximidades de cuerpos macizos el tiempo también se retarda.

Por lo tanto, el campo gravitatorio caracteriza el cambio de las propiedades físicas y geométricas del espacio en el entorno de cuerpos macizos (§§ 24.5, 24.6).

El campo gravitatorio es material, existe independientemente de nuestra conciencia y puede ser descubierto por su influjo sobre objetos físicos, por ejemplo, sobre los instrumentos de medida.

### § 9.6. Intensidad del campo gravitatorio

1. Para dar al campo gravitatorio una característica cuantitativa, vamos a introducir una magnitud física que llamaremos *intensidad del campo*  $G$ . Numéricamente esta magnitud es igual a la razón entre la fuerza de gravitación, que actúa sobre un cuerpo de prueba, y la masa de este cuerpo:

$$G = F/m. \quad (9.8)$$

Haciendo uso de la ley de gravitación (9.5) y haciendo en ella  $m_1 = M$ ,  $m_2 = m$ , obtenemos

$$G = \gamma M/r^2. \quad (9.9)$$

2. Como vemos, la intensidad del campo gravitatorio es determinada por la masa del cuerpo que crea el campo (fuente del campo) y la distancia desde este cuerpo hasta el punto del campo que nos interesa. La intensidad no depende de la masa del cuerpo de prueba ubicado en dicho punto.

Es evidente que por su sentido físico, la intensidad del campo gravitatorio coincide con la aceleración del cuerpo de prueba. Como la intensidad del campo no depende de la masa del cuerpo de prueba, todos los cuerpos, independientemente de su masa, se mueven en el punto dado del campo gravitatorio con igual aceleración. En particular, precisamente

por esta causa, todos los cuerpos caen, bajo el influjo de la fuerza de gravedad, con igual aceleración  $g$  (§ 6.2).

3. La intensidad del campo es un vector dirigido en el mismo sentido que la fuerza de gravitación. Si el radio vector  $r$  es dirigido desde la fuente del campo  $M$  hacia el punto del campo que investigamos, entonces el vector de intensidad siempre estará dirigido en sentido opuesto al radio vector. Para mostrar esto, hay que escribir con signo negativo la proyección del vector de intensidad del campo gravitatorio sobre la dirección del radio vector:

$$G_r = -\gamma \frac{M}{r^2}. \quad (9.10)$$

### § 9.7. Campo gravitatorio de la Tierra

1. A medida que un cuerpo se aleja de la Tierra, disminuyen la fuerza de gravedad y la aceleración de caída libre. Un cuerpo situado al nivel del mar se atrae por la Tierra con una fuerza

$$P_0 = mg_0 = \gamma \frac{Mm}{R^2}, \quad (9.11)$$

donde  $M$  y  $R$  son la masa y el radio de la Tierra,  $m$ , la masa del cuerpo,  $g_0$ , la aceleración de caída libre al nivel del mar. Si subimos ese mismo cuerpo a una altura  $h$  sobre el nivel del mar, él será atraído por la Tierra con la fuerza

$$P = mg = \gamma \frac{Mm}{(R+h)^2}. \quad (9.12)$$

De aquí se desprende que la fuerza de gravedad y la aceleración de caída libre varían en el mismo grado al cambiar la altura.

A pequeñas alturas, mucho menores que el radio de la Tierra, dichas variaciones pueden ser despreciadas y considerarse que la fuerza de gravedad y la aceleración de caída libre son magnitudes constantes. Efectivamente, como el radio medio terrestre  $R = 6371$  km, incluso a una altura de varios centenares de kilómetros sobre el nivel del mar, sólo instrumentos muy sensibles pueden advertir el cambio del valor de la fuerza de gravedad y la aceleración. Sea  $h = 300$  km, entonces

$$\frac{P}{P_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \left(\frac{6371}{6671}\right)^2 = 0,955,$$



lo que se diferencia de la unidad el 4,5%. Cuando  $h = 30$  km

$$\frac{P}{P_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \left(\frac{6371}{6401}\right)^2 = 0,9957,$$

lo que difiere de la unidad el 0,43%.

2. Conociendo la aceleración de caída libre y la constante de gravitación podremos determinar la masa de la Tierra. En efecto, de (9.11)

$$g_0 = \frac{\gamma M}{R^2},$$

de donde la masa de la Tierra

$$M = \frac{g_0 R^2}{\gamma} = \frac{9,81 \cdot 6,37^2 \cdot 10^{12}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg.} \quad (9.13)$$

De modo análogo podemos calcular la masa del Sol. Sabiendo que el radio de la órbita terrestre  $R_T = 149,5 \cdot 10^9$  m y el período de revolución de la Tierra alrededor del Sol  $T = 1$  año  $= 31,56 \cdot 10^6$  s, podemos hallar la aceleración normal de la Tierra:

$$a_T = \frac{4\pi^2 R_T}{T^2} = 5,93 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

Por analogía con (9.13), tenemos

$$M_S = \frac{a_T R_T^2}{\gamma} = \frac{5,93 \cdot 10^{-3} \cdot 149,5^2 \cdot 10^{18}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$$

Así, pues, la masa del Sol es 330 000 veces mayor que la de la Tierra.

3. Conociendo la masa terrestre y su radio, podemos calcular su densidad media:

$$\rho_m = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 3}{4\pi 6,37^3 \cdot 10^{18}} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

Como las rocas pétreas, de las que está constituida la capa superficial de la Tierra, tienen una densidad que es, aproximadamente, dos veces menor, claro está que en las entrañas de la Tierra, hay un núcleo, cuya densidad es cerca de dos veces mayor que su densidad media. Esto significa que el núcleo terrestre consta, fundamentalmente, de metales semejantes al hierro, cobre, etc.

De acuerdo con una de las hipótesis propuestas por O. Yu. Shmidt, la Tierra se formó de una nube de meteoritos. Chocando unos con otros, los meteoritos se calentaban; además, su calentamiento era

provocado por el calor que se desprendía durante la desintegración de las sustancias radiactivas. Como resultado el globo terráqueo adquirió propiedades plásticas. Las sustancias más densas, tales como los metales, fueron atraídas al centro de la Tierra y formaron su núcleo; materias menos densas ascendieron a la superficie y formaron la cubierta pétreo de la Tierra, es decir, la litosfera.

Sin embargo, en la litosfera se hallan con frecuencia yacimientos macizos de sustancias más densas, los minerales metálicos. En el entorno de estos yacimientos la aceleración de caída libre es mayor que en las regiones constituidas sólo de rocas pétreas. Mediciones exactas de la aceleración de caída libre ayudan a los geólogos a descubrir yacimientos metálicos. Este método, denominado *exploración gravimétrica*, se usa extensamente en la práctica.

### § 9.8. Influencia de la rotación de la Tierra sobre la aceleración de la caída libre

1. En el párrafo anterior hemos deducido la dependencia entre la aceleración de la caída libre y la altura del cuerpo sobre el nivel del mar. Pero, con ello, no hemos tenido en cuenta que sobre dicha magnitud también influye la rotación diaria terrestre.

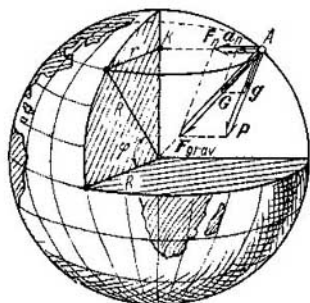


Fig. 9.2.

Sea que un cuerpo de masa  $m$  está situado en el punto  $A$  de latitud geográfica  $\varphi$  (fig. 9.2). Como este cuerpo toma parte en la rotación diaria terrestre, él se moverá por una circunferencia de radio  $AK = r = R \times \cos \varphi$ , donde  $R$  es el radio de la Tierra. Durante todo movimiento curvilíneo surge aceleración normal

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 R \cos \varphi}{T^2},$$

donde  $T$  es el período de revolución de la Tierra.

Para hallar la fuerza que provoca la aceleración normal hay que descomponer la fuerza de gravitación  $F_{gr}$  en dos componentes: la fuerza centrípeta  $F_n$  y la fuerza de gravedad  $P$ . En la fig. 9.2 vemos que la fuerza de gravedad es en todo lugar, salvo en los polos, menor que la fuerza de gravitación. Además, dondequiera, excluyendo el ecuador y los polos, la fuerza de gravedad está dirigida no hacia el centro de la Tierra sino un poco hacia un lado.

Como a cuenta de la rotación de la Tierra, en los polos la fuerza de gravedad es algo mayor que en el ecuador, el globo terráqueo está un poco aplastado: su radio polar es igual a 6356,9 km, mientras que el ecuatorial, 6378,4 km.

2. La aceleración de la caída libre tiene su valor máximo en el polo. Es verdad, aquí la aceleración normal es igual a cero y el radio polar tiene la menor dimensión. Por consiguiente,

$$g_p = G_p = \frac{\gamma M}{R_p^2}.$$

La aceleración de caída libre de un cuerpo en el ecuador es la diferencia entre la intensidad del campo gravitatorio y la aceleración normal:

$$g_{ec} = G_{ec} - a_n^{ec} = \frac{\gamma M}{R_{ec}^2} - \frac{4\pi^2 R_{ec}}{T^2}.$$

Mediciones exactas nos dan

$$g_p = 9,83210 \text{ m/s}^2,$$

$$g_{ec} = 9,78038 \text{ m/s}^2.$$

En la latitud de  $45^\circ$  la aceleración de caída libre de un cuerpo  $g = 9,80620 \text{ m/s}^2$ .

En los cálculos aproximados se toma  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

## Capítulo 10

### FUERZAS ELÉCTRICAS

#### § 10.1. Carga eléctrica

1. Además de la gravitación, en la naturaleza hay una clase particular de interacciones *electromagnéticas*: fuerzas eléctricas y magnéticas. El ejemplo más sencillo de interacción es la atracción o repulsión de los cuerpos electrizados.

El siguiente experimento nos permite estudiar la electrificación. Dos barras de plástico están instaladas sobre agujas y pueden girar libremente (fig. 10.1). En una de las barras está fijada una placa metálica bien pulida, mientras que en la otra, una placa de plexiglás, también pulida minuciosamente. Quitemos las barras de las agujas y pongamos las

placas en contacto. Si ponemos de nuevo las barras sobre las agujas, las placas se atraerán entre sí. Como es natural, esta fuerza no es de gravitación, ya que la masa de los cuerpos antes y después del contacto queda invariable, mientras que las fuerzas gravitatorias sólo dependen de la masa de los cuerpos y la distancia entre ellos. Por lo tanto, en el experimento dado tropezamos con una nueva clase de fuerzas, que son llamadas *eléctricas*.

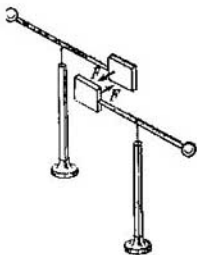


Fig. 10.1.

2. La magnitud física que caracteriza la propiedad de los cuerpos de ponerse en interacción eléctrica a determinadas condiciones y que define el valor de las fuerzas eléctricas se llama *carga eléctrica*. El fenómeno que se acompaña por la redistribución de las cargas y los cuerpos, denomínase *electrización*.

La electrización de los cuerpos al hacer éstos contacto, también es llamada a veces electrización por rozamiento, lo que en esencia es erróneo. El rozamiento no juega aquí un papel de principio, sino que mejora el contacto entre los cuerpos y, de este modo, favorece a su electrización.

3. Durante todos los fenómenos relacionados con la redistribución de las cargas eléctricas en un sistema aislado de cuerpos en interacción, la suma algebraica de las cargas eléctricas queda constante. Esta *ley de conservación de las cargas eléctricas* es, por lo tanto, una ley fundamental de física, lo mismo que el resto de las leyes de conservación, que serán estudiadas más adelante (véase el cap. 15).

## § 10.2. Ley de Coulomb

1. La práctica muestra que la fuerza de interacción eléctrica depende, de modo bastante complicado de la forma de los cuerpos electrizados y del carácter de la distribución de la carga en dichos cuerpos. Por lo tanto, no existe una fórmula única y sencilla, que describa la interacción eléctrica para cualquier caso arbitrario. Tan sólo para *las cargas puntuales* la ley de interacción se escribe de manera suficientemente simple.

Hay que señalar que la noción de carga puntual es una cómoda abstracción, análoga al concepto «punto material» (§ 1.1). Denominamos *puntual* a una carga distribuida por un cuerpo, cuyas dimensiones son considerablemente menores que cualesquiera de las distancias con las que se tropieza en el problema.

2. Coulomb, haciendo uso de una balanza de torsión, (§ 9.3) pudo hallar de modo experimental en 1785 la ley de interacción de las cargas puntuales. La balanza de torsión de Coulomb (fig. 10.2) tenía una ligera palanca de vidrio con una bolita metálica en un extremo. Coulomb tocaba esta bolita con una barra electrizada, en cuyo extremo también había una bolita. En este caso, la carga se distribuía entre las bolitas y ellas se repelían. La palanca torsionaba el hilo hasta el momento, cuando la fuerza elástica equilibraba la de interacción eléctrica. Haciendo girar la manecilla, podía ser cambiado el ángulo de torsión del hilo, variando con ello la fuerza elástica y, por lo tanto, la distancia entre las cargas. Después de una serie de experimentos, Coulomb halló que la fuerza de interacción eléctrica entre las cargas varía inversamente proporcional a la distancia entre ellas.

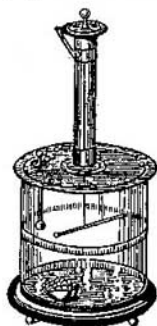


Fig. 10.2.

A diferencia del experimento de T. Cavendish, durante el cual eran conocidas las masas de los cuerpos en interacción, Coulomb no poseía ningún método para medir el valor de la carga en las bolitas. No obstante, aquí resultó ser posible la aplicación del siguiente procedimiento. Con la bolita electrizada hacía contacto una bolita sin carga de igual tamaño que la primera, que después de esto se llevaba lejos del instrumento. Como en tal caso, la carga se distribuía en partes iguales entre los dos cuerpos en contacto, la carga de la bolita de prueba disminuía el doble. Resultó que la fuerza de interacción eléctrica disminuyó el mismo número de veces.

Repetiendo esta operación varias veces, Coulomb llegó a la conclusión de que la fuerza de interacción eléctrica es proporcional al producto de las cargas de los cuerpos que interactúan.

3. Los experimentos de Coulomb fueron muy inexactos,

ya que las bolitas eran demasiado grandes y la fuerza se medía con considerable error. Además, los experimentos transcurrían en el aire, lo que influía sobre los resultados del experimento, aunque no de forma considerable. A pesar de todo, Coulomb consiguió formular una ley que, más adelante, fue confirmada brillantemente por todo el conjunto de los fenómenos eléctricos: *la fuerza de interacción entre dos cargas pun-*

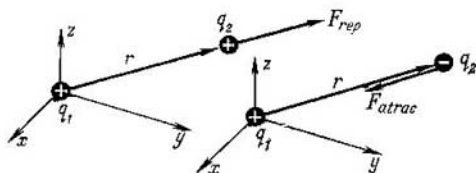


Fig. 10.3.

*tuales inmóviles en el vacío, es directamente proporcional al producto de estas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas,*

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (10.1)$$

Aquí  $F$  es la fuerza de interacción,  $q_1$  y  $q_2$ , las cargas,  $r$ , la distancia entre ellas,  $k$ , un coeficiente de proporcionalidad que depende del sistema de unidades empleado durante los cálculos.

4. La fuerza de Coulomb, como otra cualquiera (por ejemplo, la de gravitación), se subordina a la tercera ley de Newton: *las fuerzas de interacción entre las cargas son iguales por su valor y están dirigidas en sentido opuesto una de otra a lo largo de una recta que une dichas cargas.*

La práctica muestra que las cargas de un mismo signo se repelen, las de signos diferentes se atraen. Por esta causa, las fuerzas de Coulomb se diferencian en principio de las de gravitación, que siempre son fuerzas de atracción.

La fuerza de repulsión, que actúa sobre la carga dada, va dirigida en el mismo sentido que el radio vector trazado hacia dicha carga; la fuerza de atracción tiene dirección opuesta (fig. 10.3). Por esta razón, es conveniente atribuir a estas fuerzas los correspondientes signos: a las fuerzas de repulsión, positivo, a las de atracción, negativo.

La ley de Coulomb toma en consideración automáticamente los signos de las cargas: si éstas son de un mismo signo, su producto es un número positivo y la fuerza de repulsión tiene el mismo signo. Si las cargas tienen signos diferentes, su producto es un número negativo, lo que corresponde al signo de la fuerza de atracción.

Notemos, que de acuerdo con la condición del signo de las fuerzas, la expresión para la proyección de la fuerza de gravitación en la dirección del radio vector, debe escribirse con signo menos:

$$F_r = -\gamma \frac{mM}{r^2}, \quad (10.2)$$

ya que las masas siempre tienen signo positivo, mientras que entre ellas actúa la fuerza de atracción, que es negativa.

### § 10.3. Unidad de carga

1. La unidad de carga en el SI es *el culombio*.

Por definición, dos cargas puntiformes inmóviles, cada una de 1 culombio, separadas entre sí a 1 m, interactúan en el vacío con una fuerza igual a  $9 \cdot 10^9$  N. Como el coeficiente  $k$  en la ley de Coulomb (del mismo modo que la constante de gravitación en la ley de gravitación) es numéricamente igual a la fuerza con que las dos cargas unitarias interactúan a una distancia unitaria,

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2. \quad (10.3)$$

En el SI la ley de Coulomb se escribe en la forma siguiente

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2}. \quad (10.4)$$

La magnitud  $\epsilon_0$  denomínase *constante dieléctrica*. Comparando (10.1.) y (10.4), obtenemos

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2) = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2).$$

2. Hubiera sido natural tomar como unidad de carga eléctrica la del electrón. En tal caso, la carga de todo otro cuerpo se expresaría con un número entero, que mostraría cuántos electrones el cuerpo adquirió (o perdió) durante su electrización. Sin embargo, como que la unidad de carga ya está elegida, la carga del electrón fue determinada de modo experimental. Resultó que la carga del electrón (carga ele-

mental)  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C (§ 37.10). De aquí se deduce que  $1 \text{ C} = 6,25 \cdot 10^{18} e$ .

3. Comparemos las fuerzas de interacción gravitatoria y eléctrica entre dos electrones. Tenemos

$$F_{\text{coul}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad F_{\text{gr}} = \frac{\gamma m^2}{r^2},$$

donde  $m = 9 \cdot 10^{-31}$  kg, la masa en reposo del electrón:

$$\frac{F_{\text{coul}}}{F_{\text{gr}}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m^2} = \frac{1,6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 36\pi \cdot 10^9}{4\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 9^2 \cdot 10^{-62}} \approx 4 \cdot 10^{42}.$$

Es decir, al examinar los fenómenos que transcurren en los sistemas cargados eléctricamente y, en particular, en el mundo de las moléculas, átomos y núcleos atómicos, pueden ser despreciadas por completo las fuerzas de gravitación, en comparación con las eléctricas. Sólo para los cuerpos cósmicos (planetas, estrellas,) que tienen masas muy grandes, las fuerzas de gravitación comienzan a jugar un papel predominante.

#### § 10.4. Dipolo

1. Llamamos *dipolo* un sistema eléctrico que consta de dos cargas  $q$  de igual magnitud y signo contrario (fig. 10.4). La característica del dipolo es su *momento eléctrico*:

$$p_e = ql. \quad (10.5)$$

El vector  $l$  se considera dirigido de la carga negativa a la positiva. El módulo  $|l| = l$  se denomina *brazo del dipolo*.

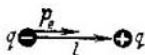


Fig. 10.4.

El vector  $p_e$  está dirigido en la misma dirección que el vector  $l$ .

Como el dipolo es un sistema eléctricamente neutro, a primera vista puede crearse la impresión de que los dipolos son incapaces de interactuar de forma eléctrica. No obstante, esta conclusión es demasiado arriesgada. *Los dipolos interactúan*, lo que se provoca por el hecho de que las cargas, que forman el dipolo, se encuentran en diversos puntos del espacio.



2. Consideremos el caso de la interacción de dos dipolos iguales, dispuestos a lo largo de un mismo eje. Designemos por  $r$  la distancia entre los centros de los dipolos; sea que esta distancia es mucho mayor que el brazo del dipolo:  $r \gg l$  (fig. 10.5).

La fuerza de interacción se compone de cuatro componentes: dos fuerzas de repulsión entre las cargas homónimas y

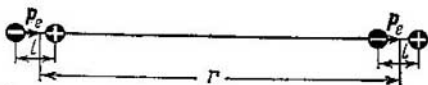


Fig. 10.5.

dos fuerzas de atracción entre las cargas de diferente signo:

$$F = \frac{(-q)(-q)}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{(-q)q}{4\pi\epsilon_0 (r-l)^2} + \frac{(-q)q}{4\pi\epsilon_0 (r+l)^2} = \\ = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2}{r^2} - \frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right].$$

Después de sencillas transformaciones obtenemos

$$F = -\frac{6q^2 l^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r^2 - (l^2/3)}{(r^2 - l^2)^2}.$$

Designando  $ql = p_e$  y despreciando  $l^2$ , como una magnitud muy pequeña en comparación con  $r^2$ , tenemos

$$F = -\frac{6p_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}. \quad (10.6)$$

Es fácil generalizar esta expresión para el caso de interacción de dipolos con diferentes momentos eléctricos dipolares  $P_{1e}$  y  $P_{2e}$ :

$$F = -\frac{6P_{1e}P_{2e}}{4\pi\epsilon_0 r^4}. \quad (10.7)$$

Así, pues, si los momentos dipolares están dispuestos a lo largo de una recta y tienen la misma dirección, ellos se atraen, con la particularidad de que la fuerza de atracción es proporcional al producto de los momentos eléctricos de los dipolos e inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia entre ellos. Por consiguiente, la interacción dipolar decrece con la distancia con mayor rapidez que la interacción entre dos cargas puntiformes.

Ofrecemos al lector que se cerciore por su cuenta, de que los dipolos, cuyos momentos están dispuestos, a lo largo de una recta y dirigidos en sentidos contrarios, se repelen con una fuerza de ese mismo valor.

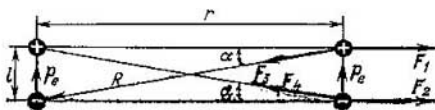


Fig. 10.6.

3. Calculemos la fuerza de interacción entre dipolos orientados de la forma mostrada en la fig. 10.6. La fuerza resultante

$$F' = F_2 + F_3 - F_3 \cos \alpha - F_4 \cos \alpha = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{2q^2 \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Teniendo en cuenta que  $\cos \alpha = r/R$  y que  $R^2 - r^2 = l^2$ , después de sencillas transformaciones, obtenemos

$$F' = \frac{2q^2 l^2 (R^2 + Rr + r^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2 R^3 (R+r)}.$$

Haciendo, como más arriba,  $l \ll r$ , y, por consiguiente,  $R \approx r$ , tenemos

$$F' = \frac{2q^2 l^2 \cdot 3r^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2r^6} = \frac{3p_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} = \frac{f}{2}. \quad (10.6')$$

El lector se convencerá con facilidad que con la orientación antiparalela de los momentos dipolares, surge una fuerza de atracción del mismo valor.

4. Comparando las expresiones (10.6) y (10.6'), nos cercioramos que a diferencia de las fuerzas centrales (de gravitación y de Coulomb), la fuerza de interacción entre los dipolos no sólo depende de la distancia entre ellos, sino que también de la orientación entre los dipolos. Semejante propiedad tienen también las fuerzas nucleares (§ 80.5).

La interacción dipolar juega un importantísimo papel en física. Resulta, que todo sistema, constituido por cargas con disposición asimétrica, cuya suma algebraica es igual a cero, puede considerarse, con la primera aproximación, que es un dipolo. Este factor permite explicar una de las formas de la interacción molecular, las llamadas fuerzas de Van der Waals (§ 31.3).

## § 10.5. Campo eléctrico. Intensidad

1. Lo mismo que fue introducida la noción de campo gravitatorio (§ 9.5), introduzcamos el concepto de campo eléctrico. Vamos a considerar que la interacción eléctrica es ejecutada según el esquema «carga—campo—carga»: cada carga crea a su alrededor un campo eléctrico que actúa sobre todas las demás partículas cargadas.

*El campo eléctrico es material.* Existe independientemente de nuestra conciencia y puede ser descubierto por su influjo sobre los objetos físicos, por ejemplo, los instrumentos de medida.

2. La característica cuantitativa de fuerza del campo eléctrico es una magnitud vectorial, denominada *intensidad* del campo eléctrico  $E$ :

$$E = F/q. \quad (10.8)$$

La intensidad del campo es numéricamente igual a la razón entre la fuerza que actúa en el punto dado del campo sobre una carga positiva de prueba  $q$  y la magnitud de dicha carga. La carga de prueba tiene que ser tan pequeña que su campo no perturbe el campo que investigamos.

## § 10.6. Campo de una carga puntual y un dipolo

1. La expresión para la intensidad del campo de una carga puntual, puede obtenerse de la ley de Coulomb. Si designamos la carga que crea el campo con la letra  $Q$  y la carga de prueba positiva, por  $q$ , obtenemos

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (10.9)$$

Dispongamos la carga que crea el campo en el origen de coordenadas (fig. 10.7). Tracemos un radio vector al punto  $M$  del campo que nos interesa. Entonces, cuando el signo de la fuente del campo es positivo, el vector de intensidad está dirigido en el mismo sentido que el radio vector, mientras que con el signo negativo, en sentido contrario.

Notemos, que la intensidad en el punto dado es definida por la fuente del campo  $Q$  y el radio vector  $r$ , pero no es función de la carga de prueba  $q$ . Esto nos permite hablar acerca del campo en el punto dado del espacio, independientemente de si en dicho punto hay carga de prueba o no.

2. Hablando en general, el campo de todo cuerpo cargado se puede calcular partiendo de que la intensidad es un vector y de que conocemos la ley de suma de vectores. En principio, el método no es complicado: hay que dividir el cuerpo en sectores tan pequeños, que su carga pueda ser considerada

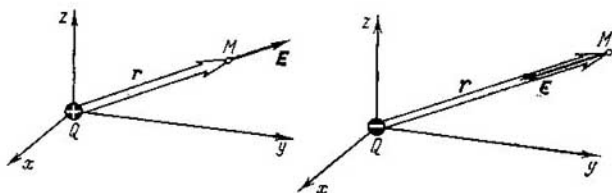


Fig. 10.7.

puntiforme, calcular la intensidad del campo creado por cada carga puntiforme y, a continuación, hallar la suma vectorial según la regla del polígono.

Calculemos, por ejemplo, la intensidad del campo en el centro de un triángulo equilátero, si en sus vértices se encuentran cargas de

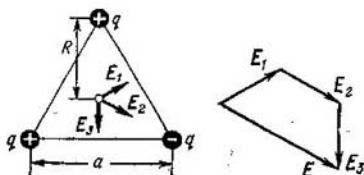


Fig. 10.8.

igual módulo, dos positivas y una negativa (fig. 10.8). Los vectores  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  son de igual módulo; por la fórmula (10.9), tenemos

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a^2},$$

ya que  $R = a/\sqrt{3}$ . Sumando los tres vectores, según la regla del polígono, obtenemos un trapecio isósceles, cuya base mayor es, precisamente, el vector  $E$  buscado. De la figura vemos que

$$E = E_2 + E_1 \sin 30^\circ + E_3 \sin 30^\circ = 2E_1 = \frac{6q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Además, vemos que el vector  $E$  está dirigido en la misma dirección que el vector  $E_2$ .

3. Calculemos la intensidad del campo por el eje de dipolo  $E_{\parallel}$  y en el punto en la normal al punto medio del dipolo  $E_{\perp}$  (fig. 10.9). Con ello, lo mismo que en el § 10.4, la distancia desde el punto del campo hasta el eje del dipolo es mucho mayor que el brazo de dipolo:  $r \gg l$ . La intensidad del cam-

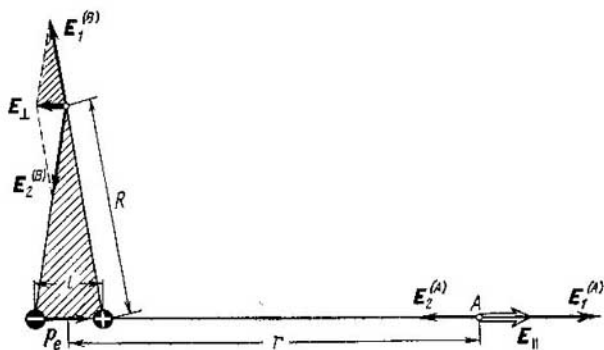


Fig. 10.9.

po en el punto A es igual a la suma vectorial de las intensidades de los campos, creados por las cargas positivas y negativas. Como  $E_1$  y  $E_2$  están dirigidas por una misma recta,

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= E_1^{(A)} + E_2^{(A)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{l}{2}\right)^2} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2lr}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}. \end{aligned}$$

Eliminando la pequeña magnitud  $l^2 \ll r^2$  y haciendo  $ql = = p_e$ , tenemos

$$E_{\parallel} = \frac{2p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (10.10)$$

La intensidad del campo en el punto B es igual a la suma vectorial de las intensidades  $E_1^{(B)}$  y  $E_2^{(B)}$ . De la semejanza

de los triángulos de las intensidades y las distancias (en la figura están sombreados), obtenemos

$$\frac{E_{\perp}}{E_1^{(B)}} = \frac{l}{R}.$$

De la fórmula (10.9), tenemos:  $E_1^{(B)} = q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ ; por consiguiente,

$$E_{\perp} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Cuando  $r \gg l$ , sin gran error podemos hacer  $R \approx r$ . Entonces

$$E_{\perp} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (10.11)$$

Así, pues, la intensidad del campo creado por un dipolo, es directamente proporcional al momento del dipolo e inversamente proporcional al cubo de la distancia desde el punto del campo hasta el centro del dipolo.

4. La intensidad del campo y el momento del dipolo son vectores. La fig. 10.9 nos muestra que los vectores  $E_{\parallel}$  y  $p_e$  tienen la misma dirección, mientras que el vector  $E_{\perp}$ , dirección opuesta. Por lo tanto, las expresiones (10.10) y (10.11) en forma vectorial toman la forma

$$E_{\parallel} = \frac{2p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (10.12)$$

$$E_{\perp} = -\frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (10.13)$$

## Capítulo 11

### ROZAMIENTO

#### § 11.1. Rozamiento externo e interno (viscosidad)

Se llama *de rozamiento la fuerza T* que surge al hacer contacto las superficies de dos cuerpos, que obstaculiza su desplazamiento mutuo. Se aplica a los cuerpos a lo largo de la superficie de contacto recíproco y siempre está dirigida en sentido contrario a *la velocidad relativa* de desplazamiento.

Son distinguidos el rozamiento *externo* (seco) e *interno* (líquido o viscoso).

Se llama *rozamiento externo* la interacción entre las superficies de dos sólidos en contacto. Si dichos cuerpos no se mueven, se dice *rozamiento en reposo*; con el desplazamiento mutuo relativo, llámase *rozamiento de deslizamiento* o cinemático. Cuando uno de los cuerpos rueda por la superficie de otro sin patinar, surge un género especial de resistencia, denominada *rozamiento de rodadura*.

El *rozamiento interno* (viscosidad) es la interacción que surge entre las capas que se mueven unas con respecto a otras de un líquido o gas. A diferencia del rozamiento externo, aquí no hay rozamiento en reposo.

### § 11.2. Rozamiento en reposo

1. Las particularidades del rozamiento externo pueden estudiarse con ayuda de la instalación, representada en la fig. 11.1. Mediante un dinamómetro, la barreta que se halla



Fig. 11.1.

sobre la superficie lisa y horizontal de una tabla, se fija en un hilo que puede enrollarse en un tambor asentado en el árbol de un electromotor. El dinamómetro sirve para medir la fuerza de tracción  $F$ . Regulando la velocidad de rotación del motor, la fuerza de tracción puede variar en los límites necesarios. La experiencia muestra que mientras la fuerza de tracción sea menor que cierta magnitud  $F_{\text{mín}}$ , la barreta no se moverá de su sitio. Con mayor fuerza de tracción, la barreta con un salto empieza el desplazamiento y, a continuación, en función de las condiciones de experimento, se mueve uniforme o aceleradamente.

2. Si habiendo fuerza de tracción la barreta no tiene aceleración, esto puede explicarse sólo a causa de que *la fuerza de tracción se equilibra por la fuerza de rozamiento*.

La ley fundamental de dinámica tiene la forma

$$F + T = ma. \quad (11.1)$$

Con  $a = 0$ , la barreta ora está en reposo, ora en movimiento uniforme. Por consiguiente, aquí  $|F| = |T|$ , de donde se desprende que para medir la fuerza de rozamiento en reposo o la fuerza de rozamiento de deslizamiento es suficiente medir la fuerza de tracción que corresponde a este estado.

*La fuerza de rozamiento en reposo no es una magnitud unívocamente definida.* En función de la fuerza de tracción aplicada, el valor de la fuerza de rozamiento en reposo varía de cero a  $F_{\min}$ , es decir, semejante valor de la fuerza, cuando la barreta, por un salto, comienza a moverse. Por esta razón

$$T_{\text{rep}} \leq T_{\text{rep}}^{\text{máx}} = F_{\min}. \quad (11.2)$$

Por regla, la fuerza de rozamiento en reposo denomínase *fuerza máxima de rozamiento en reposo*.

3. La teoría del fenómeno de rozamiento externo, está insuficientemente elaborada, pero en rasgos generales, el mecanismo de surgimiento del rozamiento en reposo es el siguiente.

La superficie de un sólido, incluso bien pulida, está lejos de ser plana (lisa). En ella hay microsaliientes, huecos, fisuras; con frecuencia dicha superficie está cubierta de óxidos, capas adheridas de gases o líquidos, inclusiones ajenas. Al hacer contacto las superficies de dos cuerpos, los microsaliientes penetran parcialmente en los huecos correspondientes. Como es natural, el engrane de los salientes obstaculizará el desplazamiento relativo a los cuerpos en contacto.

En una serie de sectores, la distancia entre los cuerpos en contacto puede ser del orden del radio de acción de las fuerzas moleculares. Esto conduce a la *coalescencia* de los cuerpos en los sectores dados, lo que también obstaculiza su desplazamiento relativo.

A la penetración de los microsaliientes y la coalescencia parcial de las superficies, favorece la *fuerza de presión normal*  $P_n$  exterior, que aprieta los sólidos uno contra otro. Como esta fuerza puede actuar la de gravedad o la de su componente normal (si el cuerpo se halla en un plano inclinado), así como cualquier otra fuerza, perpendicular a la superficie de contacto de los cuerpos.

La fuerza de tracción, menor que la fuerza máxima de rozamiento en reposo, en lo fundamental, provoca defor-



maciones elásticas de los microsaliientes y de los sectores donde actúan las fuerzas de cohesión molecular. En esencia, la fuerza elástica que surge es la fuerza de rozamiento en reposo.

4. Los razonamientos expuestos permiten sólo explicar cualitativamente el origen del rozamiento en reposo, pero son insuficientes para el cálculo del valor de la fuerza de rozamiento. Para obtener la correspondiente ley, hagamos un experimento.

Cargando con diversas pesas la barreta (fig. 11.1), cambiaremos la fuerza de la presión normal  $P_n$  (y, por consiguiente, la fuerza de la reacción, que es igual a ella,  $Q = P_n$ ). Midiendo cada vez la fuerza de tracción, nos cercioraremos de que *la fuerza de rozamiento en reposo es proporcional a la fuerza de la presión normal*:

$$T_{\text{rep}}^{\text{máx}} = \mu_{\text{rep}} Q. \quad (11.3)$$

La magnitud  $\mu_{\text{rep}}$  se denomina *coeficiente de rozamiento en reposo*.

Variando el área de la barreta, por ejemplo, haciéndola girar de la base al costado, veremos que *la fuerza de rozamiento en reposo no depende del área de la barreta*. Dividamos los dos miembros de la igualdad (11.3) por el área de contacto y designemos con  $\tau = T/S$  la magnitud que llamamos *tensión tangencial*; como  $p = P_n/S$  es la presión, la ley de rozamiento obtenida puede ser escrita del siguiente modo:

$$\tau_{\text{rep}}^{\text{máx}} = \mu_{\text{rep}} p. \quad (11.4)$$

5. El coeficiente de rozamiento en reposo depende de la calidad de maquinado de la superficie. En superficies rectificadas el rozamiento es menor que entre planos trabajados de forma basta. No obstante, esto es válido sólo hasta ciertos límites. Precisamente la experiencia muestra, que con un minucioso rectificado, los cuerpos se adhieren entre sí, lo que provoca el aumento brusco del coeficiente de rozamiento. Por lo visto, cuando las superficies están trabajadas de modo basto, el principal papel para el surgimiento de la fuerza de rozamiento lo desempeña el engrane de los salientes, mientras que con el rectificado minucioso, la cohesión molecular.

La fuerza de rozamiento en reposo también depende de cuánto tiempo han estado en contacto los cuerpos. Durante el contacto prolongado entre los cuerpos, cuando la fuerza

de la presión normal es considerable, se produce la deformación plástica de las superficies en contacto. Esto favorece a la coalescencia de los cuerpos y lleva al crecimiento de la fuerza de rozamiento en reposo.

### § 11.3. Ángulo de rozamiento en reposo

Para determinar el coeficiente de rozamiento es cómodo hacer uso de la instalación representada en la fig. 11.2. Elevando con precaución el plano inclinado, advertiremos

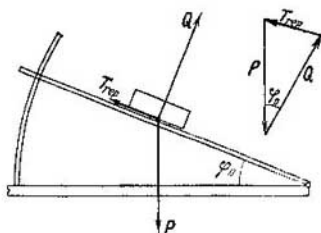


Fig. 11.2.

que con cierto ángulo  $\varphi_0$  el bloque, con un salto, se mueve de su lugar y comienza a resbalar por el plano.

En el presente caso, sobre el bloque están aplicadas tres fuerzas: la de gravedad  $P$ , la de reacción del apoyo  $Q$  y la de rozamiento  $T_{rep}$ . Si no hay aceleración, la resultante de las tres fuerzas será nula, o sea, ellas forman un triángulo cerrado. Como la fuerza de gravedad está dirigida por la vertical, la fuerza de rozamiento, a lo largo del plano inclinado, mientras que la reacción es perpendicular a ella, el triángulo de fuerzas  $QPT_{rep}$  es rectángulo y el ángulo en su vértice es igual a  $\varphi_0$ . De aquí se desprende que  $T_{rep} = Q \operatorname{tg} \varphi_0$ . Ya que  $T_{rep} = \mu_{rep} Q$ , entonces

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \mu_{rep}. \quad (11.5)$$

Las medidas realizadas para diversos materiales, con diferente calidad de su trabajado, muestran que el coeficiente de rozamiento varía en márgenes muy extensos: desde varias centésimas hasta la unidad. Cuando la coherencia molecular es considerable, el coeficiente de rozamiento puede alcanzar valores de 2 . . . 3.

#### § 11.4. Rozamiento de deslizamiento

1. La práctica muestra que con el movimiento *uniforme* del bloque representado en la fig. 11.1, al cuerpo debe estar constantemente aplicada la fuerza de tracción. Pero el movimiento uniforme es inercial; transcurre por sí mismo, sin aplicación de fuerzas externas. Es evidente, que la falta de aceleración del bloque, al haber fuerza de tracción, sólo puede ser explicada a causa de que *la fuerza de tracción se equilibra por la fuerza de rozamiento de deslizamiento.*

Cuando investigamos la magnitud de la fuerza de rozamiento de deslizamiento en diversas condiciones, vemos que ella, con la fuerza de rozamiento en reposo, depende de la presión normal y de la calidad de trabajado de las superficies en contacto. No es función del área de contacto y depende poco de la velocidad del movimiento relativo de los cuerpos en contacto. Esto permite calcular la fuerza de rozamiento de deslizamiento por la fórmula

$$T_{des} = \mu Q, \quad (11.6)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de rozamiento de deslizamiento.

2. Si el rozamiento en reposo se provoca, principalmente, por las deformaciones elásticas de los microsaliientes en las superficies de los cuerpos en contacto, el rozamiento de deslizamiento surge a causa de las deformaciones plásticas de los microsaliientes y por su destrucción parcial. En efecto, en estado de reposo, diferentes microsaliientes se hallan bajo la acción de fuerzas desiguales y, además, la resistencia mecánica de diversos salientes es variada. Cuando actúa la fuerza de tracción algunos de ellos se destruyen de inmediato. Con ello, la fuerza de tracción se concentra en los sectores que aún no se han destruido, pero que ya no pueden aguantar la carga creciente. Como resultado, se produce la destrucción en alud de los microsaliientes, por lo que el cuerpo, a salto, se desprende de su lugar. En este caso, la fuerza de rozamiento decrece, ya que la disminución del engrane y adhesión entre las superficies favorece a su patinaje mutuo, y como resultado, el coeficiente de rozamiento de deslizamiento  $\mu$  resulta ser menor que el de rozamiento en reposo  $\mu_{rep}$ .

3. El análisis cualitativo del mecanismo del rozamiento de deslizamiento, muestra que éste se acompaña del *desgaste* y *calentamiento* de las superficies en rozamiento. El carácter

del desgaste se determina por el estado de las superficies en contacto, del grado de su rugosidad, dureza, etc. Gracias al desgaste son posibles algunos tipos de maquinado de materiales, es decir, el rectificado y pulido.

El desgaste y calentamiento de las piezas en rozamiento de los mecanismos y máquinas, sin duda alguna, son nocivos; por esta causa, en la técnica se toman una serie de medidas para disminuir el rozamiento. Con este fin, utilizase con frecuencia el engrase (§ 11.7). Otra buena medida es sustituir el rozamiento de deslizamiento por el de rodadura, instalando rodamientos de bolas o rodillos.

### § 11.5. Rozamiento de rodadura

1. Sustituyamos en la instalación mostrada en la fig. 11.1, la barreta en resbalamiento por un cilindro que puede girar en su eje (fig. 11.3). Si en el eje se aprietan las grapas de forma que el cilindro no gire, él resbalará por la superficie de la tabla. En semejante caso, la fuerza de rozamiento no diferirá, de forma notable, de la fuerza de

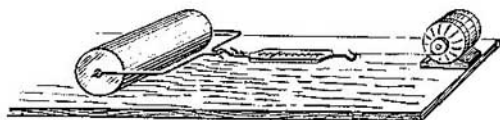


Fig. 11.3.

rozamiento de la barreta, ya que ésta, prácticamente, no depende del área de contacto de los cuerpos en rozamiento. Si, por lo contrario, las grapas se aflojan en el eje, el cilindro comenzará a rodar y la fuerza de rozamiento disminuirá bruscamente. Así, pues, *la fuerza de rozamiento de rodadura es mucho menor que la de rozamiento de deslizamiento.*

2. Los experimentos muestran que el rozamiento de rodadura es directamente proporcional a la fuerza de presión normal e inversamente proporcional al radio del cilindro (o la rueda):

$$T_{\text{rod}} = k \frac{Q}{r}, \quad (11.7)$$

Aquí,  $k$  es el coeficiente de rozamiento de rodadura; tiene la dimensión de longitud y en el Sistema Internacional de unidades se mide en metros. La expresión (11.7) puede ser sólo empleada en el caso, cuando el cilindro no patina por la superficie.

## § 11.6. Movimiento de los cuerpos bajo la acción de las fuerzas de rozamiento

1. Hasta el momento hemos considerado la fuerza de rozamiento como cierto obstáculo para el movimiento del cuerpo. Sin embargo, esto no es siempre así. En realidad, precisamente la presencia de rozamiento en reposo da la posibilidad de movimiento, digamos, a un hombre o automóvil por la superficie terrestre, a un tren o tranvía por los carriles, etc. En efecto, cuando una persona anda, entre la suela de su calzado y la tierra surge la fuerza de rozamiento en reposo. Esta fuerza es la que provoca su movimiento. Todos sabemos, cuán difícil es andar por el hielo, en el que la fuerza de rozamiento en reposo es muy pequeña.

2. Aclaremos el papel de la fuerza de rozamiento al virar un ciclista por un sector horizontal del camino. De la práctica sabemos que para virar es preciso inclinarse hacia el correspondiente lado, lo que provoca el giro automático del manillar.

Examinemos las fuerzas aplicadas sobre el ciclista al inclinarse éste a la izquierda (fig. 11.4). La fuerza de gravedad  $P$  y la fuerza de reacción del apoyo  $Q$ , ya no actúan por una misma recta. Bajo la acción de estas fuerzas, el ciclista comienza a virar en el plano vertical, lo que debía provocar el patinaje de las ruedas. Entonces, surge la fuerza de rozamiento en reposo  $T_{\text{rep}}$ , dirigida al mismo lado, hacia el que se inclina el ciclista.

Como la fuerza de rozamiento es perpendicular a la velocidad, ésta comunica al ciclista la aceleración normal  $a_n = v^2/r$ . De la ley fundamental de dinámica se desprende que la fuerza centrípeta es igual a la fuerza de rozamiento en reposo:

$$\frac{mv^2}{r} = T_{\text{rep}} \leq \mu_{\text{rep}} mg,$$

o bien

$$\frac{v^2}{r} \leq g \mu_{\text{rep}}.$$

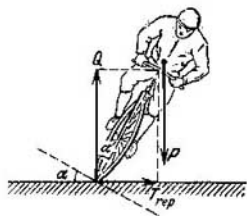


Fig. 11.4.

El ángulo de inclinación del ciclista (contando de la vertical), puede ser hallado de la condición, por la que la resultante de la fuerza de reacción y la fuerza de rozamiento debe estar dirigida a lo largo del cuerpo en movimiento:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T_{\text{rep}}}{Q} = \frac{mv^2}{rmg} = \frac{v^2}{rg} \leq \mu_{\text{rep}}$$

El ciclista no debe desviarse de la vertical a más del ángulo de rozamiento  $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \mu_{\text{rep}}$ . Con el fin de crear la posibilidad de vencer una curva cerrada a grandes velocidades, el velódromo (pista para ciclismo) se perfila, inclinándola a un ángulo que satisfaga la condición  $\operatorname{tg} \alpha \approx v^2/rg$ .

### § 11.7. Rozamiento interno (viscosidad)

1. La experiencia muestra, que en los líquidos o gases en movimiento surgen fuerzas de rozamiento interno. La presencia de semejantes fuerzas puede ser revelada con ayuda de la instalación representada en la fig. 11.5. De un fino hilo se cuelga un cilindro pesado. En el recipiente cilíndrico exterior, cuyo eje coincide con el del cilindro suspendido, se echa un líquido. Si ponemos en rotación el cilindro exterior, el interior girará a cierto ángulo. Esto significa, que el líquido en rotación actúa sobre la superficie del cilindro interior con una fuerza que se equilibra por la elasticidad del hilo torsionado. Esta fuerza depende de la distancia entre los cilindros interior y exterior, de la velocidad de rotación del cilindro exterior, del género del líquido y de su temperatura.

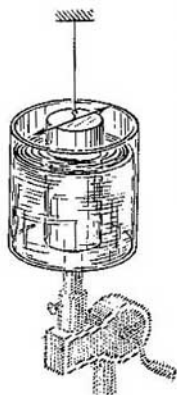


Fig. 11.5.

2. El fenómeno del rozamiento interno se describe del modo siguiente. Sea que entre dos planos hay una capa de líquido; el plano superior se mueve respecto del inferior a una velocidad  $v$  (fig. 11.6). Dividamos mentalmente el líquido en capas muy finas por medio de planos paralelos, dispuestos a una distancia  $\Delta z$  unos de otros. Las capas del líquido, que hacen contacto con los sólidos, se adhieren a ellos. Las capas intermedias tienen la distribución de velo-

idades representada en la fig. 11.6. Dicha distribución se caracteriza por el *gradiente de velocidad*, la magnitud  $\Delta v/\Delta n$ , que muestra con qué rapidez cambia el valor absoluto de la velocidad al desplazarse a la unidad de longitud en dirección perpendicular al vector de velocidad (correspondientemente a las capas del líquido).

Entre las capas del líquido en contacto, al haber gradiente de velocidad, surgen fuerzas dirigidas a lo largo del plano de contacto y que obstaculizan su desplazamiento relativo, es decir, las fuerzas de rozamiento interno. De acuerdo con

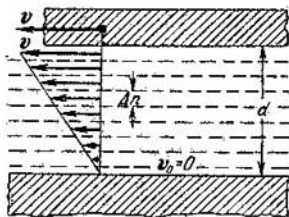


Fig. 11.6.

Newton, *las tensiones tangenciales de las fuerzas del rozamiento interno son proporcionales al gradiente de velocidad*:

$$\tau = \frac{T_{\text{int}}}{S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta n}, \quad (11.8)$$

donde  $\eta$  es el coeficiente de rozamiento interno o *viscosidad* del líquido.

La unidad de viscosidad en el SI es un *pascal-segundo*:

$$\text{Pa}\cdot\text{s} = \text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2,$$

su dimensión  $[\eta] = \text{L}^{-1}\text{MT}^{-1}$ .

3. Las fuerzas de rozamiento interno manifiéstanse no sólo en los líquidos, sino que también en los gases. Podemos cerciorarnos de esto, haciendo girar con rapidez la instalación, mostrada en la fig. 11.5, cuando entre los cuerpos se encuentra el aire (o cualquier otro gas). La viscosidad de los gases es muy pequeña, aproximadamente  $10^5$  veces menor que la de los líquidos.

Las fuerzas de rozamiento interno son mucho menores que las de rozamiento de deslizamiento. Por esta causa, para disminuir el rozamiento entre las partes en movimiento de los mecanismos y máquinas se emplea *el engrase*, o sea, una capa de un líquido viscoso, que llena el espacio entre las superficies en rozamiento y que las separa una de otra. Esto provoca la considerable disminución del rozamiento, lo que está ligado con la reducción del calenta-

miento y desgaste de las piezas. Pero hay que evitar la penetración del líquido en los embragues de fricción, entre la correa y la polea de una transmisión por correa, entre las ruedas motrices de la locomotora y el carril, etc., ya que en todos los casos enumerados precisamente el rozamiento es lo que sirve para transmitir el movimiento, por lo que la disminución del rozamiento es, sin duda alguna, maléfica.

### § 11.8. Movimiento de un cuerpo en un líquido

1. La práctica muestra que un cuerpo en movimiento por un líquido o gas ha de vencer cierta resistencia, que depende de las dimensiones y la forma del cuerpo, de la velocidad de su movimiento y de las propiedades del líquido o gas.

Consideramos el flujo de un líquido, que se mueve a una velocidad  $v$ , por cierto sistema de coordenadas, ligado con un cuerpo inmóvil. Del principio de relatividad sigue, que la fuerza con la que el flujo en movimiento actúa sobre el cuerpo, es completamente igual a la fuerza de resistencia que sufriría este cuerpo en movimiento a la misma velocidad por el líquido inmóvil.

2. El flujo del líquido, al chocar con el cuerpo, se deforma y fluye a su alrededor. En tal caso, las capas del líquido, junto al propio cuerpo, se adhieren a éste. A determinadas condiciones, se forma la llamada *capa límite*, región del líquido en la que la velocidad crece con gran rapidez desde cero hasta, aproximadamente, la velocidad del flujo no perturbado, es decir, que hay un elevado gradiente de velocidad. Al separarse la capa límite del cuerpo, tras él surgen torbellinos (fig. 11.7). Los fenómenos que transcurren en la capa límite y el carácter de los torbellinos, en grado considerable determinan la resistencia del líquido o del gas. No obstante, el análisis detallado de los fenómenos en la capa límite y el cálculo de las fuerzas de resistencia es un problema exclusivamente complicado. Podemos sólo emprender el intento de apreciar *el orden* de estas fuerzas y los parámetros fundamentales de los que dependen.

Vamos a considerar que la fuerza de resistencia consta de dos componentes: resistencia de presión y resistencia por rozamiento. La primera se define como *la diferencia de presiones* en los bordes delantero y posterior de un cuerpo aerodinámico, la segunda, como *las fuerzas de rozamiento*



*interno*, que aparecen a cuenta del elevado gradiente de velocidad en la capa límite. Para valorar la influencia de cada una de estas componentes apliquemos el método de dimensiones.

3. La fuerza de resistencia que se crea a causa de la diferencia de presiones en los bordes delantero y posterior del

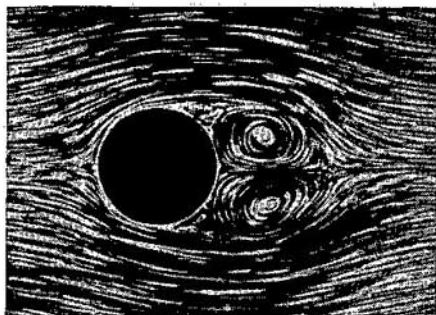


Fig. 11.7.

cuerpo aerodinámico, depende de la densidad del líquido, velocidad del flujo y el área máxima de la sección transversal, perpendicular al flujo:

$$R = \frac{C}{2} \rho^\alpha v^\beta S^\gamma. \quad (11.9)$$

Donde  $C$  es un coeficiente adimensional.

En toda igualdad la dimensión del primero y segundo miembros es igual, es decir,  $[R] = [\rho^\alpha v^\beta S^\gamma]$ . Haciendo  $[R] = LMT^{-2}$ ,  $[\rho] = L^{-3}M$ ,  $[v] = LT^{-1}$  y  $[S] = L^2$ , determinamos los exponentes desconocidos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Obtenemos

$$LMT^{-2} = L^{-3\alpha} M^\alpha L^\beta T^{-\beta} L^{2\gamma},$$

de donde  $\alpha = 1$ ;  $-3\alpha + \beta + 2\gamma = 1$ ,  $-\beta = -2$ , es decir,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$ .

La expresión para la resistencia de presión tiene la forma

$$R = CS \frac{\rho v^2}{2}. \quad (11.10)$$

El coeficiente  $C$ , que entra en esta expresión, depende de la forma del cuerpo  $o$ , con otras palabras, de sus cualidades aerodinámicas. Así, pues, por ejemplo, si para un disco redondo  $C = 1,1 \dots 1,2$ , para una bola  $C = 0,4 \dots \dots 0,2$ , y para un cuerpo aerodinámico en forma de gota  $C \approx 0,04$ , es decir, aproximadamente, 10 veces menor que para la bola y 30 veces menor que para el disco (fig. 11.8).

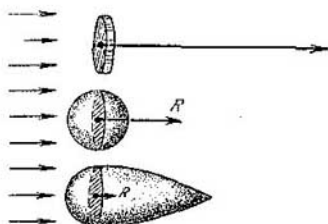


Fig. 11.8.

4. La fuerza del rozamiento viscoso, como se desprende de 11.8, debe ser función de la viscosidad, la velocidad y las dimensiones del cuerpo:

$$T = B\eta^m v^n L^k, \quad (11.11)$$

donde  $B$  es un coeficiente adimensional,  $L$ , la dimensión característica del cuerpo. El análisis de las dimensiones del primero y segundo miembros, nos da

$$LMT^{-2} = L^{-m} M^n T^{-m} L^n T^{-n} L^k,$$

de donde

$$m = 1, \quad -m + n + k = 1, \quad -m - n = -2,$$

por consiguiente,

$$m = n = k = 1.$$

La expresión para la resistencia por rozamiento será

$$T = B\eta v L. \quad (11.12)$$

El coeficiente  $B$ , lo mismo que  $C$ , con mayor frecuencia, es determinado de forma experimental. Para una bola, como mostró Stokes,  $B = 6\pi$ , mientras que la dimensión caracte-

rística es su radio. Así, pues para la bola]

$$T = 6\pi\eta vr. \quad (11.13)$$

5. La fuerza total de resistencia es una combinación bastante complicada de la resistencia de presión  $R$  y la resistencia por rozamiento  $T$ . Sin embargo, a velocidades muy pequeñas, la fuerza de rozamiento, proporcional a la primera potencia de la velocidad, será mucho mayor que la fuerza de presión, que es proporcional a la segunda potencia de la velocidad. A grandes velocidades, como es natural, es justo lo contrario.

Como los conceptos de velocidad «grande» y «pequeña» son suficientemente indeterminados, vamos a introducir un criterio especial para su apreciación. Con este fin, hallemos la razón de la resistencia de presión a la resistencia por rozamiento:

$$\frac{R}{T} = \frac{C}{2B} \frac{\rho v^2 S}{\eta v L}.$$

Desechando los coeficientes adimensionales  $C$  y  $B$  y considerando el área de la sección proporcional al cuadrado de la dimensión característica ( $S \sim L^2$ ), obtenemos

$$\frac{R}{T} \approx \frac{\rho v L}{\eta} \text{Re}. \quad (11.14)$$

El número adimensional  $\text{Re}$ , llamado *de Reynolds*, juega un papel exclusivo en hidro- y aerodinámica: precisamente él determina el valor de la resistencia.

Por ejemplo, para las corrientes «arrastrantes» cuando  $\text{Re} < 1$ , pueden ser despreciadas las fuerzas de presión y sólo tomar en consideración las fuerzas de rozamiento. Y a la inversa, para grandes valores del número de Reynolds, sólo hay que tener en cuenta las fuerzas de presión y desechar las de rozamiento.

### § 11.9. Caída de un cuerpo en un líquido o gas

1. Más arriba estudiamos la caída libre de un cuerpo, es decir, el movimiento de los cuerpos por la acción única de la fuerza de gravedad. Fue establecido que semejante movimiento es uniformemente acelerado y hallamos la correspondiente ley de movimiento (§ 8.2). Aquí, vamos a examinar la caída de un cuerpo en un medio que opone resisten-

cia, es decir, un líquido o gas. Aclaremos, al mismo tiempo, en qué condiciones es posible despreciar la resistencia del aire y considerar que la caída del cuerpo en el aire es libre.

2. Sobre un cuerpo que cae en un líquido o gas están aplicadas tres fuerzas: la fuerza de gravedad  $P$ , la fuerza de empuje de Arquímedes  $F_{Arq}$  y la fuerza de resistencia  $F_{res}$  (fig. 11.9). En este caso, la ley fundamental de dinámica se escribe del modo siguiente:

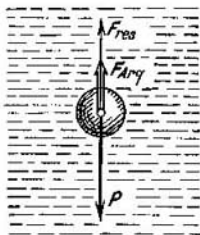


Fig. 11.9.

$$ma = P - F_{Arq} - F_{res}. \quad (11.15)$$

De las tres fuerzas sólo una es variable, la fuerza de resistencia, cuya magnitud crece con rapidez al aumentar la velocidad. La fuerza de gravedad y la de Arquímedes son magnitudes constantes. Es natural, que con el tiempo, a medida que crece la velocidad, la aceleración disminuye y llega un momento, cuando

ésta se hace igual a cero. A partir de este momento el cuerpo se moverá *uniformemente*. Así, pues, la caída de un cuerpo por un líquido o gas, sólo en la etapa inicial es acelerada; desde cierto momento el cuerpo cae a velocidad constante, que se denomina *estacionaria*.

3. La velocidad estacionaria  $v_{est}$  puede ser hallada de (11.15) para la condición  $a = 0$ :

$$P - F_{Arq} - F_{res}^{est} = 0. \quad (11.16)$$

Para realizar el cálculo correspondiente, es preciso valorar el orden del valor del número de Reynolds y elegir la expresión necesaria para la fuerza de resistencia.

Sea que, por ejemplo, una bola de hierro ( $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) de radio  $r = 2 \text{ mm}$ , cae en glicerina. La viscosidad de la glicerina  $\eta = 0,83 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , su densidad  $\rho_l = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . El número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho_l r v}{\eta} = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} v}{0,83} \approx 3v.$$

Sea  $Re < 1$ , entonces la fuerza de resistencia se calculará por la fórmula de Stokes (11.13).

Como sabemos, la fuerza de gravedad  $P = mg = 4/3\pi r^3 \rho g$ . La fuerza de empuje, según el principio de Arquímedes, es igual al peso

del líquido desalojado:  $F_{\text{Arq}} = P_1 = 4/3\pi r^3 \rho_l g$ . Sustituyendo en (11.16) y después de realizar las transformaciones correspondientes, obtenemos

$$v_{\text{est}} = \frac{2r^2 g (\rho - \rho_l)}{9\eta} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 9,8 \cdot 6,6 \cdot 10^3}{9 \cdot 0,83} \approx 0,07 \text{ m/s.}$$

Así, pues, aquí hemos hecho uso fundamentado de la fórmula de Stokes para calcular las fuerzas de resistencia, ya que  $Re = 0,21 < 1$ .

En los gases, por ejemplo en el aire, semejantes movimientos «arrastrantes» se producen para cuerpos muy pequeños, o sea, partículas de polvo, gotas de niebla, etc.

4. Con grandes números de Reynolds, la fuerza de resistencia está condicionada, en lo fundamental, por la resistencia de presión  $R$ . La ley fundamental de dinámica tomará la forma (menospreciando para los gases la fuerza de empuje  $F_{\text{Arq}} \ll P$ )

$$ma = mg - CS \frac{\rho_0 v^2}{2}, \quad (11.17)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad del gas.

Si un cuerpo pesado de pequeño tamaño cae de una pequeña altura, la fuerza de resistencia puede ser mucho menor que la de gravedad. Entonces puede despreciarse la resistencia y considerar que el cuerpo cae casi libremente. Si, por lo contrario, el cuerpo cae de una gran altura, la resistencia ya no puede ser despreciada y, a partir de cierto momento, el cuerpo caerá a velocidad estacionaria, lo que es fácil determinar de (11.17), haciendo  $a = 0$ :

$$v_{\text{est}} = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho_0}}. \quad (11.18)$$

Por ejemplo, las gotas de lluvia, que tienen forma de esfera ( $C = 0,4$ ) de radio cerca de  $r \approx 1 - 2$  mm, con una densidad del agua  $\rho \approx 1 \text{ kg/m}^3$ , caen a velocidad estacionaria independientemente de la altura de las nubes sobre la superficie terrestre (para el agua  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ):

$$v_{\text{est}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \pi r^3 \cdot \rho g}{3 \cdot C \cdot \pi r^2 \cdot \rho_0}} = \sqrt{\frac{8r\rho g}{3C\rho_0}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 9,8}{3 \cdot 0,4 \cdot 1}} \approx 8 \text{ m/s.}$$

5. El análisis de la fórmula (11.18) permite comprender el papel que juega el paracaídas. Cuando una persona cae sin paracaídas desde una altura considerable, tendrá una velocidad estacionaria del orden de varias decenas de metros por segundo. A semejante velocidad el choque con la superficie terrestre causaría su muerte. Al abrirse el paracaídas la fuerza de resistencia crece bruscamente: el área de la sección del paracaídas aventado por la corriente, es, aproximadamente, cien veces mayor que la de la persona que cae, mientras que el coeficiente de resistencia  $C$  del paracaídas

es varias veces mayor que la del hombre. Al aumentar el factor  $CS$  varias centenas de veces, la velocidad estacionaria disminuirá decenas de veces, hasta cerca de 3 . . . 4 m/s. A semejante velocidad el aterrizaje no es peligroso.

## Capítulo 12

### TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

#### § 12.1. Velocidad de la luz y ley de composición de velocidades

1. A mediados del siglo XIX fueron confeccionados métodos que permitieron con suficiente precisión, medir la velocidad de la luz. Resultó, que en el vacío ésta constituye  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s (con mayor precisión, véase el § 63.9). Surge



Fig. 12.1.

la siguiente pregunta: ¿en qué sistema de referencia tiene lugar este valor de la velocidad de la luz? Pues, como sabemos, hablar de la velocidad sin indicar el sistema de referencia, en general, es absurdo.

Si nos basamos en la ley clásica de composición de velocidades, llegamos a la conclusión de que en diferentes sistemas de referencia la velocidad de la luz debe ser diversa; por consiguiente, el valor dado de dicha velocidad debe referirse sólo a cierto sistema de referencia, ligado, por ejemplo, con la fuente de luz. Sobre esta base, podemos ofrecer el siguiente experimento.

Supongamos que un aparato, que permite medir la velocidad de la luz con suficiente grado de precisión, está en reposo en lo que concierne a la fuente de luz, dispuesta en el sistema de referencia  $xyz$ . En tal caso, el aparato registrará una velocidad de la luz igual a  $c$  (fig. 12.1).

Ubiquemos ahora el aparato en otro sistema de referencia que, en relación con el sistema  $xyz$ , se mueve como se muestra en las figs. 12.2, 12.3 y 12.4. Partiendo de la ley clásica de composición de velocidades, podríamos esperar que  $c' =$

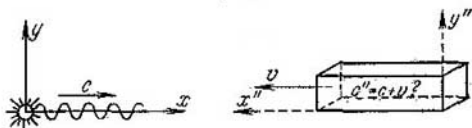


Fig. 12.2.

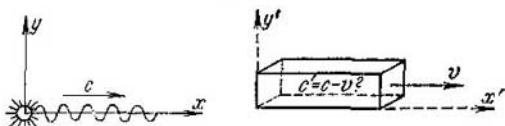


Fig. 12.3.

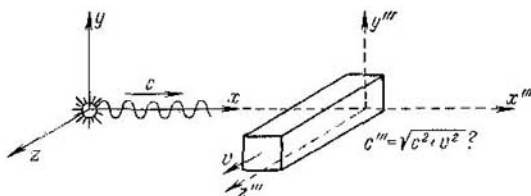


Fig. 12.4.

$= c - v$ ,  $c'' = c + v$ ,  $c''' = \sqrt{c^2 + v^2}$ , es decir, que las velocidades de la luz  $c'$ ,  $c''$  y  $c'''$  son diferentes.

2. El primer experimento para medir la velocidad de la luz en un sistema de referencia en movimiento, fue ejecutado por Michelson en 1881. Más adelante, experimentos análogos fueron realizados por una serie de científicos, en realidad, hasta los últimos tiempos, con la particularidad de que la precisión de las mediciones crecía, como es lógico, cada vez más. Se manifestó que el experimento da *resultados negativos*: con grado muy elevado de exactitud en todos los sistemas de referencia, independientemente del valor y la dirección de la velocidad de su movimiento, la velocidad de la luz

(en el vacío) es la misma que en el sistema de referencia ligado a la fuente, es decir,  $c' = c'' = c''' = c$ .

Este resultado significa que la ley clásica de composición de velocidades tiene un ámbito reducido de aplicación. En particular, no es válida para describir fenómenos relacionados con la propagación de la luz. Pero la ley clásica de composición de las velocidades en un corolario de las transformaciones de Galileo; por consiguiente, estas últimas también tienen aplicación limitada.

3. Como la invariancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas inerciales de referencia es un hecho experimental establecido con seguridad, pero, como al mismo tiempo, este hecho no concuerda con las transformaciones de Galileo, surgió la necesidad de la revisión crítica de las ideas sobre las que se basan estas transformaciones. Este problema fue resuelto el año 1905 por A. Einstein. Pero para ello, fue necesaria la revisión radical de nuestras representaciones acerca del espacio y el tiempo.

Einstein mostró que al deducir las transformaciones de Galileo, en forma implícita, fueron introducidas dos tesis, que parecían tan evidentes, que se consideró innecesario fundamentarlas:

a) se suponía que la simultaneidad de dos acontecimientos es un concepto absoluto, es decir, dos acontecimientos simultáneos en un sistema de referencia, se consideraba que lo eran también en otro sistema; de aquí se desprendía que los relojes situados en sistemas inerciales de referencia tomados al azar, registran el mismo tiempo, hablando brevemente, el tiempo en todos los sistemas inerciales de referencia transcurren del mismo modo;

b) se suponía que la largura de una barra era la misma en todos los sistemas inerciales de referencia (§ 2.4).

En realidad estas tesis resultaron no ser universales, sino que la primera aproximación, justa sólo en la mecánica newtoniana.

## § 12.2. Postulados fundamentales de la teoría especial de la relatividad

La teoría especial de la relatividad de otro modo es denominada teoría relativista. En la base de su enunciación yacen dos principios que se consideran postulados. Ambos han sido certificados con seguridad experimentalmente.



1. *Principio de la relatividad.* Todos los sistemas inerciales de referencia son equivalentes, en todos los sistemas inerciales todos los fenómenos de la naturaleza, y no sólo los mecánicos, transcurren del mismo modo.

2. *Principio de invariancia de la velocidad de la luz.* En todos los sistemas inerciales la velocidad de la luz en el vacío es idéntica e igual a  $c$ .

Veamos qué corolarios se deducen de estas tesis fundamentales.

### § 12.3. Relatividad de la simultaneidad y la longitud

1. Con el fin de determinar el momento de tiempo cuando en el punto dado del espacio  $A$  ocurre cierto acontecimiento, hay que comparar éste con las indicaciones del reloj situado en el contorno de dicho punto. Lo mismo se refiere a cualquier otro punto  $B$ . No obstante, la comparación de los dos relojes tiene sentido si ellos están sincronizados. Esta afirmación es tan evidente que en el transcurso de muchos años nadie planteó la pregunta: ¿en qué consiste el procedimiento físico de sincronización?

Einstein propuso sincronizar los relojes mediante señales luminosas, partiendo del siguiente experimento mental. Por definición, suponemos que el tiempo durante el que la señal luminosa va de  $A$  a  $B$  es igual al tiempo que pasa al ir la señal de  $B$  a  $A$ . Sea que la señal sale de  $A$  en el lapso  $t_A^{sal}$ , llega a  $B$  en el momento de tiempo  $t_B$ , se refleja y retorna al punto  $A$  en el momento de tiempo  $t_A^{leg}$ . Entonces, de acuerdo con la definición,

$$t_B - t_A^{sal} = t_A^{leg} - t_B.$$

Con otras palabras, el reloj en el punto  $B$  debe mostrar el tiempo

$$t_B = \frac{1}{2} (t_A^{sal} + t_A^{leg}).$$

Durante la realización de semejante procedimiento de sincronización, se cumplen dos condiciones:

a) condición de simetría: si el reloj  $A$  funciona de manera sincrónica con el reloj  $B$ , éste es sincrónico con el reloj  $A$ ;

b) condición de transitividad: si los relojes  $A$  y  $B$  están sincronizados, y el reloj  $B$  es sincrónico con el reloj  $C$ , el reloj  $A$  también marchará de modo sincrónico con el reloj  $C$ .

2. De los dos postulados fundamentales de la teoría de la relatividad sigue que *dos acontecimientos, simultáneos en cierto sistema de referencia, no son simultáneos en otro sistema.*

Para demostrar esta tesis, que a primera vista parece ser paradójica, examinemos el siguiente experimento. Sea que un sistema de referencia está relacionado con la Tierra y el segundo, con un vagón en movimiento rectilíneo uniforme (fig. 12.5). Marquemos en la Tierra los puntos  $A$ ,  $B$  y  $M$ , con la particularidad de que  $AM = BM$ , mientras que en

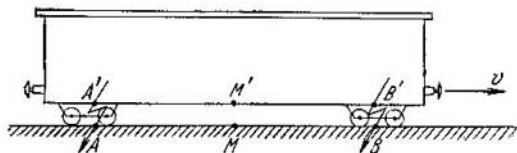


Fig. 12.5.

el vagón se marcan, correspondientemente, los puntos  $A'$ ,  $B'$ ,  $M'$  de forma que  $A'M' = B'M'$ . Sea, que en el momento cuando los puntos en la Tierra y en el vagón coinciden, en los puntos  $A$  y  $B$  ocurre cierto acontecimiento, por ejemplo, caen dos rayos.

Es evidente, que si la luz de las dos ráfagas llega al punto  $M$  simultáneamente, al punto  $M'$  llegará antes la luz de  $B'$  y, después, de  $A'$ . Ahora analicemos estos acontecimientos desde el punto de vista de los observadores que se encuentran en los dos sistemas de referencia.

*En la Tierra:* la distancia  $AM = BM$ . La velocidad de la luz es igual en todas las direcciones. Las señales de los dos acontecimientos llegan al punto  $M$  simultáneamente. Por consiguiente, *los acontecimientos en los puntos  $A$  y  $B$  han transcurrido al mismo tiempo.*

*En el vagón:* la distancia  $A'M' = B'M'$ . La velocidad de la luz es igual en todas las direcciones. La señal del punto  $B'$  llegó antes que la del punto  $A'$ . Es decir, *el acontecimiento en el punto  $B'$  ocurrió antes que en el punto  $A'$ .* Si el vagón se moviera de derecha a izquierda, obtendríase el resultado inverso: el acontecimiento en  $B'$  ocurriría más tarde que en  $A'$ .

Así, pues, la noción de simultaneidad tiene sentido relativo y en diversos sistemas inerciales de referencia el tiempo transcurre de manera distinta.

3. Notemos que en los razonamientos aducidos hemos utilizado sólo dos principios: consideramos que los dos sistemas de referencia son equivalentes (principio de la relatividad) y que la luz se mueve en todas las direcciones a la misma velocidad (principio de invariancia de la velocidad de la luz). Otras hipótesis no han sido introducidas.

En lo que se refiere a la física clásica, sin ningún fundamento se suponía que en todos los sistemas de referencia el tiempo transcurría de igual forma. De aquí se obtenía la ley clásica de composición de velocidades, que contradice a la ley de invariancia de la velocidad de la luz, establecida de modo experimental.

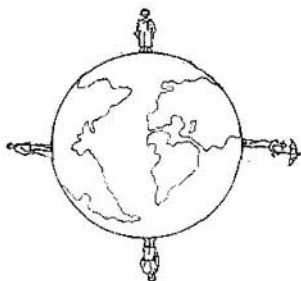


Fig. 12.6.

4. En ocasiones preguntan: ¿son o no *en realidad* simultáneos los acontecimientos en los puntos A y B? Por lo visto, semejante pregunta no tiene sentido. Responder a la pregunta de lo que ocurre *en realidad*, significa de hecho indicar un sistema de referencia preponderante, pero como sabemos, en la naturaleza no existe tal sistema de referencia.

Hablando en general, no siempre puede darse respuesta a la pregunta de lo que ocurre en realidad, ya que cuando en Moscú es la mañana, en Vladivostok es la tarde, mientras que en San Francisco, la noche. En verdad es absurdo preguntar qué parte del día es ahora: ¿mañana, tarde o noche? Estas son nociones relativas, por lo que la respuesta depende del punto de la Tierra donde está el observador. En el mismo grado son relativos los conceptos «arriba» y «abajo» para las personas que habitan en puntos opuestos del globo terrestre (fig. 12.6).

De la misma manera es relativa la noción de simultaneidad: no se puede responder a la pregunta de la simultaneidad o no simultaneidad de dos acontecimientos sin indicar

el sistema de referencia, con relación al cual se resuelve el problema.

5. ¿Por qué en la física clásica menospreciamos esta propiedad del tiempo y consideramos que el tiempo es invariante, es decir, una magnitud que no depende del sistema de referencia?

La cuestión reside en que en física clásica operamos con velocidades tan pequeñas en comparación con la de la luz, que podemos despreciar el retardo de las señales y considerar que la luz se propaga, prácticamente, de forma instantánea, a una velocidad infinitamente grande. En tal caso, los observadores que se encuentran en la superficie terrestre y en el vagón, no advertirán ninguna diferencia en la llegada de las señales de los puntos *A* y *B* (fig. 12.5), por lo que los dos observadores llegarán a la misma conclusión acerca de la simultaneidad o no simultaneidad de los acontecimientos.

Así, pues, la relatividad de la simultaneidad se desprende de que la velocidad de propagación de la luz es finita y, en general, de que la velocidad de transmisión de cualquier interacción también es finita. El hecho experimental de carencia de cualesquiera procesos, que se propagan a velocidades infinitamente grandes, fue lo que Einstein puso en la base de la teoría de la relatividad.

6. Más arriba hemos definido la longitud de una barra como la diferencia de las coordenadas de su comienzo y final *medidas simultáneamente* (§ 2.4). Sin embargo, la noción de simultaneidad tiene sentido relativo y los acontecimientos que en un sistema de referencia son simultáneos, no lo serán en otro sistema. De esto sigue, que *la largura de la barra en diversos sistemas de referencia será diferente* (véase más adelante el § 12.8). No podemos hablar de la longitud de la barra sin indicar el sistema de referencia, en relación con el cual se midió dicha dimensión. Esto en igual grado no tiene sentido, como hablar de la velocidad del pasajero sin indicar el sistema de referencia: la velocidad del pasajero respecto del vagón, no es igual a la velocidad en lo que concierne a la Tierra.

Así, pues, *en la teoría de la relatividad, los intervalos de tiempo entre los acontecimientos y las longitudes de los segmentos son nociones relativas, que tienen distintos valores en diferentes sistemas inerciales de referencia.*

## § 12.4. Transformaciones relativistas de las coordenadas. Ley relativista de composición de velocidades

1. Como fue mostrado más arriba, las transformaciones de Galileo no concuerdan con el hecho, establecido experimentalmente, de la constancia de la velocidad de la luz. Por esta razón, es preciso deducir nuevas transformaciones de las coordenadas, al pasar de un sistema inercial de referencia a otro.

Consideremos el sistema de coordenadas  $xyz$  relacionado con la Tierra y el sistema de coordenadas  $x'y'z'$ , ligado con un vagón (véase la fig. 2.1). En este caso, a lo largo del eje

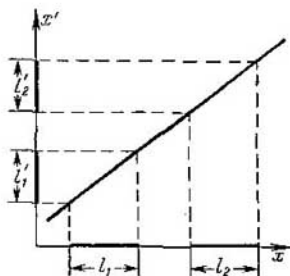


Fig. 12.7.

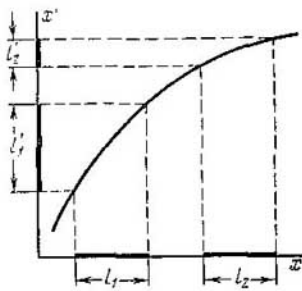


Fig. 12.8.

de ordenadas y del eje de la  $z$ -coordenada no hay movimiento, de donde se desprende que  $y' = y$  y  $z' = z$ , lo mismo que en las transformaciones de Galileo.

El espacio libre es homogéneo e isótropo. Esto quiere decir que las transformaciones de las coordenadas son funciones lineales (fig. 12.7). En efecto, como vemos en la figura, en semejante caso la longitud del segmento no depende de la región del espacio en que éste se encuentra: de  $l_1 = l_2$  se deduce que  $l'_1 = l'_2$ .

Si la transformación fuera no lineal (fig. 12.8) de  $l_1 = l_2$  seguiría que  $l'_1 \neq l'_2$ , o sea, que la longitud del segmento dependería de la región del espacio en la que él se encuentra. Tal hecho señalaría la perturbación de la homogeneidad del espacio.

Es natural, que razonamientos análogos son también justos para el tiempo.

Por lo tanto, vamos a buscar las transformaciones relativistas en forma de funciones lineales:

$$x' = Ax + Bt, \quad t' = Mx + Nt. \quad (12.1)$$

Aquí  $A$ ,  $B$ ,  $M$  y  $N$  son constantes que debemos hallar.

2. El desplazamiento a lo largo del eje de abscisas por el vagón

$$\begin{aligned} \Delta x' = x'_2 - x'_1 &= A(x_2 - x_1) + B(t_2 - t_1) = \\ &= A \Delta x + B \Delta t. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Para el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos, por analogía, tenemos

$$\Delta t' = M \Delta x + N \Delta t. \quad (12.3)$$

Dividiendo (12.2) por (12.3) y, tomando en consideración que la velocidad del punto respecto del vagón (a lo largo del eje de abscisas)

$$u' = \Delta x' / \Delta t', \quad (12.4)$$

y la velocidad de ese mismo punto acerca de la Tierra

$$u = \Delta x / \Delta t, \quad (12.5)$$

obtenemos la expresión de la ley de composición de velocidades (a lo largo del eje de abscisas):

$$u' = \frac{Au + B}{Mu + N}. \quad (12.6)$$

3. Hagamos uso de (12.6) para determinar las constantes, introducidas en las expresiones (12.1). Con este fin, examinemos los casos particulares siguientes:

a) Sea que un punto material está en reposo en relación con el vagón. Entonces  $u' = 0$ ,  $u = v$ . Sustituyendo estas igualdades en (12.6), tenemos  $0 = \frac{Av + B}{Mv + N}$ , de donde

$$B = -Av. \quad (12.7)$$

b) Sea que respecto de la Tierra el punto está en reposo. Entonces  $u' = -v$ ,  $u = 0$ . Realizando las anteriores transformaciones y haciendo uso de (12.7), tenemos  $-v = -Av/N$ , de donde

$$N = A. \quad (12.8)$$

c) Sea que en lugar de un punto material, por el vagón se propaga una onda luminosa. De acuerdo con el segundo postulado de la teoría de la relatividad —el principio de invariancia de la velocidad de la luz— obtenemos

$$u' - u = c. \quad (12.9)$$

Sustituyendo en (12.6) y empleando los resultados de (12.7) y (12.8), tenemos  $c = \frac{Ac - Av}{Mc + A}$ , de donde

$$M = -Av/c^2. \quad (12.10)$$

4. Ponemos en (12.6) los valores obtenidos de  $B$ ,  $M$  y  $N$  y obtenemos la ley relativista de composición de velocidades (a lo largo del eje de abscisas):

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \quad \text{o bien} \quad u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}. \quad (12.11)$$

## § 12.5. Carácter limitado de la velocidad de la luz

1. De la ley relativista de composición de velocidades se desprende el carácter limitado de la velocidad de la luz: *en ningún sistema de referencia un cuerpo (o señal) puede moverse a una velocidad mayor que la de la luz en el vacío.*

En efecto, sea que un cuerpo se mueve a la velocidad  $u'$ , que no supera la de la luz en el vacío, respecto de un vagón:  $0 < u' < c$ . A su vez, el vagón está en movimiento con relación a la Tierra a la velocidad  $v$ , también menor que la de la luz  $0 < v < c$ . En tal caso, es fácil mostrar que la velocidad del cuerpo respecto de la Tierra (para cualesquiera  $u'$  y  $v$  menores que  $c$ ) también será más pequeña que la velocidad de la luz.

Para la demostración hallamos la diferencia entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad del cuerpo en relación con la Tierra:

$$c - u = c - \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{(c - v)(c - u')}{c(1 + u'v/c^2)}. \quad (12.12)$$

Como hemos supuesto desde el principio que la velocidad del cuerpo  $u'$  y la velocidad del propio sistema  $v$  es menor que  $c$ , entonces  $c - u > 0$ . Así, pues,

$$u < c. \quad (12.13)$$

2. El resultado obtenido es, sin duda, justo para las partículas de la materia. En realidad, siempre existe un sistema de referencia, en el que la partícula se mueve a una velocidad menor que la de la luz en el vacío (por ejemplo, está en reposo, o sea,  $u' = 0$ ). Pero entonces, la partícula en cualquier otro sistema de referencia estará en movimiento más lento que la señal luminosa en el vacío.

Notemos, que durante la deducción, no hicimos ninguna suposición relacionada con la estructura o propiedades de las partículas de la materia, sino que sólo nos basamos en los postulados fundamentales. Por consiguiente, el resultado obtenido es por completo general, apto para cualesquiera partículas de la materia, para todo cuerpo.

Así, pues, la velocidad de la luz en el vacío es la mayor velocidad en la naturaleza.

## § 12.6. Transformaciones de Lorentz

1. Las transformaciones de las coordenadas, que corresponden a los postulados fundamentales de la teoría de la relatividad, fueron obtenidas por primera vez por Lorentz.

Para deducir las transformaciones que buscamos, sustituyamos en la expresión (12.1) los valores de las constantes  $B$ ,  $M$  y  $N$ ; obtendremos

$$x' = A(x - vt), \quad t' = A(t - vx/c^2). \quad (12.14)$$

Del principio de relatividad se desprende la total equivalencia de los dos sistemas de referencia: puede considerarse en reposo el sistema de coordenadas ligado al vagón; entonces el sistema de coordenadas relacionado con la Tierra, se moverá respecto del vagón a la velocidad  $v' = -v$  (reciprocidad de las transformaciones de Lorentz).

Las transformaciones de coordenadas toman la forma

$$x = A(x' + vt'), \quad t = A(t' + vx'/c^2). \quad (12.15)$$

Sustituyendo las expresiones (12.15) en (12.14) tenemos

$$x' = A^2(x' + vt' - vt' - v^2x'/c^2),$$

de donde, después de simplificar, obtenemos

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.16)$$



Definitivamente, las transformaciones de Lorentz tomarán la forma

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.17)$$

o bien

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.18)$$

2. En la mecánica clásica, el espacio y el tiempo se consideran nociones que no dependen entre sí. De las transformaciones de Lorentz se desprende la estrecha ligazón entre las coordenadas espaciales y temporales: no sólo las coordenadas espaciales dependen del tiempo (lo que vimos en las transformaciones de Galileo), sino que también el tiempo es función de las coordenadas espaciales, así como de la velocidad de movimiento del sistema de referencia.

3. Las transformaciones de Lorentz y la ley relativista de composición de velocidades, corresponden al principio de inercia.

En efecto, si un cuerpo está en movimiento uniforme y rectilíneo respecto de un sistema inercial de referencia (digamos, con relación al vagón), también estará en movimiento rectilíneo y uniforme, en lo que se refiere a cualquier otro sistema inercial: de  $u' = \text{const}$  y  $v = \text{const}$  se deduce, de acuerdo con (12.11), que también  $u = \text{const}$ .

## § 12.7. Longitud del segmento

1. Supongamos que una barra es paralela al eje de abscisas y yace en el sistema de referencia  $xyz$  (por ejemplo, en la superficie terrestre). Su longitud en el sistema de referencia en el que está en reposo, será designada por  $l_0 = x_2 - x_1$  (véase la fig. 2.2 en la pág. 44). En el sistema de referencia  $x'y'z'$  que se mueve respecto del sistema  $xyz$  a la velocidad  $v$  (por ejemplo, en un vagón), la longitud de la barra  $l$  se define de la siguiente manera:  $l = x'_2 - x'_1$  para la condición  $t'_2 = t'_1$ . De las transformaciones de Lorentz (12.18) sigue que

$$x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

de donde

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1 + v'(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.19)$$

Haciendo, según el planteamiento,  $t'_2 = t'_1$ , tenemos

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (12.20)$$

2. Llamemos la longitud de la barra en el sistema de referencia, en el que está en reposo, *longitud propia*  $l_0$ . De (12.20) se deduce que la longitud de la barra en cualquier otro sistema de referencia, respecto del cual está en movimiento, es menor que la longitud propia.

Indiquemos que en diversos sistemas de referencia, en movimiento a diferentes velocidades en relación con el sistema de referencia en el que la barra está en reposo, la longitud de ésta es distinta. De aquí se desprende explícitamente, que la variación relativista de longitud no se provoca por cualesquiera deformaciones de la barra (o por otros procesos análogos).

## § 12.8. Intervalo de tiempo entre dos acontecimientos

1. Llámense *acontecimientos* cualesquiera fenómenos que ocurren en la naturaleza.

Sea que en el punto  $A$ , en el que está el cuerpo que nos interesa, en el momento de tiempo  $t_1$  ocurre cierto acontecimiento, en tanto que en el momento de tiempo  $t_2$ , otro. En tal caso, el intervalo de tiempo entre estos acontecimientos  $\tau_0 = t_2 - t_1$ , que será medido en el sistema de referencia  $xyz$ , ligado al cuerpo que se investiga (*tiempo propio*). Hallemos el intervalo de tiempo entre estos mismos acontecimientos en el sistema de referencia  $x'y'z'$ , en movimiento respecto de  $xyz$  a la velocidad  $v$  (a lo largo del eje de abscisas).

Empleando la expresión (12.17) y teniendo en cuenta que los acontecimientos ocurren en un mismo punto  $A$ , es decir,  $x_2 = x_1$ , tenemos

$$\tau = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.21)$$

Hemos obtenido un resultado de enorme importancia: *el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos tiene el menor valor en el sistema de referencia, ligado con el punto  $A$ , donde ocurrieron los acontecimientos que estudiamos.* En cualquier otro sistema de referencia, este intervalo de tiempo será

mayor. Con otras palabras, *en el sistema de referencia en movimiento el tiempo se retarda en comparación con el sistema de referencia en el que transcurren los acontecimientos y que hemos considerado inmóvil.*

2. El retraso del tiempo en el sistema de referencia en movimiento permite explicar un curioso fenómeno.

Bajo la acción de la radiación cósmica en el límite de la atmósfera surgen partículas llamadas *muones* (§ 83.3). Más tarde, estas partículas son detectadas en la superficie terrestre. La extensión de la atmósfera es de un orden de 300 km. Incluso si los muones se desplazan a una velocidad muy próxima a la de la luz, el tiempo de su movimiento por la atmósfera sería cerca de  $10^{-3}$  s. Sin embargo, los experimentos con los muones muestran que estas partículas son inestables y se desintegran de manera espontánea. La duración de la vida de un muón es de  $10^{-8}$  s, es decir, ¡mil veces menor que el tiempo de su paso por la atmósfera hacia la superficie de la Tierra! ¿Cómo explicar semejante contradicción?

Pero la cuestión consiste en que no hay ninguna clase de contradicción. En efecto, en el sistema de referencia ligado con el muón, la duración de su vida es igual a  $10^{-8}$  s. Por lo contrario, el sistema de referencia relacionado con la Tierra, se mueve respecto del muón a una velocidad próxima a la de la luz. En este sistema el tiempo está retardado y el muón vive cerca de  $10^{-3}$  s, o sea, mil veces más que en el sistema de referencia ligado al muón.

### § 12.9. Intervalo de tiempo entre causa y efecto

1. En la naturaleza se tropieza, con frecuencia, con acontecimientos ligados entre sí mediante un tipo determinado de enlace, que solemos llamar de causa y efecto. Por ejemplo, para que la bala llegue al blanco, antes hay que disparar. En este caso, el disparo es el acontecimiento que sirve de causa, mientras que caer en el blanco, es el efecto.

Con esto, hay que hacer notar dos propiedades características de este tipo de enlace entre los fenómenos:

- a) siempre transcurre primero el acontecimiento que es la causa, después, el efecto;
- b) si de algún modo se elimina el acontecimiento, que sirve de causa, no ocurriría otro acontecimiento que es el efecto.

Mostremos que aunque en la teoría de la relatividad, el tiempo transcurre de diferente manera en diversos sistemas de referencia, la sucesividad según el tiempo de la causa y el efecto se conserva.

2. Sea que en un sistema de referencia ligado con la Tierra, se produjo un disparo en el momento de tiempo  $t_1$

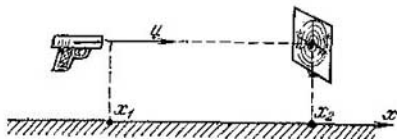


Fig. 12.9.

en un punto con coordenada  $x_1$ , en tanto que la bala cayó en el blanco con coordenada  $x_2$  en el momento de tiempo  $t_2$  (fig. 12.9). En este sistema de referencia, la velocidad de la bala será

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Hallemos el intervalo de tiempo entre estos dos acontecimientos en un sistema de referencia en movimiento a lo largo del eje de abscisas a una velocidad  $v$ . De la expresión (12.17), obtenemos

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right). \quad (12.22)$$

Las velocidades de la bala  $u$  y de movimiento del nuevo sistema de referencia  $v$  son menores que la velocidad de la luz en el vacío. Por esta causa,  $1 - uv/c^2$  es un número positivo. El signo de la diferencia  $t'_2 - t'_1$  coincide con el signo de la diferencia  $t_2 - t_1$ .

Pero  $t_2 > t_1$ , ya que en el sistema de referencia ligado con la Tierra, la bala cayó en el blanco *después del disparo*. Precisamente por esto, en cualquier otro sistema de referencia  $t'_2 > t'_1$ .

Así, pues, aunque el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos en diferentes sistemas de referencia es distinto, *el acontecimiento que es la causa ocurre en todos los sistemas de referencia antes que el acontecimiento que es el efecto*.

## § 12.10. Correlación entre la mecánica relativista y newtoniana

1. La mecánica newtoniana y, en particular las transformaciones de Galileo, se basaban en la suposición de que en todos los sistemas de referencias el tiempo transcurre del mismo modo. Arriba hemos mostrado que dicha suposición es errónea. Es natural que surja la pregunta: ¿cómo pudo esta teoría aplicarse durante varios siglos en la práctica y dar *correctos* resultados? Más aún, incluso en la actualidad se realizan con éxito los cálculos del movimiento de los cuerpos celestes, las naves cósmicas, los automóviles, barcos, etc., basándose en las leyes de la *mecánica newtoniana*, hacemos uso de las transformaciones de Galileo y ¡siempre obtenemos perfectos resultados! ¿Hay o no aquí alguna contradicción?

Resulta que no hay contradicciones. Se trata de que todos los cuerpos enumerados se mueven a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz en el vacío. En semejante caso, las fórmulas relativistas, con una precisión suficientemente alta para fines prácticos, pasan de modo automático a las newtonianas.

2. En efecto, sea que un cuerpo está en movimiento a una velocidad  $v = 10$  km/s, respecto de la Tierra. Esta es la velocidad de un cohete cósmico. Por regla, en la práctica de ingeniería se tratan cuerpos que se mueven con mucha más lentitud. Liguemos a este cuerpo un nuevo sistema de referencia. Las correlaciones exactas entre las coordenadas y el tiempo en los dos sistemas de referencia se expresan con ayuda de las transformaciones de Lorentz. Sin embargo, es fácil cerciorarse de que haciendo uso de las transformaciones de Galileo, prácticamente, obtenemos iguales resultados.

En realidad, en nuestro caso, la razón

$$\frac{v^2}{c^2} = \left( \frac{10^4}{3 \cdot 10^8} \right)^2 \approx 10^{-9}.$$

Por consiguiente, para diferenciar de la unidad la magnitud  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , es necesario un instrumento de medida que permita medir con una precisión ¡hasta de nueve cifras significativas! En la práctica, empleamos instrumentos mucho menos precisos. Lo mismo podemos decir de la magnitud  $vx/c^2$ , que de modo insignificante difiere de cero.

Pero si en las transformaciones de Lorentz, se hace  $\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1$  y  $vx/c^2 \approx 0$ , éstas se convierten automáticamente en las transformaciones de Galileo:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx x - vt, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx t.$$

De esta forma, al analizar los fenómenos que transcurren a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz en el vacío, pueden emplearse exitosamente las transformaciones de Galileo y, por consiguiente, todas las demás fórmulas de la mecánica newtoniana. El empleo de las transformaciones de Lorentz dará, en estos casos, los mismos resultados, aunque los cálculos serán más complicados.

Hemos obtenido un resultado de importancia de principio: *la teoría de la relatividad contiene la mecánica newtoniana como el caso límite de mecánica de los fenómenos, cuya velocidad es considerablemente menor que la velocidad de la luz en el vacío.*

3. En este ejemplo vemos las vías de desarrollo de las ciencias. Toda teoría científica describe cierto círculo de fenómenos con determinado grado de precisión, que depende del nivel de desarrollo de las ciencias, así como del nivel de fomento de la técnica de mediciones. Durante el desarrollo posterior de las ciencias es abarcado un ámbito más amplio de fenómenos. Al mismo tiempo, crece la exactitud de nuestras mediciones.

En una determinada etapa, puede resultar que la antigua teoría ya no puede explicar los fenómenos descubiertos. Las deducciones de la antigua teoría entran en contradicción con los nuevos hechos. En semejantes casos, se crea una teoría que, con frecuencia, está basada en principios nuevos en total. No obstante, la nueva teoría no renuncia de la antigua, como si ésta fuera errónea. Incluye en sí los resultados de la antigua teoría, como el caso límite para el círculo de fenómenos, que también antes eran descritos en forma satisfactoria. En la ciencia esto se denomina *principio de correspondencia*.

Con frecuencia, la crítica de los fundamentos de principio de la antigua teoría es en suficiente grado dificultosa, ya que hay que vencer representaciones que parecen «evidentes», «que se sobreentienden por sí mismas», por lo que, al parecer, son verídicas. Sin embargo, tarde o temprano, vence la teoría más progresiva. En semejantes casos, las

posteriores generaciones no comprenden, con frecuencia, la causa que provocó las anteriores discusiones.

Lo mismo pasó con la teoría de la relatividad. Su aparición provocó violentas discusiones. Muchos científicos no pudieron desechar las representaciones habituales, por lo que no comprendieron su esencia. Reaccionarios de todos los «colores» lucharon con ensañamiento contra ella, intentando demostrar que la teoría de la relatividad va en contra del «sentido común». No obstante, el posterior desarrollo de las ciencias, confirmó la veracidad tanto de sus nociones iniciales, como de todas sus deducciones.

### Capítulo 13

## MASA, CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y FUERZA EN LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

### § 13.1. Masa relativista y cantidad de movimiento

1. En la mecánica newtoniana se suponía que la masa de un cuerpo tiene el mismo valor en diversos sistemas inerciales de referencia. Los experimentos con cuerpos, cuya velocidad de movimiento es mucho menor que la de la luz, al parecer, confirmaban este concepto: a dichas velocidades no se consigue revelar ninguna dependencia entre la masa y la velocidad. Precisamente por esto, en todos los cálculos anteriores hemos supuesto que la masa del cuerpo es una magnitud constante.

Consideremos cómo se moverá un cuerpo bajo la acción de una fuerza constante, aplicando la anterior suposición. Para simplificar los cálculos posteriores, vamos a suponer que para  $t_1 = 0$  la velocidad inicial  $u_1 = 0$ , o sea, que el cuerpo no tiene velocidad inicial. En tal caso, la ley fundamental de dinámica (7.2) toma la forma

$$F = mu/t \quad \text{o bien} \quad u = Ft/m. \quad (13.1)$$

Para la suposición de la constancia de la fuerza y la masa  $a = F/m = \text{const.}$  Por consiguiente, la velocidad del cuerpo

será directamente proporcional al tiempo durante el que la fuerza actúa

$$u = at. \quad (13.2)$$

Esto significa que con una acción bastante prolongada de la fuerza constante sobre el cuerpo, la velocidad de su movimiento crecerá ilimitadamente.

2. Semejante resultado contradice la teoría de la relatividad. En efecto, una de las deducciones fundamentales de dicha teoría estipula que *a una velocidad superior a la de la luz en el vacío no puede moverse ningún cuerpo* (§ 12.6).

De esta manera, debemos transformar la ley fundamental de dinámica, para que las deducciones que de ella se des-

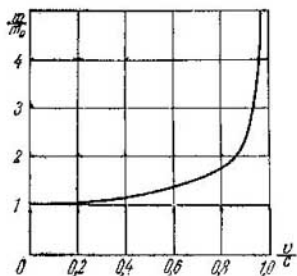


Fig. 13.1.

prenden concuerden con las deducciones de la teoría de la relatividad. La cuestión consiste en que, para ello, hay que considerar que *la masa del cuerpo es diferente en distintos sistemas de referencia*. Esto se expresa mediante la igualdad (fig. 13.1)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (13.3)$$

Aquí,  $m_0$  es la masa del cuerpo en el sistema de referencia con respecto al cual está en reposo; tal magnitud

denomínase *masa propia* o *masa en reposo*; la magnitud  $m$  es la masa de ese mismo cuerpo en el sistema de referencia, con relación al cual está en movimiento a la velocidad  $u$ ; semejante magnitud se llama *masa relativista* (§ 15.8).

3. En la teoría de la relatividad la cantidad de movimiento se define de la misma forma que en la mecánica newtoniana:

$$p = mu. \quad (13.4)$$

Pero a diferencia de dicha mecánica, la masa que entra en la igualdad (13.4), no es la masa en reposo, sino la relativista.



### § 13.2. Ley fundamental de dinámica en la teoría de la relatividad

1. La ley fundamental de dinámica (7.2) y (7.4) conserva su enunciación, es decir, *la fuerza es igual a la derivada de la cantidad de movimiento en el tiempo*:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mu)}{dt}. \quad (13.5)$$

Mostremos que con esta formulación de la ley fundamental de dinámica, las deducciones que de ella se desprenden no contradicen la teoría de la relatividad.

2. Con las mismas suposiciones que ofrecimos más arriba ( $F = \text{const}$ ,  $t_1 = 0$ ,  $u_1 = 0$ ), de (7.2) obtenemos:

$$F = \frac{mu}{t} = \frac{m_0 u}{t \sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (13.6)$$

Haciendo  $F/m_0 = b = \text{const}$  y resolviendo esta ecuación respecto de la velocidad  $u$ , tenemos

$$u = \frac{bt}{\sqrt{1 + b^2 t^2/c^2}}. \quad (13.7)$$

3. Analicemos el resultado obtenido. Para intervalos de tiempo suficientemente pequeños, el producto  $bt$  es mucho menor que la velocidad de la luz en el vacío; o sea, que  $b^2 t^2/c^2 \ll 1$  y, aproximadamente

$$u \approx bt.$$

Así, pues, hemos obtenido la aproximación clásica como el caso límite de los movimientos lentos.

Cuando la acción de la fuerza constante es prolongada, la magnitud  $bt$  puede hacerse considerablemente mayor que  $c$ ; entonces,  $b^2 t^2/c^2 \gg 1$  y, aproximadamente

$$u \approx \frac{bt}{\sqrt{b^2 t^2/c^2}} = c.$$

De esta forma, cuando una fuerza constante actúa largo tiempo, *la velocidad del cuerpo tiende a la velocidad de la luz*, pero no crece de modo ilimitado como se desprendía de las leyes de mecánica newtoniana (véase más adelante, fig. 13.2).

### § 13.3. Correlación entre la dinámica newtoniana y relativista

1. En el § 12.10 fue mostrado que la teoría de la relatividad no liquida la cinemática newtoniana, sino que la toma en su «arsenal», como el caso límite de movimientos lentos. Los resultados del párrafo anterior nos llevan a la conclusión de que igual situación debe tener también lugar en dinámica. A saber, hemos mostrado que con movimientos suficientemente lentos, es por completo tolerable hacer uso de las fórmulas de mecánica newtoniana, pero cuando hemos analizado movimientos rápidos, resultados correctos sólo fueron ofrecidos por la teoría de la relatividad.

Vamos a intentar introducir con mayor precisión el criterio de cuáles movimientos deben considerarse lentos y cuáles, rápidos.

Supongamos que los aparatos permiten realizar mediciones de magnitudes con una precisión hasta de  $n$  cifras significativas. Entonces, si el error relativo (es decir, la diferencia entre dos magnitudes, dividida por la magnitud que se mide) es menor que  $10^{-n}$ , éste no puede ser advertido. Calculemos a qué velocidad de movimiento del cuerpo no pueden ser descubiertas las variaciones de su masa. El error relativo, al medir la masa, es

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{m - m_0}{m} = 1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (13.8)$$

Este error debe ser menor que  $10^{-n}$  y, por consiguiente,

$$1 - \sqrt{1 - u^2/c^2} < 10^{-n} \text{ o bien } 1 - 10^{-n} < \sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

Elevemos la desigualdad al cuadrado, lo que es posible, ya que la unidad es mayor que  $10^{-n}$ . Entonces

$$1 - 2 \cdot 10^{-n} + 10^{-2n} < 1 - u^2/c^2 \text{ o bien}$$

$$u < c \sqrt{2 \cdot 10^{-n} - 10^{-2n}}.$$

Tomando en consideración que  $10^{-2n} \ll 10^{-n}$ , tenemos

$$u < c \sqrt{2 \cdot 10^{-n}}.$$

Por ejemplo, sean las mediciones efectuadas con una precisión salvo seis cifras significativas ( $n = 6$ ). En tal caso  $u < c \sqrt{2 \cdot 10^{-6}} = 423$  km/s. De esta forma, a velocidades de movimiento que no superan *cuatrocientos kilómetros*

por segundo, la masa en reposo se distingue de la masa relativista menos que en  $10^{-6}$ , es decir, ¡menos que una diezmilésima de tanto por ciento!

En condiciones reales de movimiento de grandes cuerpos, sus velocidades son mucho menores que el límite indicado, ya que incluso los cohetes cósmicos desarrollan una velocidad cerca de 10 km/s, es decir, 40 veces menores. Además, es raro cuando en la técnica se realizan mediciones con semejante precisión. Queda claro, que en tales condiciones el

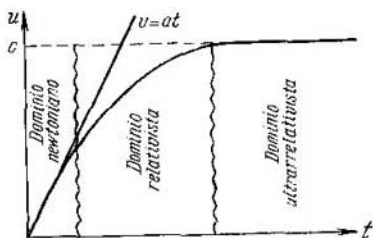


Fig. 13.2.

empleo de las leyes de mecánica newtoniana para calcular el movimiento de los cuerpos da resultados, que por su precisión son ideales.

Sin embargo, en el mundo de las partículas atómicas se tropieza frecuentemente con velocidades próximas a la de la luz en el vacío. En este caso, la aplicación de las leyes de la teoría de la relatividad nos ofrecerá resultados correctos. En particular, al analizar el movimiento de micropartículas rápidas fue posible, por vía experimental, comprobar la expresión para la masa relativista (13.3), con la particularidad de que los resultados del experimento coincidieron perfectamente con la teoría.

2. Las consideraciones expuestas, nos permiten introducir la siguiente clasificación de los movimientos (fig. 13.2).

*Región newtoniana.* La velocidad de movimiento de los cuerpos es tan pequeña que los aparatos de medida no permiten descubrir los efectos relativistas de retardo del tiempo,

reducción de la longitud, aumento de la masa, etc. Aquí es por completo tolerable hacer uso de las leyes de mecánica newtoniana.

*Región relativista.* La velocidad de movimiento es suficientemente grande y los efectos relativistas pueden ser plenamente medidos. Como es natural, aquí obtendremos resultados correctos sólo mediante la teoría de la relatividad.

*Región ultrarrelativista.* La velocidad del cuerpo es casi igual a la velocidad de la luz en el vacío. Hablando con mayor precisión, la diferencia entre la velocidad del cuerpo y de la luz es menor que la sensibilidad del instrumento de medida. Está claro, que también en este caso, sólo el empleo de las leyes de la teoría de la relatividad nos dará resultados correctos.

En nuestro ejemplo, cuando la precisión de las mediciones no supera  $10^{-8}$ , el ámbito clásico de velocidades es constituido por velocidades menores que 400 km/s; el ámbito ultrarrelativista lo forman las velocidades que se distinguen de la de la luz menos que en 300 m/s; el resto de la gama de velocidades constituye, precisamente, el ámbito relativista.

3. Examinemos, como varía la cantidad de movimiento del cuerpo bajo la acción de una fuerza constante. De la ecuación (13.5), a condición de que para  $t_1 = 0$  la cantidad inicial de movimiento  $p_1 = 0$ , se desprende:

$$p = Ft. \quad (13.9)$$

Así, pues, bajo la acción de una fuerza constante, la cantidad de movimiento crece proporcionalmente al tiempo.

En la región newtoniana, la cantidad de movimiento crece sólo a cuenta del aumento de la velocidad, ya que se puede despreciar la variación de la masa. A la inversa, en la región ultrarrelativista, la velocidad del cuerpo, prácticamente, no cambia y la cantidad de movimiento crece sólo a cuenta del aumento de la masa. Como es natural, en la región intermedia (relativista) el crecimiento de la cantidad de movimiento transcurre a cuenta del aumento de los dos factores: la velocidad y la masa. Con la particularidad de que la velocidad aumenta más lentamente que en la región newtoniana, precisamente a causa del aumento de la masa del cuerpo que se acelera.

## LEY DE MOVIMIENTO Y PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

### § 14.1. Condiciones iniciales y aparatos de medida

1. La aplicación exitosa del método para solucionar el problema fundamental de dinámica en mecánica newtoniana, estudiado en el capítulo 8, llevaba inevitablemente a los científicos a la idea de que semejante método era universal y, por lo tanto, podía ser empleado para solucionar *cualquier* problema. Con esto, nadie hizo en serio la pregunta: ¿es posible en realidad o no, fijar las condiciones iniciales con el grado necesario de precisión? La propia resolución correcta del problema llevaba a la conclusión de que, al parecer, las condiciones iniciales pueden ser dadas en grado arbitrario de precisión.

Claro está, que la medición de las coordenadas y las cantidades de movimiento es realizada con determinado error. Sin embargo, en el siglo XIX se suponía que perfeccionando los instrumentos de medida, el error de medición puede hacerse cuan se quiera pequeño. El desarrollo posterior de las ciencias ha demostrado la inconsistencia de este punto de vista.

Intentemos en un ejemplo analizar, en rasgos generales, el funcionamiento de los instrumentos, mediante los que se pueden medir las coordenadas y la velocidad de los cuerpos.

2. Para determinar las coordenadas de un avión se hace uso de un radar (fig. 14.1). Su antena emite ondas radioeléctricas a cortos impulsos. Cuando la onda choca contra el avión, se refleja de éste y retorna a la antena. En la pantalla del radar se obtienen dos marcas: de la señal emitida y recibida (reflejada). Conociendo la velocidad de movimiento del rayo por la pantalla  $u$ , y la velocidad de las ondas hertzianas ( $c = 3 \cdot 10^8$  m/s), de la proporción  $\frac{L}{u} = \frac{2X}{c}$ , según el valor del desplazamiento de las marcas, se puede juzgar acerca de la distancia hasta el avión  $X = \frac{c}{2u}L$ . En la pantalla, el desplazamiento se gradúa en kilómetros

(ya que la magnitud  $c/2u$  es constante y conocida). Esto permite sin cálculos complementarios, determinar de inmediato las coordenadas del avión según las marcas en la pantalla del oscilógrafo.

Notemos, que con la ayuda de un instrumento que sirve para determinar los valores instantáneos de las coordenadas, es imposible medir los valores instantáneos de la velocidad.

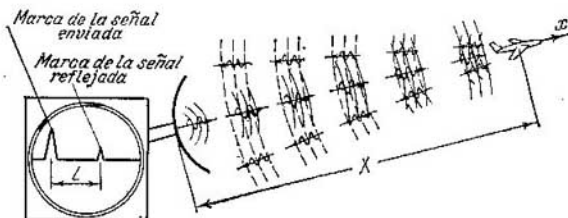


Fig. 14.1.

Bien es verdad, que observando el movimiento de las marcas por la pantalla del radar, es posible determinar la velocidad media del avión en cierto intervalo de tiempo, pero hallar la velocidad instantánea del avión en el momento de medición de las coordenadas con este aparato es imposible.

3. Hay instrumentos, con los que es posible medir la velocidad instantánea de un punto. Por ejemplo, ese mismo radar puede ser reequipado de forma que compare la frecuencia de las oscilaciones de la onda que emite la antena y la frecuencia de las oscilaciones de la onda reflejada del avión.

Si el avión se mueve a una velocidad  $v$  a lo largo del eje de abscisas, el ritmo del tiempo en el sistema de referencia ligado con él, varía en comparación con el ritmo de tiempo en el sistema de referencia relacionado con el radar (§ 12.8). Como es natural, al cambiar el ritmo del tiempo, variará la frecuencia de la onda, lo que se verá en la pantalla del radar reequipado: al alejarse el avión del radar la onda se estira a lo largo de la pantalla (fig. 14.2), al acercarse, se comprime (fig. 14.3).

Haciendo uso de las transformaciones de Lorentz, puede ser deducida la correlación entre la frecuencia de la onda emitida  $\nu$  y la frecuencia de la onda reflejada del avión  $\nu'$ .

Llámase frecuencia, el número de oscilaciones por unidad de tiempo: por consiguiente, la frecuencia de oscilación de la onda en diversos sistemas de referencia *es inversamente proporcional* al intervalo de tiempo entre dos acontecimien-

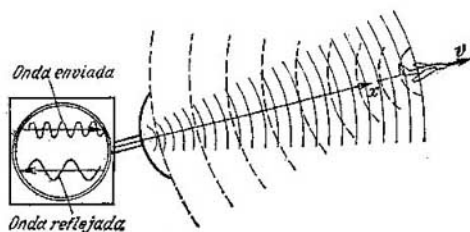


Fig. 14.2.

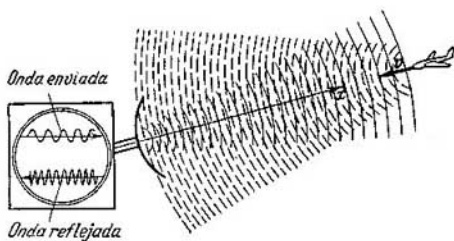


Fig. 14.3.

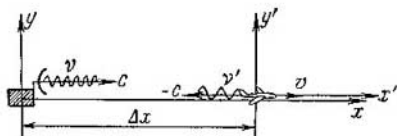


Fig.14.4.

tos (por ejemplo, el intervalo de tiempo entre la reflexión de la onda del avión y su recepción por el radar (fig. 14.4)). En el sistema de referencia, ligado con el radar, tenemos la frecuencia de onda  $\nu$  y el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . En el

sistema de referencia relacionado con el avión,  $v'$  y  $\Delta t'$ , respectivamente. Entonces

$$\frac{v'}{v} = \frac{\Delta t}{\Delta t'}. \quad (14.1)$$

Pero

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v \cdot \Delta x / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(véase 12.7)), donde  $\Delta x$  es el espacio recorrido por la onda reflejada. Teniendo en cuenta, que la velocidad de la onda reflejada  $\Delta x / \Delta t = -c$  (el signo menos ha surgido porque la onda reflejada se mueve en dirección opuesta a la del eje de abscisas), obtenemos

$$\Delta t' = \Delta t \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (14.2)$$

Después de comparar las igualdades (14.1) y (14.2), tendremos

$$v' = v \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c}. \quad (14.3)$$

Así, pues, la frecuencia de la onda que se refleja del avión en alejamiento, será menor que la frecuencia de la onda que emite el radar. Si, por lo contrario, el avión se acerca al radar, su velocidad tiene signo opuesto y la frecuencia de la onda reflejada crecerá:

$$v'' = v \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c}. \quad (14.4)$$

Este fenómeno recibe el nombre de *efecto Doppler* óptico longitudinal. Con su ayuda es fácil medir la velocidad del avión, para lo que es suficiente comparar las frecuencias de la onda emitida y reflejada.

Mediante el efecto Doppler también puede ser medida la velocidad de un cuerpo que emite luz, por ejemplo, la velocidad de movimiento de una estrella (§ 59.8).

4. Halleemos la frecuencia de una onda que el radar recibe de un avión en alejamiento:

$$v_{\text{rec}} = v' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} = v \frac{1 - v^2/c^2}{(1 + v/c)^2} = v \frac{1 - v/c}{1 + v/c}.$$

En el caso, cuando el avión se acerca al radar es necesario cambiar los signos, en el numerador y denominador, por los contrarios.



5. Sin embargo, *el instrumento que permite medir la velocidad de un punto material* (y por consiguiente, su cantidad de movimiento), *no permite medir su coordenada*. En efecto, para medir la velocidad mediante el efecto Doppler, hay que tener una onda sinusoidal de determinada frecuencia, mientras que para medir las coordenadas del avión, el radar debe emitir ondas a impulsos cortos, y semejantes ondas no son sinusoidales.

De este modo, para la medición simultánea de las coordenadas y la velocidad (o la cantidad de movimiento) de un cuerpo en movimiento, hay que tener dos instrumentos, uno de los cuales mide la coordenada y, el segundo, la velocidad.

Niels Bohr (uno de los fundadores de la física cuántica moderna) mostró que todos los instrumentos de medida pueden ser divididos en dos clases, de tal forma que los instrumentos de una de ellas ofrecen información *complementaria* a la que dan los instrumentos de otra clase. Por ejemplo, unos instrumentos sirven para medir las coordenadas, mientras que otros, las cantidades de movimiento o las velocidades. Una información completa acerca del carácter del movimiento de un cuerpo, sólo puede obtenerse al emplear conjuntamente los instrumentos de las dos clases.

## § 14.2. Principio de incertidumbre

1. Los instrumentos con los que se efectúan las mediciones de las coordenadas y velocidades, interactúan con el cuerpo, cuyos parámetros se miden. Por ejemplo, cuando la onda hertziana alcanza el avión y se refleja de él, ocasiona sobre éste cierta presión a causa de la cual, varía su coordenada y velocidad.

Claro está, que en el caso del avión estos cambios son insignificantes y pueden no tomarse en consideración. No obstante, a medida que se penetra en el micromundo se hizo evidente que el instrumento de medida puede introducir serias perturbaciones en el carácter del movimiento de la micropartícula y, en este caso, no se puede despreciar el influjo del instrumento. Esto está ligado con la naturaleza de las micropartículas, que será estudiada en el apartado dedicado a la mecánica cuántica.

2. W. Heisenberg analizó los resultados de toda clase de experimentos, que pueden ser realizados para medir las coordenadas de la partícula y su cantidad de movimiento

(o velocidad). El científico llegó a la conclusión de que la singular naturaleza de las micropartículas conduce a que durante la medición simultánea de las coordenadas y las cantidades de movimiento, surgen incertidumbres en sus valores, iguales a  $\Delta x$  y  $\Delta p_x$ , respectivamente. Estas incertidumbres están ligadas por la correlación

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar, \quad (14.5)$$

donde la constante de Planck  $\hbar$  es una de las más importantes constantes mundiales, de enorme importancia para la descripción de los fenómenos del micromundo. En la mecánica cuántica tropezaremos con frecuencia con esta magnitud. En la actualidad se ha adoptado el siguiente valor:

$$\hbar = (1,0545887 \pm 0,0000057) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s},$$

$$h = 2\pi\hbar = (6,626176 \pm 0,000036) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}.$$

Mediante correlaciones análogas están ligadas incertidumbres de las coordenadas y cantidades de movimiento por otros ejes:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \approx \hbar, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \approx \hbar.$$

### § 14.3. Principio de incertidumbre y la mecánica clásica

1. Si comparamos el método de resolución del problema fundamental de dinámica con el principio de Heisenberg, veremos que se contradicen entre sí. Efectivamente, para determinar la ley de movimiento se precisa la más exacta prefijación de las condiciones iniciales; el principio de incertidumbre muestra que las condiciones iniciales pueden ser prefijadas sólo aproximadamente, con la particularidad de que el grado de aproximación no es ilimitado. Pero, en este caso, no está claro, ¿cómo puede ser que en la mecánica clásica se consiga hallar la ley de movimiento con una precisión de antemano tomada al azar?

Para dar respuesta a esta pregunta analicemos tres problemas. En el primero, examinaremos el movimiento de un cuerpo macroscópico (cohete); en el segundo, el movimiento de una micropartícula (electrón) por una trayectoria macroscópica y, por fin, en el tercer problema, el movimiento de una micropartícula por una microtrayectoria.

2. *Problema 1.* Un cohete de masa  $10^3$  kg gira alrededor de la Tierra por una órbita circular. El radio de la órbita

es de 6500 km; la velocidad del cohete, 8 km/s. ¿Con qué precisión han de ser prefijados el radio y la velocidad?

Para que el cohete se mueva por una circunferencia, el vector de velocidad debe ser perpendicular al radio en cada punto de la trayectoria. Esto significa que la componente de la velocidad a lo largo del radio debe ser nula. Pero si dicha componente es *con precisión* igual a cero, su incertidumbre  $\Delta v_r$  también es igual a cero. Entonces, como muestra la correlación (14.5), la incertidumbre en el valor del radio será infinitamente grande. Pero podemos aceptar un compromiso. Sea dado el radio de la órbita con la incertidumbre  $\Delta r$ , mientras que la componente radial de la velocidad, igual a cero, pero con incertidumbre  $\Delta v_r$ , que puede ser obtenida del principio de incertidumbre de Heisenberg (fig. 14.5):

$$\Delta r \cdot \Delta p_r \approx \hbar.$$

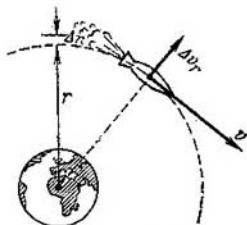


Fig. 14.5.

Si, en este caso, las incertidumbres de las magnitudes que nos interesan son mucho menores que ellas mismas, podemos considerar que el problema ha sido resuelto con suficiente precisión.

En nuestro caso, supongamos que  $\Delta r = 10^{-10}$  m; esta indeterminación es, aproximadamente, igual al diámetro de un átomo. Está claro: ¡el error de cualquier instrumento de medida es, en la práctica, considerablemente mayor! Entonces, la incertidumbre de la componente radial de la cantidad de movimiento del cohete

$$\Delta p_r \approx \frac{\hbar}{\Delta r} = \frac{10^{-34}}{10^{-10}} = 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

y la incertidumbre de la componente radial de la velocidad

$$\Delta v_r = \frac{\Delta p_r}{m} \approx \frac{\hbar}{m \Delta r} = \frac{10^{-34}}{10^3 \cdot 10^{-10}} = 10^{-27} \text{ m/s}.$$

¡Pero la velocidad orbital del cohete  $8 \cdot 10^3$  m/s es inconmensurablemente mayor que la incertidumbre obtenida!

Así, pues, al analizar el movimiento de un cuerpo macroscópico el principio de incertidumbre no desempeña ningún papel. Podemos plenamente despreciar las indeterminaciones de las coordenadas y velocidades, suponer que las condiciones

iniciales pueden ser prefijadas con la precisión que nos es necesaria y resolver el problema fundamental de dinámica por los métodos clásicos.

*Problema 2.* Un electrón se mueve en un betatrón (aparato para acelerar electrones) por una órbita circular de radio 2,5 m a una velocidad igual al 99% de la velocidad de la luz:  $v = 0,99 c = 2,97 \cdot 10^8$  m/s. ¿Con qué precisión pueden ser dados el radio de la órbita y la velocidad del electrón?

A diferencia del anterior problema, aquí hay que tener en cuenta la dependencia de la masa de la velocidad. La masa en reposo del electrón  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg. A la velocidad prefijada de movimiento, su masa

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-0,99^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1,99 \cdot 0,01}} = \frac{m_0}{1,41 \cdot 0,1} = 7,1 m_0.$$

Como la masa del electrón es en grado considerable menor que la del cohete, no puede ser dado el radio de la órbita con tan elevada precisión, como en el problema anterior. Sin embargo, si prefijamos la incertidumbre del radio  $\Delta r = 0,05$  mm, la órbita será determinada con alta precisión, ya que el error relativo será

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{0,05}{2,5 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-5} = 0,002\%.$$

La incertidumbre de la componente radial de la velocidad

$$\Delta v_r \approx \frac{\hbar}{m \cdot \Delta r} = \frac{10^{-34}}{7 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-5}} \approx 0,3 \text{ m/s}.$$

A la velocidad del electrón, casi igual a la de la luz, una componente radial igual a 30 cm/s puede, sin duda alguna, despreciarse, haciéndola nula. Por consiguiente, en este caso, cuando una micropartícula está en movimiento por una trayectoria macroscópica, el principio de incertidumbre tampoco juega, en realidad papel alguno. Aquí también es posible suponer que las condiciones iniciales pueden ser prefijadas con el grado necesario de precisión y resolver el problema mediante los métodos clásicos (teniendo en cuenta los efectos relativistas).

En adelante conoceremos, que la complicada naturaleza de las partículas elementales (electrones, protones, neutrones, etc.), hablando en rigor, no permite considerarlas como puntos materiales y no es posible calcular con facilidad sus

órbitas. No obstante, en casos semejantes al estudiado, tal acceso, para la resolución del problema acerca del carácter de su movimiento, es por completo tolerable.

*Problema 3.* Consideremos el movimiento de una micro-partícula por una microórbita, por ejemplo, de un electrón en un átomo. El radio del átomo,  $r \approx 5 \cdot 10^{-11}$  m; la velocidad orbital  $v \approx 10^6$  m/s. A semejante velocidad podemos despreciar los efectos relativistas y considerar la masa del electrón igual a su masa en reposo. Hagamos la incertidumbre igual a un tanto por ciento del valor del radio, o sea,  $\Delta r = 0,01r = 5 \cdot 10^{-13}$  m. Entonces, la incertidumbre de la componente radial de la velocidad

$$\Delta v_r \approx \frac{\hbar}{m \cdot \Delta r} = \frac{10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-13}} = 2,2 \cdot 10^8 \text{ m/s,}$$

lo que casi es igual a la velocidad de la luz.

Así, pues, ¡la incertidumbre de la componente radial de la velocidad supera 220 veces la velocidad orbital! Es evidente que en este caso no se puede ni hablar del movimiento del electrón por la órbita, ya que la velocidad de su movimiento no está en absoluto definida.

Y a la inversa, si prefijamos cierto valor razonable de la incertidumbre para la componente radial de la velocidad, por ejemplo,  $\Delta v_r/v = 1\%$ , nada podremos decir de la trayectoria. En efecto, si  $\Delta v_r = 0,01v = 10^4$  m/s, la incertidumbre del radio

$$\Delta r \approx \frac{\hbar}{m \cdot \Delta v_r} = \frac{10^{-34}}{10^4 \cdot 9 \cdot 10^{-31}} = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 110 \text{ \AA.}$$

¡Esta magnitud es 220 veces mayor que el propio radio! Está claro, que es imposible por completo hablar de cualquiera determinada órbita.

3. Así, pues, nos hemos cerciorado de que el principio de incertidumbre no influye sobre la aplicación de los métodos de la mecánica newtoniana o sobre la teoría de la relatividad respecto de *objetos macroscópicos*. Aquí, según las fuerzas y las condiciones iniciales, con cualquier grado de precisión, establecido de antemano, se puede hallar la ley de movimiento del cuerpo, considerándolo como un punto material. El principio de incertidumbre no limita, en realidad, la aplicación de estas leyes a *las micropartículas* que se mueven en regiones *macroscópicas* del espacio. Por ejemplo, tiene sentido hablar de la trayectoria de un electrón

en una válvula de radio, en un tubo de rayos catódicos, un acelerador, etc.

Otro cuadro, completamente diferente, observamos en *microrregiones*, es decir, en el átomo, núcleo del átomo, en la red cristalina de un sólido, etc. A causa del principio de incertidumbre, aquí son inaplicables por completo los métodos de mecánica clásica. En particular, pierden todo sentido tales nociones clásicas, como la ley de movimiento de la partícula, su trayectoria, la velocidad instantánea, etc. Es absurdo hablar de la trayectoria del electrón en un átomo o de las velocidades de movimiento del protón en el núcleo atómico. Para resolver estos problemas se aplican los métodos de *la mecánica cuántica*.

## Segunda parte

# LEYES DE LA CONSERVACIÓN

### Capítulo 15

## LEY DE LA CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

### § 15.1. Sistema cerrado de cuerpos

1. Para la resolución correcta del problema acerca del carácter del movimiento de cierto cuerpo, hay que tomar en consideración todas las fuerzas que sobre él actúan por parte de todos los cuerpos que lo rodean. Pero la cantidad de semejantes fuerzas es, en realidad, infinitamente grande. Además, las fuerzas dadas son variables, ya que como resultado de la interacción mutua, los cuerpos circundantes se mueven de forma muy complicada. Así que, al plantear el problema de este modo, resolverlo es, prácticamente, imposible a causa de dificultades matemáticas insuperables.

De hecho, el problema puede ser simplificado de forma considerable si tenemos en cuenta que no todos los cuerpos circundantes actúan sobre el cuerpo dado con iguales fuerzas. Por ejemplo, si un satélite se mueve alrededor de la Tierra por una órbita de radio aproximado  $r = 8000$  km, el Sol actúa sobre él con una fuerza que es mucho menor que la fuerza de atracción de la Tierra:

$$\frac{F_T}{P_S} = \frac{\gamma m M_T \cdot R^2}{r^2 \gamma m M_S} = \frac{M_T R^2}{M_S r^2},$$

donde  $R = 1$  UA =  $1,49598 \cdot 10^{11}$  m,  $M_T = 6 \cdot 10^{24}$  kg y  $M_S = 2 \cdot 10^{30}$  kg. Poniendo los valores numéricos, obtenemos

que el Sol actúa sobre este satélite con una fuerza mil veces menor que la de atracción de la Tierra. El lector puede cerciorarse de que la fuerza de atracción de la Luna será aún 200 veces menor, mientras que el influjo de los demás planetas es insignificante.

Este cálculo nos muestra que con la primera aproximación, podemos desprestigiar la acción de todos los cuerpos sobre el satélite, salvo la de la Tierra. Por consiguiente, es posible examinar *un sistema constituido por dos cuerpos*, o sea, el satélite y la Tierra y considerar que su interacción, fundamentalmente, determina el carácter del movimiento del satélite. Todos los demás cuerpos pueden ser considerados como *externos* con relación a este sistema y la acción de dichos cuerpos se tiene en cuenta mediante correcciones de la fuerza fundamental.

2. Reciben el nombre de *fuerzas internas*, aquellas con las que interactúan entre sí las partes componentes del sistema dado. *Externas* se llaman las fuerzas con las que todo el sistema o cuerpos aislados, que entran en su composición, interactúan con los cuerpos circundantes. Llamamos *cerrado* (o aislado) un sistema de cuerpos, si en comparación con la acción de las fuerzas internas, la de las externas puede ser despreciada.

3. Así, pues, en el ejemplo analizado, el sistema Tierra--satélite, con la primera aproximación puede ser considerado cerrado.

Con mayor grado de precisión es posible llamar cerrado el Sistema Solar. En efecto, las fuerzas de interacción entre el Sol y los planetas superan en alto grado las fuerzas con las que sobre éstos actúan incluso las estrellas más cercanas. La estrella que se encuentra más cerca del Sistema Solar, está alejada de él a la colosal distancia  $R = 4,5 \text{ a.l.}^*$ ) =  $4,2 \cdot 10^{13} \text{ km}$ ; a su vez, la distancia de la Tierra al Sol  $r = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ . Suponiendo que la masa de la estrella es casi igual a la del Sol, obtenemos

$$\frac{F_S}{F_E} = \frac{\gamma m M \cdot R^2}{r^2 \cdot \gamma m M} = \frac{r^2}{R^2} = \left( \frac{4,2 \cdot 10^{13}}{1,5 \cdot 10^8} \right)^2 \approx 8 \cdot 10^{10}.$$

De forma que la fuerza interna (es decir, la fuerza de interacción entre el Sol y la Tierra) es 80 mil millones de veces mayor que la fuerza externa (o sea, la fuerza con la

\* Año luz es la distancia que cubre la luz en el vacío en el transcurso de 1 año.



que la estrella más cercana actúa sobre la Tierra). Es natural que tengamos toda la razón al considerar que el Sistema Solar es cerrado.

4. La noción de sistema cerrado es una útil abstracción, ya que en tales sistemas todos los fenómenos se describen con ayuda de sencillas y generales leyes. Por eso, *en todo lugar donde esto es posible, hay que prescindir de la acción de las fuerzas externas y considerar que el sistema a estudiar es cerrado*. Seguidamente, si esto es necesario, hay que introducir en la solución obtenida con la primera aproximación, las correcciones que toman en consideración las perturbaciones provocadas por el influjo de las fuerzas externas.

### § 15.2. Ley de la conservación de la cantidad de movimiento

1. Para los sistemas cerrados es justa la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, que puede ser enunciada de la forma siguiente: *la cantidad de movimiento sumaria de un sistema cerrado se conserva con cualquier proceso que transcurra en dicho sistema*.

No hay que pensar que esta ley implica la invariabilidad de la cantidad de movimiento de cada cuerpo que entra en el sistema. Al contrario, gracias a la acción de las fuerzas internas, las cantidades de movimiento de dichos cuerpos constantemente varían. *Es sólo conservada la suma vectorial de las cantidades de movimiento de todas las partes constituyentes del sistema*.

2. Para deducir la ley de la conservación de la cantidad de movimiento haremos uso de la segunda y tercera leyes de Newton. Para mayor sencillez de razonamiento, nos limitaremos al caso cuando el sistema consta sólo de dos cuerpos; el examen del caso más general de un sistema constituido por muchos cuerpos nada nos dará nuevo en principio, pero de forma notable complicará la deducción.

Supongamos que en el momento de tiempo  $t'$  el primer cuerpo tiene una masa  $m_1'$  y una velocidad  $v_1'$ ; el segundo, una masa  $m_2'$  y una velocidad  $v_2'$ ; en el momento de tiempo  $t''$ , respectivamente,  $m_1''$  y  $v_1''$ ,  $m_2''$  y  $v_2''$ . La segunda ley de Newton se escribirá para el primer cuerpo de la siguiente forma:

$$F_{12} = \frac{m_1''v_1'' - m_1'v_1'}{t'' - t'}$$

para el segundo cuerpo

$$F_{21} = \frac{m_2'' v_2'' - m_2' v_2'}{t'' - t'}$$

Según la tercera ley de Newton  $F_{21} = -F_{12}$  o bien

$$\frac{m_2'' v_2'' - m_2' v_2'}{t'' - t'} = - \frac{m_1'' v_1'' - m_1' v_1'}{t'' - t'}$$

Simplifiquemos los denominadores y traslademos todos los términos con dos rayas al primer miembro y con una, al segundo miembro de la igualdad. Obtenemos

$$m_2'' v_2'' + m_1'' v_1'' = m_2' v_2' + m_1' v_1', \quad (15.1)$$

o de forma más corta

$$m_2 v_2 + m_1 v_1 = \text{const} \quad (15.2)$$

para cualquier momento de tiempo.

Si el sistema cerrado consta de varios cuerpos, para él la ley de la conservación de la cantidad de movimiento se escribirá así:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n = \text{const}. \quad (15.3)$$

3. Al deducir la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, sólo hemos hecho uso de las leyes de Newton, con la particularidad de que hemos aplicado la forma que es válida tanto para la mecánica relativista, como la newtoniana. Por consiguiente, la ley de la conservación de la cantidad de movimiento es aplicable tanto en la mecánica newtoniana, como en la relativista; pero en la última hay que tener en cuenta la dependencia entre la masa y la velocidad.

### § 15.3. Efecto de repercusión

1. Con frecuencia tropezamos en la práctica con el fenómeno cuando un cuerpo se divide (desintegra) en dos partes a cuenta de la acción de las fuerzas interiores. Si, además, estas fuerzas son mucho mayores que las externas, puede considerarse que dicho sistema es cerrado y emplear la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

Para simplificar los razonamientos, nos limitaremos al caso cuando el cuerpo, antes de desintegrarse en dos partes, estaba en reposo respecto del sistema de referencia. Entonces, podemos afirmar que los dos nuevos cuerpos, surgidos como

resultado de la división, se moverán en direcciones opuestas a velocidades inversamente proporcionales a sus masas. Sean las masas de estos cuerpos iguales a  $m_1$  y  $m_2$ , sus velocidades  $v_1$  y  $v_2$ , respectivamente. De la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, sigue que

$$p = p_1 + p_2.$$

Como antes de dividirse el cuerpo estaba en reposo respecto del sistema de referencia,  $p = 0$ . De aquí

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (15.4)$$

o bien

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1, \quad (15.5)$$

es decir, en efecto los vectores  $v_1$  y  $v_2$  están dirigidos en sentidos opuestos.

2. Con el efecto de repercusión tropezamos, por ejemplo, al disparar un cañón: si este no se sujeta, retrocederá en dirección opuesta al movimiento del proyectil. En la ametralladora, fusil, etc., a cuenta de la repercusión del cierre se realiza la expulsión de la vaina utilizada y se recarga el arma.

También está ligado con el efecto de repercusión el movimiento de todos los tipos de transporte. Por ejemplo, cuando las ruedas motrices de un automóvil giran, entre la superficie de la Tierra y de la cubierta surge fuerza de rozamiento. Esta fuerza es interna (en el sistema automóvil—Tierra). A cuenta de dicha fuerza, el automóvil se mueve en una dirección, la Tierra en la contraria. El movimiento de la Tierra realizase a una velocidad insignificante, ya que la masa de la Tierra es incomparablemente mayor que la del automóvil.

Del mismo modo se mueve un barco: su hélice aspira el agua y la lanza tras la popa, gracias a lo cual el barco se desplaza adelante.

3. En física nuclear, muchos fenómenos son también acompañados por la repercusión. Por ejemplo, cuando en el núcleo de uranio penetra un neutrón, el primero se divide en dos fragmentos de masa aproximadamente igual. Como el núcleo y el neutrón se movían antes de la reacción a velocidades muy pequeñas (térmicas), podemos considerar, con cierta aproximación, que hasta el momento de la desintegración el sistema estaba en reposo. Pero los fragmentos formados durante la desintegración deben moverse en direc-

ciones contrarias. Esto se ve claramente en la fotografía (fig. 15.1), obtenida mediante la cámara de Wilson (§ 36.9) en cuyo interior se encuentra una placa a la que se ha aplicado una capa de óxido de uranio. Se observan las huellas *AB* y *BC*, de dos fragmentos que volaron en direcciones opuestas.

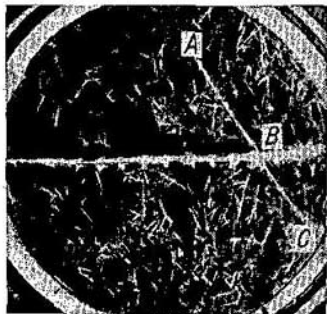


Fig. 15.1.

A continuación, examinaremos otro fenómeno ligado con la repercusión, durante las reacciones nucleares (§ 17.4).

4. Haciendo uso de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento pueden compararse sin pesarlos las masas de dos cuerpos. Liguemos con un hilo dos cuerpos de diferente masa e instalemos entre ellos un resorte comprimido. Al quemar el hilo, los dos cuerpos se

pondrán en movimiento a lo largo de cierto eje en direcciones contrarias, a velocidades  $v_1$  y  $v_2$ . Como de acuerdo con la fórmula (15.5) las velocidades son inversamente proporcionales a las masas, conociendo dichas velocidades y la masa de uno de los cuerpos, sin ayuda de la balanza, podremos determinar la masa del segundo cuerpo.

En mecánica, este método de medida de las masas, prácticamente, no se emplea, ya que medir las velocidades de los cuerpos es bastante difícil; la cuestión radica en que a causa del rozamiento, la velocidad varía constantemente. Sin embargo, en la física nuclear, donde la velocidad de la partícula puede ser medida por la longitud de su alcance, este método puede realizarse, por ejemplo, para comparar las masas de los fragmentos que se crean durante la desintegración del núcleo.

#### § 15.4. Propulsión reactiva a chorro

1. Sobre la base del efecto de repercusión, es decir, de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, podemos explicar el movimiento de un cohete. Cuando se

quemamos el combustible, por la tobera salen los gases a gran velocidad, a causa de lo cual el cohete se mueve en dirección opuesta, de forma que la suma de las cantidades de movimiento del cohete y de los gases resulta ser una magnitud constante.

Supongamos que en cierto momento de tiempo  $t$  la masa del cohete (junto con el combustible y el oxidante) es igual a  $m$ , la velocidad respecto de la Tierra,  $v$ . Al quemarse cierta cantidad de combustible el cohete, en el momento de tiempo  $t_1$ , tendrá la masa  $m_1$  y la velocidad con relación a la Tierra,  $v_1$ . La velocidad de los gases en lo que atañe al cohete, o sea, la *velocidad de escape* (o de descarga), es igual a  $u$  y está dirigida en dirección contraria a la velocidad del cohete. Entonces, la velocidad de los gases con relación a la Tierra en el momento de tiempo  $t_1$  es igual a la diferencia de la velocidad del cohete y la velocidad de escape  $v_g = v_1 - u$ .

La cantidad de movimiento del cohete en el momento de tiempo  $t$  es igual a  $p = mv$ ; en  $t_1$ , la cantidad de movimiento sumaría del cohete y los gases

$$p_1 = m_1 v_1 + m_g v_g = m_1 v_1 + (m - m_1)(v_1 - u).$$

Como el cohete y los gases forman un sistema cerrado, podemos aplicar a él la ley de la conservación de la cantidad de movimiento:

$$mv = m_1 v_1 + (m - m_1)(v_1 - u). \quad (15.6)$$

Después de abrir los paréntesis y de reducir los términos semejantes, obtenemos

$$m(v - v_1) = u(m_1 - m).$$

Pero  $\Delta v = v_1 - v$  es igual al incremento de la velocidad del cohete;  $\Delta m = m_1 - m$  es igual a la masa de combustible quemado durante el tiempo  $\Delta t = t_1 - t$ . Por consiguiente,

$$-m \cdot \Delta v = u \cdot \Delta m. \quad (15.7)$$

2. Al salir de la tobera del cohete, los gases actúan sobre ella con cierta fuerza que recibe el nombre de *fuerza reactiva de empuje*. Para hallarla haremos uso de la ecuación fundamental de dinámica (7.2). Con este fin dividimos los dos miembros de la igualdad (15.7) por  $\Delta t$ . Teniendo en cuenta que  $m \Delta v / \Delta t = \vec{F}$  es la *fuerza de empuje*, mientras que  $\mu = -\Delta m / \Delta t$  es el *consumo de combustible por segundo*, obte-

nemos

$$F = -\mu u. \quad (15.8)$$

Así, pues, la fuerza reactiva de empuje es directamente proporcional al consumo de combustible por segundo y a la velocidad de escape de los gases; está dirigida en dirección opuesta al escape de los gases.

### § 15.5. Cálculo de la reserva de combustible

1. Para apreciar a grandes rasgos la reserva aproximada de combustible realicemos un breve cálculo. Supongamos, que un cohete de masa cerca de 10 t debe ascender con una aceleración  $a = 5g = 49 \text{ m/s}^2$ . La fuerza de empuje  $F = ma = 49 \cdot 10^4 \text{ N}$ . La velocidad de escape de los gases en los cohetes modernos  $u \approx 4 \text{ km/s}$ . De aquí, el consumo de combustible

$$\mu = \frac{F}{u} = \frac{49 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^3} \approx 120 \text{ kg/s}.$$

Moviéndose con una aceleración cerca de  $50 \text{ m/s}^2$ , el cohete alcanza la primera velocidad cósmica ( $8 \text{ km/s}$ ) después de un intervalo de tiempo  $t = v : a = 8000 : 50 = 160 \text{ s}$ . Por consiguiente, la reserva sumaria de combustible constituirá

$$M_{\text{comb}} = \mu t \approx 120 \text{ kg/s} \cdot 160 \text{ s} \approx 19\,000 \text{ kg} \approx 20 \text{ t}.$$

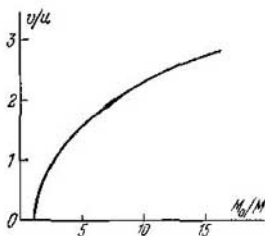


Fig. 15.2.

2. El cálculo aducido más arriba no sirve ni siquiera para apreciar con aproximación la reserva de combustible. La cuestión reside en que el cohete es un cuerpo con masa variable, ya que a medida que se quema el combustible, la masa del cohete disminuye constantemente. Por esta razón, si necesitamos lanzar a la órbita un cohete de masa de 10 t, al comienzo del vuelo, incluso de acuerdo con nuestros cálculos aproximados, su masa debería alcanzar unas 30 t. Para transmitir a semejante masa la aceleración necesaria, hace falta una fuerza de empuje 3 veces mayor, lo que requiere el aumento del consumo de combustible y, a su vez, conducirá indudablemente al aún mayor crecimiento de la reserva de combustible y su consumo.

3. Con precisión puede calcularse la reserva de combustible por la fórmula de Tsiolkovski, que aducimos sin demostración:

$$\frac{v}{u} = 2,3 \lg \frac{M_0}{M}, \quad (15.9)$$

donde  $v$  es la velocidad final del cohete; la velocidad inicial  $v_0 = 0$ ;  $u$ , la velocidad de escape de los gases;  $M$ , la masa del cohete en la órbita  $M_0 = M_{\text{comb}} + M$ , la masa inicial del cohete con el combustible. La gráfica de esta función se muestra en la fig. 15.2.

Suponiendo que  $v = 8$  km/s,  $u = 4$  km/s,  $M = 10$  t, obtenemos

$$\lg \frac{M_0}{M} = \frac{8}{4 \cdot 2,3} = 0,87,$$

de aquí  $M_0/M = 7,4$ ,  $M_0 = 74$  t y  $M_{\text{comb}} = 64$  t, casi 3,5 veces más que la apreciación aproximada. Una reserva todavía mayor de combustible, cerca de 160 t, será necesaria para alcanzar la segunda velocidad cósmica  $v = 11,2$  km/s.

### § 15.6. Centro de inercia

Sea que dos puntos materiales (partículas) de masas  $m_1$  y  $m_2$ , están situados en el eje de abscisas en los puntos con coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ . La distancia entre los puntos  $l = x_2 - x_1$  (fig. 15.3). El punto  $C$ , que divide la distancia entre las partículas en segmentos inversamente proporcionales a sus masas, será llamado *centro de inercia* (o *centro de masas*) del sistema dado de partículas. Así, pues, por definición

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (15.10)$$

Fig. 15.3.

Como  $l_1 = x_c - x_1$ ,  $l_2 = x_2 - x_c$ , donde  $x_c$  es la coordenada del centro de inercia, entonces

$$m_1(x_c - x_1) = m_2(x_2 - x_c),$$

de donde

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (15.11)$$

Esta expresión con facilidad se generaliza para el caso de varios puntos materiales, dispuestos al azar; la coordenada del centro de inercia

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (15.12)$$

Expresiones análogas obtenemos para la ordenada  $y_c$  y la z-coordenada  $z_c$  del centro de inercia de un sistema de puntos materiales.

## § 15.7. Movimiento del centro de inercia

1. Vamos a resolver el problema acerca del carácter del movimiento del centro de inercia para el caso cuando los cuerpos se mueven a velocidades mucho menores que la de la luz, cuando las masas de los cuerpos son magnitudes constantes.

Si escribimos la expresión (15.12) para dos momentos de tiempo diferentes y restamos la una de la otra, obtenemos

$$\Delta x_c = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (15.13)$$

Dividiendo los dos miembros de la igualdad por  $\Delta t = t_2 - t_1$  y haciendo  $\Delta x_c / \Delta t = v_c^{(x)}$  (componente del vector de la velocidad por el eje de las abscisas), tenemos

$$v_c^{(x)} = \frac{m_1 v_1^{(x)} + m_2 v_2^{(x)} + \dots + m_n v_n^{(x)}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (15.14)$$

Semejantes expresiones serán obtenidas para las componentes de la velocidad por los ejes de ordenadas y  $z$ -coordenada. La expresión para la velocidad del centro de inercia en forma vectorial, tiene el aspecto

$$v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{P}{M}, \quad (15.15)$$

donde  $M$  es la masa sumaria del sistema,  $P$ , su cantidad de movimiento sumaria.

2. Como en la teoría de la relatividad la masa del cuerpo depende de la velocidad, de la fórmula (15.12) no se desprende (15.14). Por dicha causa, en la teoría de la relatividad las expresiones (15.14) y (15.15) no se deducen, sino que son utilizadas en calidad de ecuaciones determinantes: llámase *centro de inercia del sistema* el punto cuya velocidad es igual a la razón de la cantidad de movimiento sumaria del sistema a la masa sumaria. En lo que se refiere a la fórmula (15.12), ésta no se emplea en la teoría de la relatividad.

3. Si un sistema de partículas es cerrado, su cantidad de movimiento sumaria será magnitud constante. Pero en caso semejante, la velocidad del centro de inercia también será constante.

Con otras palabras, *el centro de inercia de un sistema cerrado está en movimiento inercial*, es decir, su movimiento es rectilíneo uniforme independientemente de cómo se



mueven los cuerpos aislados de los que está constituido el sistema.

Hay que prestar atención al sentido de esta afirmación. En un sistema cerrado actúan fuerzas internas, a causa de lo cual, los cuerpos componentes del sistema pueden moverse de modo acelerado y sus velocidades (cantidades de movi-

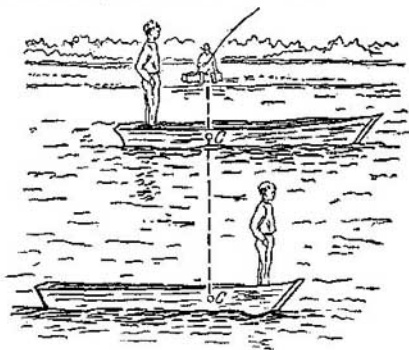


Fig. 15.4.

miento) es posible que cambien constantemente. No obstante, *bajo la acción de las fuerzas internas, la velocidad de movimiento del centro de inercia no varía.*

4. El lector puede hallar una serie de ejemplos que confirman el resultado obtenido. Así, estando en un automóvil, es posible presionar sobre cualquiera de sus paredes con fuerza arbitraria, y esto, de ninguna manera, influirá sobre el carácter del movimiento del automóvil: si con relación a la Tierra está en reposo, en reposo quedará, mientras que si está en movimiento, continuará éste a la misma velocidad.

Al desplazarse una persona a lo largo de una barca, ésta se moverá en dirección opuesta (fig. 15.4). La causa reside en lo siguiente. A velocidades muy pequeñas, la fuerza de rozamiento entre la barca y el agua es insignificamente pequeña (§ 11.8), por esta razón, la barca junto con la persona forma un sistema cerrado. El desplazamiento de la persona en una dirección provoca el correspondiente movimiento de la barca en dirección contraria, ya que el

centro de masas de este sistema  $C$  conserva una posición constante.

Semejante concepto no sólo se refiere al movimiento de traslación, sino que también al de rotación. Por ejemplo, sólo de modo aproximado podemos decir que la Luna gira alrededor de la Tierra: en realidad, el sistema Tierra—Luna gira en torno del centro común de masas. Hallemos su posición. La distancia entre los centros de la Tierra y su satélite es igual a 384 000 km, la masa de la Luna es 81 veces menor que la de la Tierra. De (15.12) se desprende que la distancia del centro de masas hasta el centro de la Tierra

$$x_c = \frac{1 \cdot 384\,000 + 81 \cdot 0}{1 + 81} \approx 4700 \text{ km.}$$

Pero el radio del globo terrestre es igual a 6370 km, es decir, el centro de masas del sistema Tierra—Luna está alejado de forma notable del centro de la Tierra. Después de hacer semejante cálculo para el sistema Tierra—Sol y analizar el resultado, podemos cerciorarnos de que el centro de masas de este sistema coincide casi exactamente con el centro del Sol.

### § 15.8. Masa relativista

1. Con ayuda de las propiedades del centro de inercia, vamos a deducir la fórmula para la masa relativista (13.3).

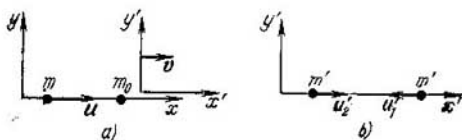


Fig. 15.5.

Estudiemos dos cuerpos iguales en absoluto, con idénticas masas en reposo  $m_0$ , con la particularidad de que uno de ellos está en movimiento a la velocidad  $u$  paralelamente al eje de abscisas, mientras que el segundo está en reposo (fig. 15.5, a). El centro de inercia de este sistema se mueve a lo largo del eje de abscisas a la velocidad (15.15):

$$v_c = \frac{m u}{m + m_0}. \quad (15.16)$$

Pasemos al sistema de referencia, donde las designaciones tienen una raya, que se mueve a la misma velocidad  $v_c$  que el centro de inercia. En este sistema de referencia la velocidad de dicho centro es nula, mientras que los dos cuerpos se mueven al encuentro uno de otro, a velocidades de igual módulo, pero con cantidades de movimiento en direcciones opuestas (fig. 15.5, b).

Es evidente, que el cuerpo en reposo en el sistema de referencia  $xyz$  estará en movimiento respecto del sistema de referencia con designaciones con rayas a una velocidad  $u'_1 = -v_c$ . En lo que se refiere al segundo cuerpo,  $u'_2 = v_c$ . En efecto, gracias a la isotropía del espacio (§ 1.2) la masa del cuerpo no depende de la dirección de la velocidad, sino que sólo depende de su módulo. Pero los módulos de las cantidades de movimiento serán iguales sólo en el caso, cuando los dos cuerpos (con idénticas masas en reposo) resultan tener velocidades de iguales módulos.

2. Sin embargo, la velocidad del cuerpo  $u'_2$  puede ser calculada haciendo uso de la ley relativista de composición de velocidades (12.11):

$$u'_2 = v_c = \frac{u - v_c}{1 - \frac{uv_c}{c^2}}. \quad (15.17)$$

La expresión (15.17) es una ecuación cuadrática respecto de  $v_c$ :

$$\frac{uv_c^2}{c^2} - 2v_c + u = 0.$$

Sus raíces:

$$v_{c1} = \frac{1 + \sqrt{1 - u^2/c^2}}{u/c^2} = \frac{c^2(1 + \sqrt{1 - u^2/c^2})}{u} = \frac{u}{1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

$$v_{c2} = \frac{1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}}{u/c^2} = \frac{c^2(1 - \sqrt{1 - u^2/c^2})}{u} = \frac{u}{1 + \sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

La primera raíz no tiene sentido físico, ya que la velocidad del centro de inercia no puede ser mayor que la de la luz en el vacío (§ 12.6). Poniendo el valor de la segunda raíz en la expresión (15.16), hallaremos la buscada fórmula para la masa relativista.

3. Si en lugar de la ley relativista de composición de velocidades hacemos uso de la clásica (2.6), en vez de

(15.17) obtendremos  $v_c = u - v_c$ , de donde  $v_c = u/2$ . Al sustituir este valor en (15.16) vamos a tener que  $m = m_0$ .

Así, pues, las transformaciones de Lorentz (y, en particular, la ley relativista de composición de velocidades) nos llevan a la dependencia relativista entre la masa y la velocidad; las transformaciones de Galileo (y la ley clásica de composición de velocidades) nos conducen a la deducción de que la masa del cuerpo no depende de la velocidad, o sea, de la invariancia de la masa en la mecánica newtoniana.

## Capítulo 16

### ENERGÍA TOTAL Y CINÉTICA

#### § 16.1. Energía total de un cuerpo

1. En física la noción de energía es una de las fundamentales. Del curso inicial de física, el lector conoce *la ley de la conservación de la energía*, una de las más importantes leyes de la naturaleza, así como una serie de aplicaciones de dicha ley para explicar los fenómenos mecánicos, térmicos y eléctricos. Con la noción de energía tropezamos al considerar múltiples problemas técnicos, ya que uno de los problemas esenciales de la técnica consiste en la obtención, transmisión y empleo de la energía. En este capítulo y en los siguientes, será expuesta con detalle la noción de energía, así como mostrado de que forma se hace uso de ella al resolver una serie de problemas físicos.

2. Utilizando las ideas de la teoría de la relatividad, podemos obtener la noción más completa de energía. *La energía total* de un cuerpo aislado de los influjos externos es el producto de la masa relativista por el cuadrado de la velocidad de la luz:

$$\mathcal{E} = mc^2. \quad (16.1)$$

De esta definición se desprende que *en diversos sistemas de referencia, la energía total del cuerpo es distinta*. Ella es función de la velocidad a la que el cuerpo se mueve con relación al sistema de referencia, ya que la masa relativista depende de la velocidad (§ 13.1) y el cuerpo tiene diferentes velocidades en distintos sistemas de referencia.

El cuerpo tiene la menor energía en el sistema de referencia en el que está en reposo. El valor de la energía del cuerpo recibe el nombre de *energía en reposo*:

$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2. \quad (16.2)$$

## § 16.2. Energía cinética

1. Llámanse *energía cinética de un cuerpo K* la diferencia entre su energía total y la energía en reposo:

$$K = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = (m - m_0) c^2. \quad (16.3)$$

Depende de la velocidad de movimiento del cuerpo respecto del sistema de referencia.

Vamos a aducir a la expresión de la energía cinética una forma más cómoda para las posteriores investigaciones. De (13.3), sigue que

$$K = (m - m \sqrt{1 - u^2/c^2}) c^2 = mc^2 (1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}).$$

Multiplicando y dividiendo esta expresión por  $1 + \sqrt{1 - u^2/c^2}$ , obtenemos

$$K = \frac{mu^2}{1 + \sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{p^2}{m(1 + \sqrt{1 - u^2/c^2})}. \quad (16.4)$$

En la mecánica newtoniana, la velocidad de movimiento del cuerpo con relación al sistema de referencia es mucho menor que la de la luz; por esta razón, puede ser despreciado el término  $u^2/c^2$  en comparación con la unidad y hacer  $\sqrt{1 - u^2/c^2} \approx 1$ . Después de las indicadas operaciones obtenemos una sencilla fórmula para calcular la energía cinética en la mecánica newtoniana:

$$K = \frac{mu^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (16.5)$$

Aunque esta fórmula es aproximada, a velocidades de movimiento con las que se tropieza en técnica, ofrece una buena precisión. Haciendo uso de los resultados del § 13.3, obtenemos que incluso a velocidades de un orden de centenares de kilómetros por segundo, la expresión aproximada (16.5) difiere de la precisa (16.4) menos de una diezmilésima parte de tanto por ciento.

2. A velocidades mucho menores que la de la luz, la energía cinética del cuerpo es en grado considerable menor

que la energía en reposo. En efecto

$$\frac{K}{\mathcal{E}_0} = \frac{u^2}{2c^2} \ll 1.$$

Incluso a velocidades  $u \approx 300$  km/s, que es diez veces mayor que la velocidad orbital de la Tierra, la energía cinética constituirá

$$\frac{K}{\mathcal{E}_0} = \frac{9 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 5 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-5} \%,$$

es decir, una cienmilésima parte de tanto por ciento de la energía en reposo!

Y al revés, a velocidades ultrarrelativistas, que poco se diferencian de la de la luz, prácticamente, toda la energía del cuerpo está concentrada en la energía cinética: la energía en reposo es mucho menor que la cinética. Por ejemplo, en los sincrofasotrones modernos, los protones se aceleran hasta velocidades del orden  $u = 0,999923 c$ . Aquí

$$\begin{aligned} \frac{K}{\mathcal{E}_0} &= \frac{(m - m_0) c^2}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 = \\ &= \frac{10^8}{\sqrt{153,9941}} - 1 = 80,6 - 1 \approx 80. \end{aligned}$$

Por consiguiente, a tales velocidades la energía cinética del protón es 80 veces mayor que la energía en reposo.

Despreciando la energía en reposo en comparación con la cinética, de (16.3) obtenemos, aproximadamente, para las velocidades ultrarrelativistas

$$K \approx \mathcal{E} = mc^2. \quad (16.6)$$

### § 16.3. Energía y cantidad de movimiento

1. Deduzcamos la correlación entre la energía total de un cuerpo y su cantidad de movimiento, que en el futuro nos será necesaria. Con este fin elevemos al cuadrado la expresión para la masa relativista (13.3); después de sencillas transformaciones, obtenemos

$$m^2 c^2 - m^2 u^2 = m_0^2 c^2$$

o bien, después de multiplicar por  $c^2$ ,

$$m^2 c^4 - m^2 u^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (16.7)$$

Teniendo en cuenta que la cantidad de movimiento del cuerpo  $p = mu$ , la energía total  $\mathcal{E} = mc^2$  y la energía en reposo  $\mathcal{E}_0 = m_0c^2$ , tenemos

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + p^2c^2. \quad (16.8)$$

En el dominio ultrarrrelativista

$$K \approx \mathcal{E} \approx pc. \quad (16.9)$$

2. El análisis de la expresión (16.8) nos muestra que hay dos procedimientos para variar la energía total de un cuerpo.

Primero, podemos cambiar la cantidad de movimiento del cuerpo, sin variar la energía en reposo. Para ello, es preciso cambiar la velocidad de movimiento del cuerpo respecto del sistema de referoncia elegido. Segundo: es posible cambiar la energía en reposo; con ello, como es natural, variará también la masa en reposo de dicho cuerpo. A primera vista, parece no estar claro mediante qué procedimiento puede ser variada la masa en reposo del cuerpo. En realidad, semejantes procesos son posibles, lo que será mostrado en los caps. 20 y 21.

#### § 16.4. Energía cinética y trabajo

1. Examinemos el caso cuando sobre un cuerpo está aplicada la fuerza  $F$ , que forma con la dirección de desplazamiento un ángulo  $\alpha$ . En el caso general, podemos considerar la fuerza variable y la trayectoria del cuerpo, curvilínea. Descomponemos la fuerza en dos componentes (fig. 16.1): tangencial  $F_t = F \cos \alpha$  y normal  $F_n = F \sin \alpha$ . A continuación, consideramos cómo éstas influyen sobre la energía cinética del cuerpo.

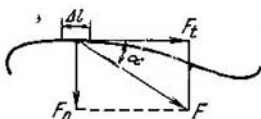


Fig. 16.1.

La componente normal de la fuerza sólo cambia la dirección del vector de velocidad, pero no hace variar su valor absoluto (§ 4.8). Por esta causa, la componente normal de la fuerza no hace que cambie la energía cinética del cuerpo. En efecto, en la expresión para la energía cinética (16.4) entra el cuadrado de la velocidad, por lo tanto, dicha energía sólo depende del módulo de la velocidad o de la cantidad de movimiento, pero no es función de la dirección de dichos vectores.

Por lo contrario, la componente tangencial de la fuerza influye precisamente sobre el valor absoluto de la velocidad o la cantidad de movimiento, pero no sobre sus direcciones. Por consiguiente, la variación de la energía cinética del cuerpo transcurre bajo la acción de la componente tangencial de la fuerza. Esta última, de acuerdo con (13.5), puede ser escrita:

$$F_t = F \cos \alpha = dp/dt.$$

En verdad, la componente tangencial de la fuerza caracteriza la variación del valor absoluto de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo, por lo que en la expresión (13.5) hay que considerar la diferencia entre los módulos de los vectores, en lugar de la diferencia entre éstos.

2. Supongamos que bajo la acción de una fuerza, el cuerpo se ha desplazado a una pequeña distancia  $\Delta l$  en el transcurso de un pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Quedando la energía en reposo invariable, el cambio de la energía cinética del cuerpo será igual a la variación de su energía total.

Derivando (16.8) para  $\mathcal{E}_0 = \text{const}$ , tenemos

$$2\mathcal{E} d\mathcal{E} = 2pc^2 dp.$$

Poniendo los valores de la energía total  $\mathcal{E} = mc^2$  y de la cantidad de movimiento  $p = mu$ , después de simplificar obtenemos

$$d\mathcal{E} = dK = u dp. \quad (16.10)$$

Siendo constante la energía en reposo, la variación de la energía total del cuerpo es igual al cambio de su energía cinética. Multiplicando y dividiendo (16.10) por  $dt$  y teniendo en cuenta que

$$u dt = dl, \quad \frac{dp}{dt} = F_t = F \cos \alpha,$$

$$dK = F_t dl = F \cos \alpha dl. \quad (16.11)$$

3. La magnitud física  $F_t dl = F \cos \alpha dl$  recibirá el nombre de *trabajo elemental*:

$$\Delta A = F \cos \alpha dl = F_t dl = F dl. \quad (16.12)$$

Así, pues, el trabajo elemental es igual a una variación infinitésima de la energía cinética del cuerpo:

$$\Delta A = dK. \quad (16.13)$$



4. Consideremos el caso del trabajo de una fuerza tomada al azar en un sector finito de la trayectoria (fig. 16.2). Dividimos esta trayectoria en pequeños sectores  $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ . De acuerdo con (16.13), para cada sector tenemos

$$\begin{aligned} \Delta A_1 &= \Delta K_1 = K_1 - K_0; \quad \Delta A_2 = \Delta K_2 = K_2 - K_1; \quad \dots \\ \dots; \quad \Delta A_n &= \Delta K_n = K_n - K_{n-1}. \end{aligned}$$

Después de sumar todas estas igualdades y designando el trabajo en el último sector por  $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$  y haciendo  $K_n = K$ , tenemos

$$A = K - K_0, \quad (16.14)$$

ya que todos los sumandos intermedios se eliminan entre sí. Así, pues, el trabajo de una fuerza en el sector final de

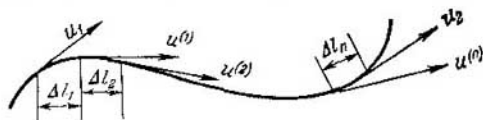


Fig. 16.2.

la trayectoria es igual a la variación de la energía cinética del cuerpo, es decir, a la diferencia de los valores de la energía cinética en los puntos final e inicial de la trayectoria. La expresión (16.14) se ha deducido sobre la base de las fórmulas de la teoría de la relatividad y, por esta razón, es justa para el movimiento de un cuerpo a velocidades arbitrarias (pero a condición de que la energía en reposo no cambia).

5. Teniendo en cuenta la importancia de este resultado, recomendamos al lector que deduzca por su cuenta la expresión (16.14) para el caso, cuando está aplicada una fuerza constante, con la aproximación  $u \ll c$  (mecánica newtoniana). Por ejemplo, se puede hacer uso de las expresiones (4.9), (4.10) y (7.2) y obtener

$$A = \frac{mu^2}{2} - \frac{mu_0^2}{2}. \quad (16.15)$$

## § 16.5. Potencia

Es llamada *potencia media* en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  la razón entre el trabajo, realizado durante ese tiempo y el intervalo de tiempo:

$$P_m = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (16.16)$$

Recibe el nombre de *potencia instantánea* el límite al que tiende la potencia media en el transcurso de un intervalo infinitésimo de tiempo:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = A'(t). \quad (16.17)$$

La potencia instantánea puede ser expresada por la fuerza y la velocidad instantánea. Con este fin, poniendo en (16.17) la expresión (16.12), obtenemos

$$P = F_t u = Fu \cos \alpha, \quad (16.18)$$

donde  $u$  es el valor de la velocidad instantánea.

Notemos, que si la fuerza es perpendicular a la trayectoria ( $\alpha = \pi/2$ ), el trabajo y la potencia son iguales a cero.

## § 16.6. Unidades de energía, trabajo y potencia

1. Como el trabajo es la medida de la variación de la energía, estas dos magnitudes se miden con las mismas unidades.

En el SI, la unidad de trabajo es un *julio*, que significa el trabajo ejecutado por una fuerza de 1 N a la distancia de 1 m en la dirección de aplicación de la fuerza:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}.$$

Dimensión del trabajo:

$$[A] = [F] [l] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}.$$

Esta misma dimensión puede ser obtenida del modo siguiente:

$$[A] = [\xi] = [m] [c^2] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}.$$

Una evidente representación del julio podemos obtener partiendo de los razonamientos que siguen: si un cuerpo de masa 2 kg se mueve a la velocidad de 1 m/s, su energía cinética es igual a 1 J.

2. En el SI, como unidad de potencia se emplea *el vatio* que es la potencia con la que durante 1 s se realiza un trabajo igual 1 J:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s.}$$

La dimensión de la potencia:

$$[P] = [A/t] = \text{ML}^2\text{T}^{-3}.$$

3. En física atómica se utiliza la unidad de energía *electronvoltio* (eV) y sus derivadas: kiloelectronvoltio (1 keV) =  $10^3$  eV), megaelectronvoltio (1 MeV =  $10^6$  eV) y gigaelectronvoltio (1 GeV =  $10^9$  eV)

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

El sentido de semejante denominación de la unidad de energía será aclarado más adelante (§ 18.7).

### § 16.7. Cantidad de movimiento y energía de una partícula localizada

1. Una partícula recibe el nombre de *localizada* en cierta parte del espacio con la dimensión característica  $a$ , si para sus coordenadas son válidas las correlaciones

$$\begin{aligned} x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 \leq y \leq \\ \leq y_0 + a, \quad z_0 \leq z \leq z_0 + a. \end{aligned} \quad (16.19)$$

Esto significa que la partícula no sale de los límites del cubo representado en la fig. 16.3.

Es natural, que la incertidumbre de las coordenadas de la partícula coincidan con la dimensión característica de la región de localización:

$$\Delta x \approx \Delta y \approx \Delta z \approx a. \quad (16.20)$$

Haciendo uso del principio de incertidumbre (14.5), hallaremos la incertidumbre de la proyección de las cantidades de movimiento:

$$\Delta p_x \approx \Delta p_y \approx \Delta p_z \approx h/a. \quad (16.21)$$

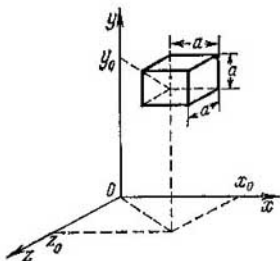


Fig. 16.3.

2. Intentemos apreciar la magnitud del valor medio de la cantidad de movimiento de esta partícula. De (16.21) sigue que la diferencia entre dos valores tomados al azar de la proyección de la cantidad de movimiento en cualquier eje de coordenadas no supera  $\hbar/a$ :

$$0 \leq |p_{x_2} - p_{x_1}| \leq \hbar/a.$$

Pero la suma de los módulos de dos magnitudes no es menor que el módulo de su diferencia:

$$|p_{x_1}| + |p_{x_2}| \geq |p_{x_2} - p_{x_1}| \approx \hbar/a.$$

El valor medio de la proyección de la cantidad de movimiento en el eje de abscisas:

$$\bar{p}_x \approx 1/2 (|p_{x_1}| + |p_{x_2}|) \geq \hbar/2a.$$

De forma análoga para las demás proyecciones:

$$\bar{p}_x \approx \bar{p}_y \approx \bar{p}_z \approx \hbar/2a. \quad (16.22)$$

De aquí se desprende la expresión para el valor medio de la cantidad de movimiento de la partícula

$$\bar{p} = \sqrt{\bar{p}_x^2 + \bar{p}_y^2 + \bar{p}_z^2} \geq \sqrt{3\hbar^2/4a^2} \approx \hbar/a, \quad (16.23)$$

donde  $a$  es la dimensión característica de la región de localización\*).

3. Deduzcamos la expresión para la energía cinética media de una partícula localizada. Para un caso no relativista, de acuerdo con (16.5) y (16.23), tenemos

$$\bar{K} = \frac{\bar{p}^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}. \quad (16.24)$$

Para una partícula ultrarrelativista, en correspondencia con (16.9), obtenemos

$$\bar{K}_{rel} \approx \bar{pc} \geq \hbar c/a. \quad (16.25)$$

Si el número de partículas por unidad de volumen (es decir, la concentración de partículas) es igual a  $n$ , es evidente que  $na^3 = 1$ , de donde se deduce que  $a = n^{-1/3}$ . Sustituyen-

\* Como vemos, el valor medio de la cantidad de movimiento de una partícula localizada no es menor que la incertidumbre de dicha magnitud, es decir,  $\bar{p} \geq \Delta p$ . De forma análoga, también la energía  $\bar{\mathcal{E}} \geq \Delta \mathcal{E}$ .

do en (16.24) y (16.25), expresamos la energía cinética mediante la concentración de las partículas:

$$\bar{K} \geq \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m}, \quad (16.26)$$

$$\bar{K}_{\text{rel}} \geq \hbar c n^{1/3}. \quad (16.27)$$

4. Así, pues, una partícula localizada en cierta región del espacio, *no puede estar en reposo*: el valor medio de su cantidad de movimiento es igual a  $\bar{p} \approx \hbar/a$ , el valor medio de la energía cinética es igual a  $\bar{K} \approx \hbar^2/2ma^2$  (o bien  $\bar{K}_{\text{rel}} \approx \hbar c/a$ ).

A primera vista, este resultado parece paradójico, contradice a nuestra experiencia cotidiana, de acuerdo con la que vemos múltiples cuerpos en reposo. Los dos siguientes ejemplos nos ayudarán a comprender esta paradoja.

*Ejemplo 1.* Sea que sobre la mesa está una moneda de un kopek ( $m = 1$  g). Apreciemos su cantidad de movimiento y su velocidad medias. La región de localización es aquí no menor que su tamaño:  $a \approx 1$  cm. El valor medio de la cantidad de movimiento

$$\bar{p} \approx \frac{\hbar}{a} \approx \frac{10^{-34}}{10^{-2}} = 10^{-32} \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

su velocidad media

$$\bar{u} = \frac{\bar{p}}{m} \approx \frac{10^{-32}}{10^{-3}} = 10^{-29} \text{ m/s}.$$

Es lógico que podamos despreciar semejante velocidad y considerar que la moneda está en reposo. Como en el § 14.3, vemos de nuevo que en el ámbito de la mecánica newtoniana pueden despreciarse los corolarios que siguen de los principios de incertidumbre.

*Ejemplo 2.* Apreciemos la cantidad de movimiento y la energía de un electrón en el átomo ( $a \approx 10^{-10}$  m). Tenemos

$$\bar{p} \approx \frac{\hbar}{a} \approx \frac{10^{-34}}{10^{-10}} = 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{p}}{m} \approx \frac{\hbar}{ma} \approx \frac{10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-10}} \approx 10^6 \text{ m/s}.$$

Vemos que el electrón en el átomo debe moverse a una velocidad considerable, aunque no relativista. El valor

medio de la energía cinética

$$\bar{K} \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} \approx \frac{10^{-68}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-20}} \approx 5 \cdot 10^{-19} \text{ J} \approx 3 \text{ eV}.$$

Al estudiar con detalle la estructura del átomo (véanse los caps. 71, 72), nos cercioraremos de que por el orden de las magnitudes, hemos obtenido un resultado justo.

Así, pues, en el micromundo no se puede hacer uso de las representaciones newtonianas; sólo las ideas de la mecánica cuántica nos ofrecerán resultados correctos y entre ellos, los corolarios del principio de incertidumbre.

### Capítulo 17

## TEORÍA ELEMENTAL DEL CHOQUE

### § 17.1. ¿Qué es el choque?

1. En la vida cotidiana por choque se comprende un fenómeno semejante a la colisión recíproca de *las bolas de billar*. En física este fenómeno se entiende en un sentido más amplio. Entendemos por *choque* o *colisión cualquier breve interacción entre partículas*. Así, podemos hablar de la colisión de moléculas, aunque ellas interactúan a distancia, por intermedio de sus campos eléctricos; es posible hablar del choque de un neutrón o partícula alfa con un núcleo, aunque tampoco aquí hay contacto directo entre las partículas y la interacción se ejecuta por medio de fuerzas nucleares o eléctricas.

La particularidad de la teoría del choque consiste en que no analizamos en forma detallada el mecanismo de la interacción. La causa reside en que el análisis de las fuerzas que surgen durante el choque es muy complicado y, en muchos casos, imposible. Por ejemplo, así sucede con las fuerzas nucleares, para las que hasta la fecha no ha sido hallada la ley de variación.

Es lógico, que como resultado nos vemos privados de la posibilidad de describir con detalle la ley de movimiento de las partículas, no podemos calcular las trayectorias, velocidades instantáneas, etc. Pero con frecuencia, todo

esto no nos interesa en alto grado, más aún cuando para las partículas elementales es, a veces, completamente imposible fijar con exactitud las trayectorias y velocidades instantáneas (o cantidades de movimiento) a causa del principio de incertidumbre.

2. El problema del choque se formula, por regla, del siguiente modo: se dan las cantidades de movimiento y las energías cinéticas de las partículas antes del choque: ¿cómo hallar los valores de estas magnitudes después del choque? Resulta que para resolver este problema no es preciso realizar el análisis detallado de la interacción.

A continuación, examinaremos la teoría del choque sólo con la aproximación de la mecánica newtoniana, cuando la velocidad de las partículas es mucho menor que la de la luz en el vacío, mientras que las masas de las partículas son suficientemente grandes. Además, para simplificar los razonamientos, vamos a considerar sólo el choque de dos partículas. A pesar de la aparente limitación de semejante planteamiento del problema, éste será útil para analizar muchos fenómenos físicos reales. Examinemos ciertos problemas, para cuya resolución es suficiente aplicar la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

## § 17.2. Choque perfectamente inelástico

1. Recibe el nombre de *perfectamente inelástico* el choque cuando después del impacto los cuerpos se mueven a igual velocidad formando un solo cuerpo. Como ejemplo podemos indicar la caída de proyectiles en una plataforma con arena, la colisión de un meteorito con la Tierra, etc.

Supongamos que una partícula de masa  $m_1$  se mueve a una velocidad  $v_1$ , mientras que la partícula de masa  $m_2$ , a la velocidad  $v_2$ . Las partículas chocaron en cierto punto y se unieron.

¿Cuál será la velocidad del cuerpo formado de nuevo (fig. 17.1)? Como examinamos un caso no relativista, las masas de los cuerpos no varían al cambiar la velocidad y la masa del cuerpo formado de nuevo  $M = m_1 + m_2$ . Basándonos en la ley de la conservación de la cantidad de

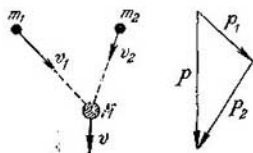


Fig. 17.1.

movimiento, tenemos

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v, \quad (17.1)$$

de donde

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (17.2)$$

2. Hay que prestar atención a que tanto las velocidades, como las cantidades de movimiento son vectores, por lo que (17.1) no puede ser entendido como una suma aritmética. Aquí, hay que ejecutar dicha operación como una

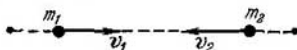


Fig. 17.2.

suma algebraica. En particular, si los cuerpos se mueven al encuentro por una recta, uno de los vectores tiene que tener signo positivo y el segundo, negativo (fig. 17.2).

3. Con el choque inelástico la suma de las energías cinéticas de las partículas antes de la colisión no es igual a la energía cinética del cuerpo formado después del choque. Esto es completamente evidente para el caso del choque inelástico de dos cuerpos, cuyas cantidades de movimiento son iguales y están dirigidas en sentidos opuestos. Aquí, la energía cinética del cuerpo después del choque es igual a cero, mientras que la suma de las energías cinéticas de los cuerpos que chocan, como es natural, antes del choque no era nula. Esto también es justo para el caso, cuando el cuerpo en reposo respecto del sistema dado de referencia, se divide en dos fragmentos.

4. En calidad de ejemplo, consideremos la desintegración radiactiva alfa. En el transcurso de la desintegración de cierto elemento radiactivo, éste emite una partícula alfa (núcleo de helio); el núcleo formado de nuevo sufre repercusión.

Supongamos que conocemos la energía cinética de la partícula alfa  $K$  y que nos interesa la energía cinética del nuevo núcleo, que designaremos con la letra  $R$ . Este problema se resuelve con facilidad partiendo de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

Sea la masa de la partícula alfa igual a  $m$  y la del núcleo antes de la desintegración  $M$ . Entonces, la masa del nuevo núcleo será igual a  $M - m$ . Suponiendo que el núcleo estaba en reposo antes de la desintegración respecto del sistema de referencia del laboratorio, en correspondencia con la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, obtenemos

$$0 = p_\alpha + p_R. \quad (17.3)$$



Por consiguiente, las cantidades de movimiento de la partícula alfa y del nuevo núcleo son de igual magnitud y de signos opuestos.

Sea que la partícula alfa está en movimiento a velocidad no relativista; la velocidad del nuevo núcleo será aún menor. Mediante la fórmula (16.5) hallamos sus energías cinéticas:

$$K = \frac{p_{\alpha}^2}{2m}, \quad R = \frac{p_R^2}{2(M-m)}. \quad (17.4)$$

La razón de las energías cinéticas

$$K/R = (M-m)/m. \quad (17.5)$$

La variación de la energía del núcleo inicial

$$\Delta \mathcal{E} = K + R = KM/(M-m). \quad (17.6)$$

Examinemos un ejemplo numérico concreto. Como han mostrado las investigaciones, durante su desintegración el núcleo de radio emite partículas alfa con una energía cinética  $K = 5,681$  MeV; la masa del núcleo de radio es 56 veces mayor que la masa de la partícula alfa ( $M = 56m$ ). En este caso, la energía cinética del núcleo, formado después de la desintegración radiactiva

$$R = \frac{Km}{M-m} = \frac{5,681 \cdot 1}{55} = 0,103 \text{ Mev,}$$

y la energía total de la reacción

$$\Delta \mathcal{E} = K + R = 5,784 \text{ MeV.}$$

### § 17.3. Choque elástico

1. Llamamos *elástico* un choque cuando se conserva no sólo la suma de las cantidades de movimiento, sino que también la suma de las energías cinéticas de los cuerpos que chocan. Esto no significa, de ninguna manera, que no cambia la energía de cada uno de ellos. Al contrario, al chocar cambian las velocidades de los cuerpos y, junto con ellas, los impulsos de movimiento y las energías cinéticas. Pero la suma de los impulsos de movimiento y la de las energías cinéticas quedan invariables con el choque elástico.

Cuando el choque de dos cuerpos es elástico, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2, \quad K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2, \quad (17.7)$$

donde sin rayas se designan las energías y los impulsos de movimiento antes del choque, con rayas, después de éste.

2. Consideremos el choque elástico *central* de dos bolas, es decir, tal choque cuando los vectores de velocidades están dirigidos por una recta que une los centros de dichas

bolas. Para simplificar los razonamientos, consideraremos el fenómeno en el sistema de referencia, con relación al cual la bola  $m_2$  está en reposo y la bola  $m_1$ , en movimiento a la velocidad  $v$ . La ecuación (17.7) toma la forma

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad (17.8)$$

o bien

$$m_1 (v - v_1) = m_2 v_2, \quad m_1 (v^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2.$$

Dividiendo la segunda igualdad por la primera, tenemos

$$v + v_1 = v_2. \quad (17.9)$$

Poniendo (17.9) en la primera igualdad del sistema (17.8), obtenemos

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v + m_2 v_1,$$

de donde

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (17.10)$$

3. Detengámonos en ciertos casos particulares de interés.

a) Si  $m_2 = m_1$ ,  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = v$ . Por consiguiente, para el choque elástico central de una bola contra otra bola en reposo de igual masa, la primera bola se para, mientras que la segunda adquiere la velocidad de la primera bola. Además, si las bolas son indistinguibles (por ejemplo, moléculas), obtendremos un resultado, como si la primera bola «hubiera pasado a través de la segunda» y continuara moviéndose con la misma velocidad, mientras que la bola en reposo quedó en su sitio.



Fig. 17.3.

b) Si  $m_1 > m_2$ ,  $0 < v_1 < v$  y  $v_2 > v$ . En el caso límite, cuando  $m_1 \gg m_2$ , la velocidad de la bola maciza casi no cambiará, en tanto que la bola ligera, en reposo antes del choque, se moverá a una velocidad  $v_2 \approx 2v$ .

c) Si  $m_1 < m_2$ ,  $-v \leq v_1 < 0$ , es decir, la bola ligera al chocar con la maciza se «refleja» en sentido contrario. La bola maciza  $m_2$  adquiere la velocidad  $0 \leq v_2 < v$ .

En el caso límite, cuando  $m_2 \gg m_1$ , podemos suponer que la razón  $m_1/m_2$  tiende a cero. Entonces de (17.10) sigue que  $v_2 = 0$ ; la velocidad de la primera bola

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{(m_1/m_2) - 1}{(m_1/m_2) + 1} v = -v,$$

es decir, al chocar la bola contra una pared maciza se repetirá de ella a la misma velocidad con la que choca contra ella (fig. 17.3); la velocidad de la pared, prácticamente, no cambia.

### § 17.4. Frenado de neutrones

1. Para ciertas reacciones nucleares es preciso moderar los neutrones, es decir, disminuir su energía cinética desde varios MeV hasta centésimas partes de electronvoltio. Los neutrones se frenan a cuenta de los choques elásticos de éstos con los núcleos de la materia moderadora. Hallemos el coeficiente de frenado  $r$ , igual a la razón de la energía perdida por el neutrón durante un choque y la energía cinética inicial.

Sea la masa del núcleo del moderador  $M$ , su velocidad después de la colisión  $u = \frac{2m}{m+M}v$  (véase (17.10)). La energía perdida por el neutrón es igual a la energía que ha recibido el núcleo del moderador; así, pues,

$$r = \frac{\Delta K}{K} = \frac{Mu^2 \cdot 2}{2 \cdot mv^2} = \frac{4mM}{(m+M)^2}. \quad (17.11)$$

Como moderador se emplea el carbono. La masa de su núcleo es 12 veces mayor que la masa del neutrón. Para  $M = 12m$ , de (17.11) obtenemos

$$r = \frac{4 \cdot 1 \cdot 12}{13^2} = 0,284 = 28,4\%.$$

2. Para determinar el número de colisiones hasta el frenado total de los neutrones realizamos el siguiente cálculo. Si la energía cinética inicial del neutrón es igual a  $K$ , después de un choque

$$K_1 = K - \Delta K = K(1 - r).$$

Después del segundo choque

$$K_2 = K_1 - \Delta K_1 = K_1(1 - r) = K(1 - r)^2.$$

Es evidente que después de  $n$  colisiones la energía cinética

$$K_n = K(1 - r)^n. \quad (17.12)$$

Suponiendo que

$$K = 1,75 \text{ MeV} = 1,75 \cdot 10^6 \text{ eV}, \quad K_n = 0,025 \text{ eV}, \quad r = 0,284.$$

obtenemos:  $0,025 = 1,75 \cdot 10^6 \cdot 0,716^n$  o bien  $7 \cdot 10^7 = 0,716^{-n}$ , de donde

$$n = \frac{-\lg(7 \cdot 10^7)}{\lg 0,716} = \frac{-7,845}{-0,145} = 54.$$

Así, pues, si el choque elástico del neutrón con el núcleo de carbono fuera siempre central, después de 54 choques su energía cinética disminuiría de 1,75 MeV a 0,025 eV, es decir, ¡70 millones de veces! No obstante, en realidad, además de los choques centrales se producen colisiones oblicuas, durante las cuales el neutrón pierde menos energía que con las centrales. Por esta razón, para conseguir el correspondiente frenado es preciso aumentar en cierto grado el número de choques.

3. El agua pesada es un moderador mucho más eficaz, ya que en ella los átomos de hidrógeno se han sustituido por los de hidrógeno pesado, es decir, deuterio. Aquí  $M = 2m$ ,  $r = 4mM/(m + M^2) = 8/9$ . Poniendo este valor de  $r$  en (17.12) obtenemos  $K_n = K/9^n$ . Suponiendo, como con anterioridad, que  $K = 1,75$  MeV,  $K_n = 0,025$  eV, tenemos que  $n = 7$ .

### § 17.5. Presión del flujo de partículas contra la pared

1. Estudiemos un flujo constituido por partículas iguales de masa  $m$ , que están en movimiento a una velocidad  $v$  perpendicularmente a cierta pared, cuya masa es mucho mayor que la masa de todas las partículas (fig. 17.4). En la figura vemos que durante el tiempo  $\Delta t$  llegarán a la pared todas las partículas contenidas en el volumen  $V = S \Delta l = Sv \Delta t$ . Si la concentración de las partículas (el número de ellas por unidad de volumen) es igual a  $n$ , durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  contra la pared chocarán  $N$  partículas:

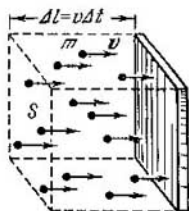


Fig. 17.4.

$$N = nV = nSv \Delta t.$$

2. Al chocar contra la pared, sobre la partícula actúa una fuerza igual a la variación de la cantidad de movimiento de la partícula por la unidad de tiempo:

$$f = \Delta(mv)/\Delta t. \quad (17.13)$$

Según la tercera ley de Newton, la partícula actúa sobre la pared con una fuerza igual en magnitud, pero de sentido inverso. Teniendo en cuenta que sobre la pared, en el lapso  $\Delta t$ , golpean  $N$  partículas, hallamos la fuerza total:

$$F = -fN = -nSv \Delta(mv). \quad (17.14)$$

3. La variación de la cantidad de movimiento de la partícula es función del carácter de su choque contra la

pared. Con el choque elástico contra la pared inmóvil, su velocidad cambia por la inversa (§ 17.3).

Así, pues,  $v_{in} = v$ ,  $v_{fin} = -v$ ; la variación de la cantidad de movimiento

$$\Delta (mv)_{elás} = mv_{fin} - mv_{in} = -2mv. \quad (17.15)$$

Poniendo (17.15) en (17.14), obtenemos

$$F_{elás} = 2Snmv^2. \quad (17.16)$$

Por definición, la presión  $p$  se llama la razón de la fuerza  $F$  al área  $S$ , sobre la que esta fuerza está aplicada (con ello, la dirección de la fuerza es perpendicular al área):

$$p = F/S.$$

De aquí se desprende que la presión contra la pared, producida por el flujo de partículas al ser el choque contra ella elástico, se expresa de la forma siguiente:

$$p_{elás} = 2nmv^2. \quad (17.17)$$

4. Con el choque inelástico, cuando las partículas parece que se "pegan" a la pared, la presión resulta ser dos veces menor. En efecto, aquí la velocidad inicial  $v_{in} = v$ , mientras que la final,  $v_{fin} = 0$ . La variación de la cantidad de movimiento

$$\Delta (mv)_{inel} = mv_{fin} - mv_{in} = -mv. \quad (17.18)$$

Poniendo esta expresión en (17.14), obtenemos

$$F_{inel} = Snmv^2, \quad p_{inel} = nmv^2. \quad (17.19)$$

5. Las expresiones obtenidas para la fuerza con la que el flujo actúa sobre la pared, son muy generales. Por ejemplo, sirven para calcular la presión del gas (§ 26.1), para calcular la presión luminosa (§ 68.5), etc.

Hagamos uso de ellas para calcular la fuerza con la que el flujo de un líquido actúa sobre la pared. El producto  $mn = \rho$  es la densidad del líquido. En realidad, si multiplicamos la concentración, o sea, el número de moléculas por la unidad de masa, por la masa de una molécula, obtendremos la masa de la sustancia por unidad de volumen, es decir, la densidad de ésta.

Así, que

$$F_{elás} = 2S\rho v^2, \quad (17.20)$$

$$F_{inel} = S\rho v^2. \quad (17.21)$$

En esencia, ya hicimos uso de semejantes fórmulas en el cap. 11 para apreciar las fuerzas de resistencia que sufre un cuerpo al moverse por un líquido (véase (11.10)). Allí, la expresión fue obtenida del análisis de las dimensiones, en el presente capítulo, partiendo de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

### Capítulo 18

## FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGÍA POTENCIAL

### § 18.1. Trabajo de una fuerza variable

1. Como ya indicamos (§ 16.4), el producto del módulo de la fuerza por el módulo del desplazamiento y el coseno del ángulo entre estos vectores, recibe el nombre de trabajo elemental de la fuerza  $F$  por el desplazamiento infinitésimo  $dl$ :

$$\Delta A = F dl \cos \alpha = F_t dl = F dl.$$

Con otras palabras, *el trabajo elemental es igual al producto de la componente tangencial de la fuerza por el módulo del desplazamiento.*

En dependencia de si el ángulo  $\alpha$  es agudo u obtuso, el trabajo elemental  $\Delta A$  puede ser tanto positivo (si  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $\Delta A > 0$ ), como negativo (si  $\pi/2 < \alpha < \pi$ ,  $\Delta A < 0$ ).

2. Para calcular el trabajo en el sector final del recorrido, dividimos éste en pequeños desplazamientos y calculamos el trabajo elemental en cada uno de ellos. La suma de los trabajos elementales, será el trabajo buscado de la fuerza en el sector final del recorrido:

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n = F_t^{(1)} \Delta l_1 + F_t^{(2)} \Delta l_2 + \dots + F_t^{(n)} \Delta l_n. \quad (18.1)$$

Hablando con rigor, aquí siempre surge cierto error que es función del procedimiento de división del camino en pequeños sectores. Un resultado exacto será sólo obtenido en *el límite*, cuando el recorrido sea dividido en un número infinitamente grande de desplazamientos infinitésimos.

3. El trabajo de una fuerza constante por un sector rectilíneo del recorrido, será expresado así:

$$A = F_t l = Fl \cos \alpha. \quad (18.2)$$

Efectivamente, en este caso de la fórmula (18.1) podemos sacar del paréntesis el factor  $F_t$  y la suma de los desplazamientos elementales  $\Delta l$  nos dará el espacio recorrido  $l$ .

Semejante trabajo puede ser representado en una gráfica (fig. 18.1). La gráfica de la componente tangencial de la fuerza con  $F_t = \text{const}$  es una línea recta paralela al eje de abscisas. Entonces, el trabajo en el sector del espacio  $l = l_2 - l_1$  es numéricamente igual al área del rectángulo

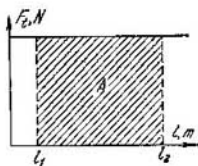


Fig. 18.1.



Fig. 18.2.

sombreado. Aquí hay que tener en cuenta la escala de conversión: el área unitaria representa la unidad de trabajo (en nuestra figura 1 cm<sup>2</sup> corresponde a 1 J).

4. En el caso general, la componente tangencial de la fuerza es una magnitud variable (fig. 18.2). Para el cálculo gráfico del trabajo, dividamos el recorrido  $l$  en varios sectores pequeños. Los valores más pequeños de la fuerza en cada sector (en nuestro caso, las ordenadas a la izquierda) los multiplicamos por los correspondientes desplazamientos y los sumamos. El área de la figura escalonada interior, obtenida de la forma descrita, representa cierto trabajo  $A_{\text{mín}}$ ; como para cada desplazamiento hemos tomado el menor valor de la fuerza, el trabajo  $A_{\text{mín}}$  es más pequeño que el trabajo  $A$ .

Pero si al hacer estos mismos cálculos tomamos para cada desplazamiento el valor máximo de la fuerza (en la fig. 18.3, las ordenadas a la derecha), el área de la figura escalonada que sobresale, representa cierto trabajo  $A_{\text{máx}}$ .

que es mayor que el trabajo buscado  $A$ . Así pues,

$$A_{\text{mín}} < A < A_{\text{máx.}}$$

Si aumentamos el doble el número de particiones, el área de la figura escalonada interior aumentará, mientras que la de la exterior, disminuirá (fig. 18.4). En los cursos de matemáticas se demuestra que con el crecimiento ilimitado del número de divisiones (como es natural,  $\Delta l \rightarrow 0$ ),

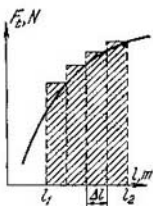


Fig. 18.3.

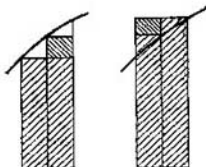


Fig. 18.4.

las áreas de las dos figuras escalonadas tienen un límite común, igual al área de un trapecio curvilíneo que es el que nos ofrecerá el valor numérico preciso del trabajo de una fuerza variable.

Así, pues, el trabajo de una fuerza variable se representa en una gráfica como el área de un trapecio curvilíneo, limitado por abajo con el eje de abscisas, por arriba con la gráfica de la fuerza y por los costados, por las ordenadas de los puntos límites.

Como sabemos, el área de un trapecio curvilíneo es una integral definida, tomada en los límites de las abscisas inicial y final. En correspondencia, el trabajo de una fuerza variable se expresa mediante una integral definida:

$$A = \int_{l_1}^{l_2} F \, dl = \int_{l_1}^{l_2} F \cos \alpha \, dl. \quad (18.3)$$

## § 18.2. Trabajo de una fuerza elástica

1. Primero calcularemos el trabajo de una fuerza externa que estira un resorte. Según la tercera ley de Newton, la fuerza externa es igual por su módulo a la fuerza elástica,



pero tiene sentido contrario ( $F_{\text{ext}} = -F_{\text{elás}}$ ); teniendo en cuenta la expresión para la fuerza elástica, obtenemos

$$F_{\text{ext}} = kx, \quad (18.4)$$

donde  $k$  es la rigidez. La gráfica de esta fuerza está representada en la fig. 18.5. El trabajo de la fuerza externa en el

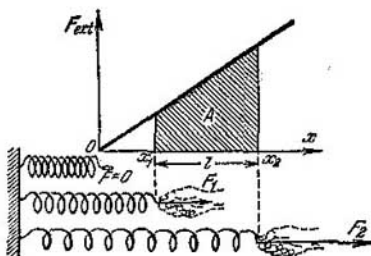


Fig. 18.5.

sector del recorrido  $l = x_2 - x_1$  es numéricamente igual al área del trapecio rayado:

$$A_{\text{ext}} = \frac{F_1 + F_2}{2} l = \frac{kx_1 + kx_2}{2} (x_2 - x_1) = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \quad (18.5)$$

2. El trabajo de una fuerza elástica en este mismo sector sólo se diferencia por el signo, o sea, que

$$A_{\text{elás}} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \quad (18.6)$$

Como es natural, este mismo resultado puede ser obtenido integrando:

$$A_{\text{elás}} = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{elás}} dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}.$$

3. Para  $x_1 < x_2$ , es decir, al estirar el muelle, la fuerza elástica realiza un trabajo negativo, lo que corresponde a la regla del signo de la fuerza: las fuerzas de atracción son negativas, las de repulsión, positivas (§ 10.2).

En efecto, al aumentar la distancia entre dos cuerpos que se atraen, la fuerza de atracción forma un ángulo obtuso con la dirección de desplazamiento ( $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ ), y, como

sabemos, el coseno de un ángulo obtuso es un número negativo. Aquí la fuerza de atracción realiza un trabajo negativo (fig. 18.6, a). En lo que atañe a la fuerza de repulsión, ésta

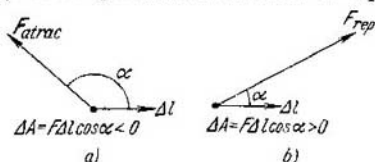


Fig. 18.6.

forma con la dirección de desplazamiento un ángulo agudo ( $0 \leq \alpha < \pi/2$ ) y, por lo tanto, realiza un trabajo positivo (fig. 18.6, b).

### § 18.3. Trabajo de la fuerza de Coulomb

1. Con bastante facilidad hemos conseguido la expresión para el trabajo de una fuerza elástica, ya que en este caso

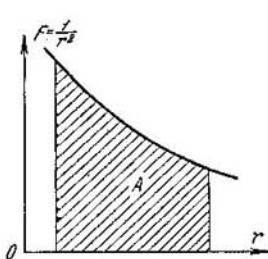


Fig. 18.7.

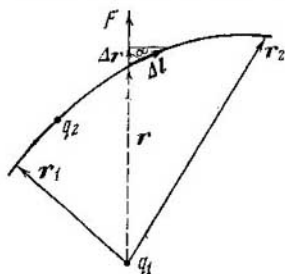


Fig. 18.8.

el trabajo se representa por el área de un trapecio corriente. Algo más difícil será calcular el trabajo de la fuerza de Coulomb (o de gravitación).

En efecto, aquí la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y la gráfica de esta fuerza es una línea curva. Por esta razón, el trabajo se representa mediante el área de un trapecio curvilíneo (fig. 18.7),

mientras que dicha área se calcula o integrando, o bien por métodos numéricos.

2. Calculemos el trabajo de la fuerza de Coulomb al desplazarse una carga por una trayectoria curvilínea, tomada al azar (fig. 18.8).

Dividamos esta curva en desplazamientos infinitésimos  $\Delta l$ , que con la primera aproximación pueden ser considerados como segmentos infinitamente pequeños. El trabajo elemental por semejante segmento

$$\Delta A = F \Delta l \cos \alpha = F \Delta r, \quad (18.7)$$

ya que como vemos en la figura  $\Delta l \cos \alpha = \Delta r$ . La suma de todos los trabajos elementales

$$\begin{aligned} A &= F_1 \Delta l_1 \cos \alpha_1 + F_2 \Delta l_2 \cos \alpha_2 + \dots \\ &\dots = F_1 \Delta r_1 + F_2 \Delta r_2 + \dots \end{aligned} \quad (18.8)$$

El resultado exacto será obtenido pasando al límite para  $\Delta r \rightarrow 0$ . Así, pues, el trabajo de la fuerza de Coulomb para el desplazamiento de una carga del punto definido por el radio vector  $r_1$  al punto que se determina por el radio vector  $r_2$ , es expresado por la siguiente integral definida:

$$A_{\text{Coul}} = \int_{r_1}^{r_2} F_{\text{Coul}} \cos \alpha \, dl = \int_{r_1}^{r_2} F_{\text{Coul}} \, dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q_1 q_2 \, dr}{4\pi \epsilon_0 r^2}. \quad (18.9)$$

Es sabido que

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}. \quad (18.10)$$

Por consiguiente, el trabajo de la fuerza de Coulomb

$$A_{\text{Coul}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_1} - \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_2}. \quad (18.11)$$

De forma que *el trabajo de la fuerza de Coulomb no depende de la forma de la trayectoria de la carga*; el trabajo queda definido sólo por los radios vectores de los puntos inicial y final de la trayectoria.

3. Recomendamos que el lector muestre por su cuenta, que en plena correspondencia con la fórmula deducida al final del párrafo anterior, al aumentar la distancia entre las cargas, las fuerzas de repulsión realizarán un trabajo positivo, en tanto que las de atracción, negativo.

## § 18.4. Trabajo de la fuerza de gravitación

1. El cálculo del trabajo de la fuerza de gravitación, en realidad, en nada se diferencia del cálculo del trabajo de la fuerza de Coulomb. Sólo es necesario sustituir en la fórmula (18.11)  $q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0)$  por la expresión  $\gamma m_1 m_2$  y cambiar el signo, ya que la fuerza de gravitación siempre es de atracción. Obtenemos

$$A_{\text{grav}} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r_1} + \frac{\gamma m_1 m_2}{r_2}. \quad (18.12)$$

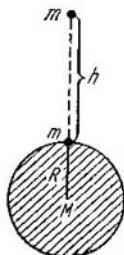


Fig. 18.9.

2. Sea que un cuerpo de masa  $m$  se eleva a cierta altura  $h$  sobre la superficie de la Tierra (fig. 18.9). Haciendo  $m_1 = m_2$  (la masa del cuerpo),  $m_2 = M$  (masa de la Tierra),  $r_1 = R$  (radio del globo terrestre) y  $r_2 = R + h$ , obtenemos la expresión para el trabajo de la fuerza de gravedad:

$$A = -\frac{\gamma m M}{R} + \frac{\gamma m M}{R+h} = -\frac{\gamma m M h}{R(R+h)}. \quad (18.13)$$

El trabajo de la fuerza externa tiene el signo contrario, por consiguiente

$$A_{\text{ext}} = \frac{\gamma m M h}{R(R+h)}. \quad (18.14)$$

Si la altura  $h$  es mucho menor que el radio de la Tierra, se puede, aproximadamente, hacer  $R + h \approx R$ . Empleando (9.11), tenemos

$$A_{\text{ext}} = \gamma m M h / R^2 = mgh. \quad (18.15)$$

En realidad, este resultado podría ser obtenido de modo elemental. A pequeñas alturas sobre la Tierra, la fuerza de gravedad  $P = mg$  es una magnitud constante. Para una fuerza constante  $A_{\text{ext}} = Ph = mgh$ .

Sin embargo, la deducción ofrecida más arriba, aunque es más complicada, permite apreciar el error que obtenemos al sustituir la fórmula precisa (18.14) por la expresión aproximada (18.15). En efecto, supongamos que es preciso calcular el trabajo con una exactitud salvo un tanto por ciento; entonces

$$\frac{A_{\text{apr}} - A_{\text{prec}}}{A_{\text{prec}}} = \frac{A_{\text{apr}}}{A_{\text{prec}}} - 1 \leq 0,01.$$

Poniendo los valores precisos y aproximados del trabajo y simplificando los factores iguales, tendremos

$$\frac{R+h}{R} - 1 = \frac{h}{R} \leq 0,01.$$

Así que hasta alturas  $h = 0,01R = 0,01 \cdot 6371 \approx 64$  km podemos hacer uso de la fórmula aproximada (18.15) con una precisión salvo 1%.

3. Está claro en absoluto, que *el trabajo de la fuerza de gravitación, como el de la fuerza de Coulomb, no depende de la forma de la trayectoria* por la que se desplaza el punto material; el trabajo se define sólo por los radios vectores de los puntos inicial y final de la trayectoria. Esto se desprende directamente de la identidad de las expresiones para calcular el trabajo de las fuerzas de gravitación y de Coulomb.

### § 18.5. Fuerzas conservativas

1. En los párrafos anteriores mostramos que existen fuerzas elásticas, de Coulomb, de gravitación, cuyo trabajo no depende de la forma de la trayectoria y que se define sólo por las coordenadas del comienzo y el final de la trayectoria. Semejantes fuerzas se llaman *conservativas*. Vamos a mostrar que *el trabajo de una fuerza conservativa por una trayectoria cerrada, tomada al azar, es igual a cero*.

Para demostrarlo, examinemos cierta trayectoria cerrada (fig. 18.10). Designemos el trabajo en los sectores  $M_1KM_2$  y  $M_1LM_2$  por  $A_K$  y  $A_L$ , respectivamente. De la definición del concepto "fuerza conservativa" se desprende que si el cuerpo se desplaza del punto  $M_1$  al punto  $M_2$ , el trabajo no depende de si el cuerpo se mueve por la curva  $M_1KM_2$  o  $M_1LM_2$ ; así, que  $A_K = A_L$ . Sea que al desplazarse el cuerpo del punto  $M_1$  al punto  $M_2$  se realiza trabajo positivo, mientras que al moverse el cuerpo del punto  $M_2$  al punto  $M_1$ , el trabajo sea negativo,  $A'_L = -A_L$ . En efecto, si la dirección de la fuerza no cambia y la del desplazamiento varía por la opuesta, según la definición, el trabajo cambia de signo.

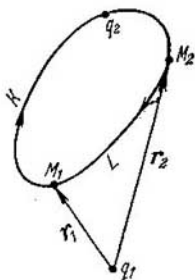


Fig. 18.10.

El trabajo por una trayectoria cerrada es la suma de los trabajos en los sectores  $M_1KM_2$  y  $M_2LM_1$ ; así, pues,

$$A_{\text{cerr}} = A_K + A'_L = A_K - A_L = 0.$$

Recomendamos al lector que efectúe el cálculo para una fuerza concreta, que actúa sobre la trayectoria prefijada, haciendo uso de las expresiones obtenidas para las fuerzas elásticas (18.6), de Coulomb (18.11) o de gravitación (18.12).

2. Notemos que también existen fuerzas no conservativas (de otra manera, *disipativas*), cuyo trabajo, en modo considerable, depende de la forma de la trayectoria. Ejemplo de semejante fuerza es la de rozamiento. En realidad, al desplazar cierto objeto, digamos, por el suelo, realizamos trabajo contra las fuerzas de rozamiento. Pero aquí, como nos muestra la experiencia, el trabajo depende notablemente de la trayectoria por la que el cuerpo se desplaza. En particular, si la fuerza de rozamiento es igual por todos los puntos de la superficie del suelo, el trabajo por el recorrido más corto es menor que por cualquier otra trayectoria.

El trabajo de una fuerza disipativa por una trayectoria cerrada no es igual a cero. Por ejemplo, el trabajo de la fuerza de rozamiento (o cualquier otra fuerza de resistencia) es siempre negativo, ya que la fuerza está dirigida en sentido contrario al desplazamiento. Es natural, que el trabajo de esta fuerza por cualquier trayectoria no se reduzca a cero.

### § 18.6. Energía potencial de las interacciones elásticas, de Coulomb y de gravitación

1. La *energía potencial*  $U$  de los cuerpos en interacción, es aquella que depende de la disposición recíproca de dichos cuerpos.

En todos los ejemplos que hemos examinado (fórmulas (18.6), (18.11), (18.12)) el trabajo de las fuerzas conservativas era igual a la diferencia de dos expresiones, funciones de las coordenadas del comienzo y el final de la trayectoria, es decir, a la variación de la energía potencial del sistema de cuerpos en interacción:

$$A = U_1 - U_2. \quad (18.16)$$

2. Comparando las fórmulas (18.6) y (18.16), obtenemos la siguiente expresión para la *energía potencial de las fuerzas*

elásticas:

$$U_{\text{elás}} = kx^2/2. \quad (18.17)$$

Queda claro, que la energía potencial es igual a cero para  $x = 0$ , en el caso cuando el resorte no está deformado.

3. La comparación análoga de las fórmulas (18.11) y (18.16) nos permite hallar la expresión de la energía potencial de las fuerzas de Coulomb:

$$U_{\text{Coul}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (18.18)$$

Notemos, que en este caso la energía potencial tiende a cero cuando la distancia entre las cargas en interacción crece infinitamente ( $r \rightarrow \infty$ ). Si las cargas  $q_1$  y  $q_2$  tienen igual signo, entre ellas actúa la fuerza de repulsión, mientras que la energía potencial será una magnitud positiva. Si, por lo contrario, las cargas  $q_1$  y  $q_2$  tienen diferentes signos, entre ellas actúa la fuerza de atracción y la energía potencial será una magnitud negativa.

4. La energía potencial de las fuerzas de gravitación puede ser hallada comparando las fórmulas (18.12) y (18.16):

$$U_{\text{grav}} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r}. \quad (18.19)$$

Aquí la energía potencial es una magnitud negativa, ya que la fuerza de gravitación es una fuerza de atracción. Al aumentar ilimitadamente la distancia entre los cuerpos en interacción ( $r \rightarrow \infty$ ), la energía potencial tiende a cero, es decir, *crece* a cuenta del trabajo de la fuerza externa, que aumenta la distancia entre los cuerpos que interactúan.

5. Tiene determinado interés el valor de la energía potencial de la fuerza de gravedad cerca de la superficie de la Tierra. En la expresión (18.16), hagamos la energía en la superficie terrestre  $U_1 = 0$ , mientras que designamos por  $U$  la energía  $U_2$  a la altura  $h$ ; en lugar del trabajo de la fuerza de gravedad pongámosla en (18.13). Obtenemos

$$U = \frac{\gamma m M h}{R(R+h)}. \quad (18.20)$$

A pequeñas alturas ( $h \ll R$ ) hallaremos la expresión aproximada

$$U = mgh. \quad (18.21)$$

Estas últimas dos fórmulas reciben con frecuencia el nombre de *energía potencial de un cuerpo en el campo gravitatorio*. Semejante terminología no es del todo exacta: en realidad no es el propio cuerpo el que posee energía potencial, sino el sistema formado por la Tierra y este cuerpo. No obstante, si esto no se olvida, remarcando la presencia del campo gravitatorio (creado por la Tierra), semejante definición no será contraproducente. De forma análoga podemos hallar la energía potencial de una carga en el campo eléctrico. Pero es inaceptable por completo, hablar simplemente de la energía potencial de un cuerpo, sin indicar el campo en el que él se halla.

6. Hay que notar, que la energía potencial puede ser definida con una precisión salvo un sumando constante arbitrario. En efecto, si añadimos a todos los valores de la energía potencial cierta constante, el nuevo valor de la energía potencial  $U'$  se expresará del modo siguiente:

$$U' = U + \text{const.}$$

Con semejante transformación de la energía potencial, el trabajo no varía. Efectivamente,

$$\begin{aligned} A' &= U'_1 - U'_2 = (U_1 + \text{const}) - (U_2 + \text{const}) = \\ &= U_1 - U_2 = A. \end{aligned}$$

Con frecuencia, el resultado obtenido se enuncia de la siguiente forma: *el nivel nulo de la energía potencial puede ser elegido al azar*; al pasar a otro nivel nulo, los valores de la energía potencial en todos los puntos, varían en un mismo sumando. En lo que se refiere al trabajo de la fuerza, éste conserva su valor.

Precisamente tomando en consideración esta propiedad, examinábamos con detalle el problema acerca del nivel nulo de la energía potencial de las interacciones elástica, de Coulomb y gravitatoria.

## § 18.7. Potencial del campo electrostático

1. En el cap. 10 hemos caracterizado el campo eléctrico mediante *la característica de fuerza*, es decir, con el vector de intensidad  $E$ . Sin embargo, podemos también introducir *la característica energética* del campo. o sea, la magnitud escalar  $\varphi$ , llamada *potencial*.



El potencial de un punto del campo es numéricamente igual a la razón entre la energía potencial de una carga de prueba puntiforme, ubicada en este punto del campo, y la magnitud de dicha carga:

$$\varphi = U/q. \quad (18.22)$$

Si la carga de prueba se desplaza de un punto del campo con potencial  $\varphi_1$  a otro punto del campo con potencial  $\varphi_2$ , en tal caso el campo realiza el trabajo

$$A = U_1 - U_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (18.23)$$

Así, pues, *el trabajo realizado por el campo eléctrico al desplazarse la carga de prueba de un punto del campo a otro, es igual al producto de la carga por la diferencia de potencial.*

2. Las fuerzas eléctricas son conservativas; su trabajo no depende de la forma de la trayectoria y se define sólo por los valores del potencial en los puntos inicial y final del recorrido. De aquí se desprende que el campo eléctrico potencial no es capaz de obligar a las cargas eléctricas a desplazarse por una trayectoria cerrada.

3. En el SI, la unidad de potencial es *el voltio (V)*. El voltio es igual al potencial de un punto del campo en el que una carga de prueba de 1 C posee una energía potencial de 1 J. Es natural, que si la diferencia de potencial entre dos puntos del campo es igual a 1 V, las fuerzas eléctricas, desplazando una carga de prueba de 1 C entre estos puntos, realizan un trabajo igual a 1 J:

$$1\text{V} = \frac{1\text{J}}{1\text{C}}.$$

Ahora ya podemos fundamentar el sentido de la unidad de energía llamada *electronvoltio*, introducida en el § 16.6; un electronvoltio es la energía adquirida por una partícula que porta una carga elemental (es decir, la carga del electrón), al moverse entre dos puntos del campo entre los que la diferencia de potencial es igual a 1 V. Como  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C y  $\varphi_1 - \varphi_2 = 1$  V,

$$1\text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

### § 18.8. Potencial del campo de una carga puntual

1. Si designamos por  $Q$  la carga puntual que crea el campo y por  $q$  la carga de prueba, de acuerdo con (18.18) la energía potencial de la carga de prueba a la distancia  $r$

de la fuente del campo, tomará la forma

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (18.24)$$

De aquí se desprende que el potencial del campo de una carga puntiforme, es igual a

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (18.25)$$

De esta expresión sigue que el potencial del campo de una carga puntual se reduce a cero en un punto infinitamente alejado. Sin embargo, semejante elección del nivel nulo del potencial, aunque es cómoda, no es del todo obligatoria. En principio, el potencial nulo se puede elegir en cualquier punto del campo (véase el § 18.6, p. 6). Por esta causa, en un mismo sumando constante cambiarán los potenciales de todos los puntos del campo, pero el trabajo de las fuerzas eléctricas quedará invariable, ya que éste no es función de los valores absolutos de los potenciales, sino que de la diferencia de potencial, que con lo indicado no varía su valor.

2. De forma análoga al potencial del campo eléctrico, podemos introducir el concepto de potencial del campo gravitatorio. El potencial del campo de una partícula de masa  $M$  a una distancia  $r$  de ella, según (18.19), es igual a

$$\Phi_{\text{grav}} = -\gamma M/r. \quad (18.26)$$

En este caso, el potencial se reduce a cero en un punto infinitamente alejado. Si suponemos que el potencial es igual a cero en la superficie de la Tierra, de acuerdo con (18.20), el potencial del campo gravitatorio a la altura  $h$  sobre la superficie terrestre, será igual a

$$\Phi_{\text{grav}} = \frac{\gamma M h}{R(R+h)} = gh \frac{R}{R+h}. \quad (18.27)$$

A alturas no grandes ( $h \ll R$ ), tendremos aproximadamente

$$\Phi_{\text{grav}} = gh. \quad (18.28)$$

### § 18.9. Energía del campo eléctrico

La energía potencial de dos cargas  $q_1$  y  $q_2$ , como fue mostrado en el § 18.6, es igual a

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Pero la expresión  $q_1/(4\pi\epsilon_0 r) = \varphi_1$  es el potencial del campo creado por la carga  $q_1$  en el punto donde se encuentra la carga  $q_2$ ; la expresión  $q_2/(4\pi\epsilon_0 r) = \varphi_2$  es el potencial del campo creado por la carga  $q_2$  en el punto donde se halla la carga  $q_1$ . Por esta causa, la expresión para la energía potencial de dos cargas en interacción, puede ser escrita de la forma siguiente:

$$U = q_1\varphi_2 = q_2\varphi_1. \quad (18.29)$$

La semisuma de dos magnitudes iguales, es igual a cada una de ellas; por consiguiente,

$$U = 1/2 (q_1\varphi_2 + q_2\varphi_1). \quad (18.30)$$

Para un conjunto de muchas cargas, la energía potencial se calcula del mismo modo, es decir, como la semisuma de los productos de cada carga por la suma de los potenciales de los campos creados por todas las cargas, salvo el creado por sí misma:  $q_1$  se multiplica por la suma de todos los potenciales, pero sin  $\varphi_1$ ;  $q_2$ , por la suma de todos los potenciales, salvo  $\varphi_2$ , etc. La causa reside en que el campo creado por cierta carga inmóvil, actúa sobre cualesquiera otras cargas, pero no sobre la carga que lo crea.

## Capítulo 19

### LEY DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA EN LA MECÁNICA NEWTONIANA

#### § 19.1. Energía mecánica y su conservación

1. Estudiemos un sistema de cuerpos en el que sólo actúan fuerzas conservativas. *Llamamos energía mecánica total de un sistema, la suma de las energías cinética y potencial:*

$$W = K + U. \quad (19.1)$$

En la mecánica newtoniana esta magnitud juega un papel de importancia exclusiva.

2. Supongamos que el sistema conservativo de cuerpos que examinamos es cerrado. Esto significa que en él sólo

actúan fuerzas internas. De la correlación (16.14) se desprende que el trabajo de las fuerzas internas es igual a la variación de la energía cinética, mientras que de (18.16), que el trabajo es igual al cambio de la energía potencial. Así, pues,

$$A = K_2 - K_1 \quad \text{y} \quad A = U_1 - U_2.$$

Igualando los segundos miembros de estas expresiones, obtenemos

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2,$$

o bien

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1. \quad (19.2)$$

Por consiguiente, la suma de las energías cinética y potencial, es decir, la energía mecánica del sistema es invariable:

$$W = K + U = \text{const.} \quad (19.3)$$

Hemos hallado *la ley de la conservación de la energía en la mecánica newtoniana*. Puede ser enunciada del modo siguiente: *la energía mecánica de un sistema conservativo cerrado permanece constante*.

## § 19.2. Energía mecánica y rozamiento

La ley de la conservación de la energía en la mecánica newtoniana, que hemos enunciado con anterioridad, en cierto grado es una idealización de las condiciones del experimento real. En verdad, en todo sistema verídico de cuerpos, actúan las fuerzas de rozamiento, que no son conservativas. Por esta razón, la ley de la conservación de la energía mecánica se cumple sólo de forma aproximada y con tanta mayor precisión, cuanto menores sean las fuerzas de rozamiento en comparación con las elásticas, eléctricas o gravitatorias.

La experiencia nos muestra que existen tales sistemas en los que las fuerzas de rozamiento, con la primera aproximación, pueden ser despreciadas. En semejante caso, los cálculos realizados sobre la base de la ley de la conservación de la energía mecánica se confirman en la práctica.

Si las fuerzas de rozamiento no pueden ser despreciadas, es posible introducir una corrección que tome en consideración el rozamiento. Entonces, la ley de la conservación de

la energía mecánica será escrita de la siguiente forma:

$$W_1 = W_2 + A_{\text{roz}}, \quad (19.4)$$

donde  $W_1$  y  $W_2$  son las energías mecánicas al comenzar y finalizar el proceso;  $A_{\text{roz}}$ , el trabajo de las fuerzas de rozamiento.

Más adelante, serán examinados ciertos procedimientos de aplicación de la ley de la conservación de la energía mecánica.

### § 19.3. Velocidades cósmicas

1. Tratemos de calcular, qué velocidad hay que comunicar a un cohete para que entre en órbita circular alrededor de la Tierra. Designemos su velocidad orbital por  $v_{\text{orb}}$ , la velocidad de lanzamiento  $v$ , el radio de la órbita  $r$  (fig. 19.1).

Sobre el cohete en movimiento por una órbita circular, está aplicada la fuerza de gravitación de la Tierra que le comunica aceleración normal  $a = v_{\text{orb}}^2/r$ . De acuerdo con la segunda ley de Newton

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = \frac{mv_{\text{orb}}^2}{r}. \quad (19.5)$$

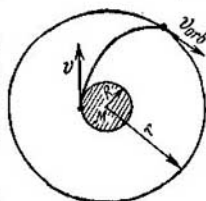


Fig. 19.1.

Pero nos interesa no la velocidad orbital, sino la de lanzamiento. Para definirla hagamos uso de la ley de la conservación de la energía en la mecánica newtoniana; la suma de las energías potencial y cinética en la superficie terrestre y en la órbita son iguales:

$$K_{\text{sup}} + U_{\text{sup}} = K_{\text{orb}} + U_{\text{orb}}, \quad (19.6)$$

o bien

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma mM}{R} = \frac{mv_{\text{orb}}^2}{2} - \frac{\gamma mM}{r}. \quad (19.7)$$

Teniendo en cuenta (19.5), tenemos

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma mM}{R} = \frac{\gamma mM}{2r} - \frac{\gamma mM}{r}.$$

En definitiva, obtenemos

$$v = \sqrt{\gamma M \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{r} \right)}. \quad (19.8)$$

Hemos realizado los cálculos sin tener en cuenta la resistencia del aire. En condiciones reales, cuando el cohete se lanza a la atmósfera, la velocidad de lanzamiento debe ser aumentada. Sin embargo, el cálculo de la velocidad real de lanzamiento es muy complicado y no puede ser realizado aquí.

2. Calculemos la primera velocidad cósmica, es decir, la velocidad de lanzamiento, cuando el cohete se mueve a poca distancia de la superficie terrestre. En este caso  $r \approx R$ , por lo que

$$v_1 = \sqrt{\gamma M \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{r} \right)} = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}. \quad (19.9)$$

Como para pequeñas alturas  $g = \gamma M/R^2$ , entonces

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{gR} = \sqrt{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}} = \\ &= 7,91 \cdot 10^3 \text{ m/s} \approx 8 \text{ km/s}. \end{aligned}$$

Es decir, la primera velocidad cósmica es igual a 8 km/s.

3. Recibe el nombre de *segunda velocidad cósmica*, aquella velocidad de lanzamiento del cohete a la que éste abandona el campo de gravedad de la Tierra y se convierte en un planeta artificial. En este caso, se puede suponer que el cohete entrará en una órbita infinitamente alejada. Poniendo en (19.8)  $r \rightarrow \infty$ , tenemos

$$v_2 = \sqrt{2\gamma M/R} = v_1 \sqrt{2} = 7,91 \cdot 1,414 = 11,2 \text{ km/s}.$$

La segunda velocidad cósmica es casi una vez y media mayor que la primera.

#### § 19.4. "Rizo del diablo"

Sea que un ciclista rueda sin girar los pedales por la pista vertical del «rizo del diablo» (fig. 19.2). Hay que determinar la altura mínima  $H$  desde la que debe comenzar la bajada, para que el ciclista no caiga del punto superior del rizo, es decir, en el sector más peligroso de la trayectoria.

En el punto superior sobre el ciclista actúan dos fuerzas: la de gravedad  $P = mg$  y la reacción del apoyo de la superficie interior de la pista  $Q$ ; su resultante comunica al ciclista aceleración normal  $a = v^2/r$ . De acuerdo con la segunda ley de Newton

$$mg + Q = mv^2/r, \quad (19.10)$$

Para hallar la velocidad en el punto superior del rizo, hagamos uso de la ley de la conservación de la energía: la energía potencial

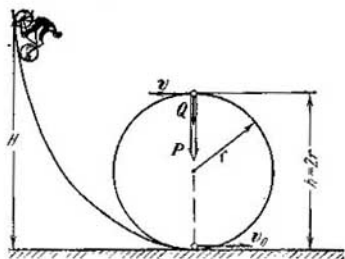


Fig. 19.2.

al comenzar la bajada (a la altura  $H$ ) debe ser igual a la suma de las energías cinética y potencial en el punto superior del rizo (a la altura  $h = 2r$ ),

$$mgH = mg \cdot 2r + \frac{mv^2}{2} \text{ o bien } H = 2r + \frac{v^2}{2g}.$$

Poniendo el valor de  $v^2$  de (19.10), tenemos

$$H = \frac{5r}{2} + \frac{Qr}{2mg}.$$

La altura mínima (sin tener en cuenta el rozamiento) se obtiene si en el punto superior del rizo, el ciclista se desliza casi sin hacer contacto con la pista. Entonces la reacción del apoyo  $Q = 0$  y  $H = 2,5 r$ .

### § 19.5. Curvas potenciales

1. Con frecuencia, un punto material puede moverse sólo por cierta curva prefijada, por ejemplo, a lo largo del eje de abscisas. En tal caso, su energía potencial depende solamente de una variable, o sea,  $U = f(x)$ . La gráfica que muestra la dependencia entre la energía potencial y la distancia, es llamada *curva potencial*. Resulta, que el análisis de la forma de esta gráfica nos ofrece amplia información acerca del carácter del movimiento del punto.

Como ejemplo, examinemos el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza elástica (fig. 19.3). Con  $x = x_0$  el resorte no está deformado y la fuerza aplicada a la partícula es igual a cero. Cuando la partícula se desvía

de la posición de equilibrio, sobre ella actúa una fuerza  $F = -k(x - x_0)$ . Notemos, que con  $x > x_0$  la fuerza es negativa (atracción), mientras que con  $x < x_0$ , positiva (repulsión).

La energía potencial de la partícula (véase (18.17)), es igual a

$$U = \frac{k(x - x_0)^2}{2}. \quad (19.11)$$

Se representa en la gráfica (fig. 19.3) en forma de una parábola con el vértice en el punto  $x = x_0$ . En lo que se refiere a la energía mecánica de la partícula  $W = K + U$ , ésta es una magnitud constante y se representa en la gráfica con una línea recta paralela al eje de abscisas.

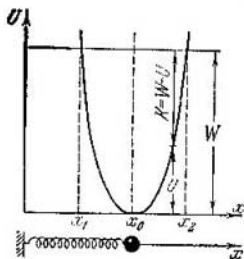


Fig. 19.3.

Ante todo, en la gráfica vemos que la energía cinética puede ser hallada de inmediato en cualquier punto como la longitud del segmento desde la recta  $W$  hasta la parábola, ya que  $K = W - U$ . Para  $x = x_0$ , la partícula tendrá el valor máximo de la energía cinética; aquí  $U = 0$

y  $K_{\text{máx}} = W$ . En los puntos  $x = x_1$  y  $x = x_2$  la energía cinética de la partícula es nula, ya que aquí  $U_{\text{máx}} = W$ .

Además, en la gráfica vemos que la partícula no puede desplazarse tras el punto  $x_2$  a la derecha y tras el punto  $x_1$ , a la izquierda. En efecto, la energía cinética no puede ser magnitud negativa y, por consiguiente, la energía potencial no puede ser mayor que la energía total\*). En semejante caso decimos que la partícula se encuentra en el pozo de potencial con coordenadas  $x_1 \leq x \leq x_2$ .

2. El análisis de la inclinación de la curva de potencial permite determinar con rapidez el signo de la fuerza y, con ello, el carácter de su actuación (atracción o repulsión). En realidad, el trabajo elemental  $\Delta A = F \Delta x$ ; por otro lado,  $\Delta A = U_1 - U_2 = -\Delta U$ . Entonces, si la fuerza es

\* La mecánica cuántica introduce en esta deducción notables correcciones relacionadas con la naturaleza singular de las micropartículas y con el principio de incertidumbre (§§ 70.2—70.6).



función sólo de una coordenada, por ejemplo, de la abscisa  $x$ ,  $F \Delta x = -\Delta U$  o bien

$$F = -\Delta U / \Delta x.$$

Pero en la gráfica  $\Delta U / \Delta x = \operatorname{tg} \alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo de inclinación de la curva de potencial respecto del eje de abscisas (fig. 19.4). Hablando con propiedad, el valor exacto de la fuerza será sólo obtenido en el límite, cuando el desplazamiento  $\Delta x$  tiende a cero:

$$F_x = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{dU}{dx} = -U'(x). \quad (19.12)$$

Así, pues, en los sistemas conservativos la fuerza es igual a la derivada de la energía potencial por la coordenada, tomada con signo opuesto.

Cuando la energía potencial crece, la curva de potencial forma con el eje de abscisas un ángulo agudo. La tangente

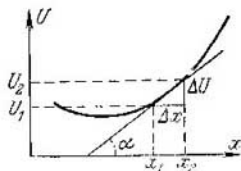


Fig. 19.4.

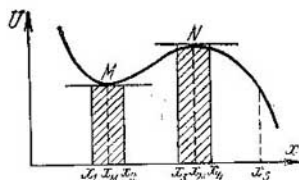


Fig. 19.5.

de semejante ángulo es un número positivo, mientras que la fuerza tiene signo contrario, es decir, negativo; por consiguiente, esta fuerza es de atracción.

Si, por lo contrario, la energía potencial decrece, la curva de potencial forma con el eje de abscisas un ángulo obtuso, cuya tangente es un número negativo. En tal caso, la fuerza será positiva, o sea, de repulsión.

Por fin, en los puntos del mínimo y máximo de energía la fuerza, como es lógico, será igual a cero, ya que en el entorno de estos puntos ella cambia de signo. En la gráfica la tangente a la curva de potencial en estos puntos es paralela al eje de abscisas (fig. 19.5).

Proponemos que el lector demuestre por su cuenta que en el caso representado en la fig. 19.6 la partícula con

energía total  $W < U_0$ , se hallará o en el pozo de potencial  $x_1 \leq x \leq x_2$ , o bien se alejará a un punto infinitamente distanciado; en lo que atañe a la barrera de potencial  $x_2 \leq$

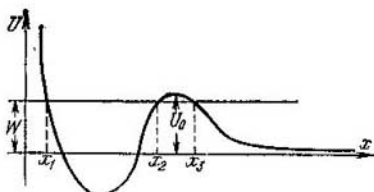


Fig. 19.6.

$\leq x \leq x_3$ , esta partícula no podrá vencerla ni por la izquierda ni por la derecha.

3. Hay que prestar atención a una interesantísima propiedad de la energía potencial. Si la distancia entre las partículas que se atraen disminuye, también decrece la energía potencial, mientras que la fuerza de atracción aumenta. Y a la inversa, el aumento de la distancia entre dichas partículas se acompaña por el crecimiento de la energía potencial y por el decrecimiento de la fuerza de atracción.

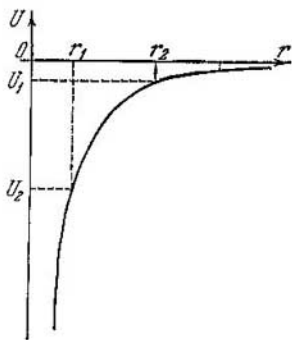


Fig. 19.7.

su justeza, tomando como ejemplo las fuerzas de Coulomb y de gravitación, lo dejamos a cuenta del lector.

Con este fin es conveniente analizar la curva de potencial de la interacción gravitatoria entre dos puntos materiales, mostrada en la fig. 19.7 y comparar la energía y la fuerza en los puntos con coordenadas  $r_1$  y  $r_2$ . Al construir la curva

suponíamos que la energía potencial era igual a cero con una distancia infinitamente grande entre los puntos en interacción (véase (18.19)). No obstante, esto no tiene importancia de principio: el resultado de los razonamientos no depende en absoluto de donde se ha elegido el nivel nulo de la energía potencial.

### § 19.6. Energía potencial y equilibrio

1. El análisis de las curvas de potencial permite juzgar acerca de las condiciones de equilibrio de cierto cuerpo (con mayor precisión, de un punto material).

*Un cuerpo se halla en equilibrio si es igual a cero la resultante de todas las fuerzas aplicadas a él.* Es lógico, que al equilibrio corresponden los puntos con la energía potencial mínima o máxima (los puntos  $M$  y  $N$  en la fig. 19.5), ya que precisamente en estos puntos la fuerza se reduce a cero. Sin embargo, los puntos del máximo o mínimo de energía no son equivalentes.

Efectivamente, supongamos que una partícula yace en el punto  $x_M$ , donde la energía potencial es la mínima. En el sector  $x_1 \leq x < x_M$  dicha energía disminuye, por consiguiente, sobre la partícula está aplicada una fuerza positiva de repulsión, que la retorna al punto  $M$ . En el sector  $x_M < x \leq x_2$  la energía potencial aumenta; es decir, sobre la partícula actúa la fuerza negativa de atracción, que de nuevo retorna la partícula al punto  $M$ .

Así, pues, si la partícula que se halla en el punto con el valor mínimo de la energía potencial se saca de este estado, bajo la acción de las fuerzas retornará a ese mismo punto. Llegamos a la conclusión de que *el valor mínimo de la energía potencial es la condición de equilibrio estable.*

Efectuando razonamientos análogos para el punto  $N$ , en el que la partícula posee el máximo valor de la energía potencial, el lector puede cerciorarse de que aquí las fuerzas, aplicadas en sus entornos más próximos, no retornarán la partícula a dicho punto. De esta forma, *el máximo de energía potencial caracteriza el estado de equilibrio inestable* (lábil).

2. Al analizar las condiciones de equilibrio, sólo hemos considerado *el entorno más próximo* de la parte del campo que nos interesa. Por éste se entiende tal dominio, en el que no hay máximos y mínimos complementarios de energía. Si no se presta atención a semejante condición, podemos llegar a conclusiones erróneas.

Por ejemplo, analizando las fuerzas que actúan sobre una partícula, desplazada a la derecha de la posición de equilibrio estable ( $x_2 > x_N$ ), afirmábamos que dichas fuerzas serían de atracción. Pero esto será sólo justo mientras la partícula quede a la izquierda del máximo de energía. Pero si ésta se desplaza más a la derecha, por ejemplo, hasta el punto  $x_2 > x_N$  (véase la fig. 19.5), obtendremos una fuerza de repulsión y, por lo tanto, la partícula no retornará a su posición anterior.

## Capítulo 20

### ENERGÍA INTERNA

#### § 20.1. Energía interna de un sistema de partículas

1. En el cap. 16 fue mostrado que la energía total de un cuerpo puede ser representada como la suma de las energías cinética y en reposo. La primera es función de la velocidad de movimiento con relación al sistema de referencia elegido, o sea, respecto de los cuerpos externos.

La energía en reposo depende de los procesos que transcurren en el interior del cuerpo que consideramos, por esto, de otro modo, recibe el nombre de *energía interna*.

2. Supongamos que un cuerpo con masa en reposo  $M_0$  consta de  $N$  partículas, cuya masa es  $m_0^{(1)}, m_0^{(2)}, \dots, m_0^{(N)}$ . Sea, a continuación, que dichas partículas se mueven a velocidades arbitrarias  $v_1, v_2, \dots, v_N$ , pero de forma que el centro de masas queda inmóvil en el sistema de referencia dado, o sea, que  $m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_N v_N = 0$ . Para finalizar, supongamos que estas partículas se encuentran, unas de otras, a considerables distancias, de modo que con la primera aproximación podemos despreñar la interacción recíproca entre ellas.

A primera vista puede parecer que la energía en reposo del cuerpo es simplemente igual a la suma de la energía en reposo de las partículas de que éste consta. Pero semejante conclusión es errónea. En efecto, aunque el cuerpo está en reposo en lo que atañe al sistema de referencia, las partículas que constituyen el cuerpo, se mueven de forma determinada. Por esta causa, *la energía interna del cuerpo*  $\mathcal{E}_0$

(o sea, la energía en reposo) es igual a la suma de las energías totales de las partículas de las que consta el cuerpo:

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}^{(1)} + \mathcal{E}^{(2)} + \dots + \mathcal{E}^{(N)}. \quad (20.1)$$

Tomando en consideración que de acuerdo con (16.3)  $\mathcal{E}^{(i)} = \mathcal{E}_0^{(i)} + K^{(i)}$ , donde  $i$  es el número de la partícula, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} + K^{(1)} + K^{(2)} + \dots \\ &\dots K^{(N)} = \mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} + K_{\text{int}}, \end{aligned} \quad (20.2)$$

en donde  $K_{\text{int}} = K^{(1)} + K^{(2)} + \dots + K^{(N)}$  es la energía cinética sumaria del movimiento interno de las partículas de las que el cuerpo está constituido.

3. Más arriba, hemos examinado un sistema de partículas que no interactúan. Pero en realidad en todos los cuerpos (salvo en los gases enrarecidos) las partículas interactúan entre sí con bastante intensidad. Por regla, la interacción se limita por la atracción. La energía potencial de las fuerzas de atracción es una magnitud *negativa*, ya que al no haber fuerzas de interacción hemos considerado que la energía potencial era igual a cero (§ 18.6).

Designemos por  $U_{\text{int}}$  la energía potencial de interacción de las partículas. En realidad  $U_{\text{int}}$  es la energía de los campos con los que se efectúa la interacción entre las partículas dentro del cuerpo. Entonces, generalizando la fórmula (20.2) para el caso de las partículas que interactúan entre sí, obtenemos

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} + K_{\text{int}} + U_{\text{int}}. \quad (20.3)$$

Así, pues, la energía interior del cuerpo es igual a la suma de las energías en reposo de las partículas de las que éste consta, más la energía cinética sumaria de dichas partículas y la energía potencial de los campos que efectúan la interacción entre las partículas.

4. Si dividimos (20.3) por  $c^2$  y tenemos en cuenta que  $\mathcal{E}_0/c^2 = M_0$  es la masa en reposo del cuerpo, mientras que  $\mathcal{E}_0^{(i)}/c^2 = m_0^{(i)}$ , la masa en reposo de cierta partícula de número  $i$ , tendremos

$$M_0 = m_0^{(1)} + m_0^{(2)} + \dots + m_0^{(N)} + \frac{1}{c^2} (K_{\text{int}} + U_{\text{int}}). \quad (20.4)$$

De este modo, resulta que en el caso general, la masa en reposo del cuerpo no es igual a la suma de las masas en reposo de las partículas que constituyen el cuerpo.

En particular, al haber grandes fuerzas de atracción, el valor absoluto de la energía potencial de los campos puede ser mucho mayor que la energía cinética sumaria del movimiento interno. Pero como la energía potencial de las fuerzas de atracción es un número negativo, puede resultar que  $K_{\text{int}} + U_{\text{int}} < 0$ . Por consiguiente, en semejante caso, la masa en reposo del cuerpo será menor que la suma de las masas en reposo de las partículas, de las que consta éste.

Con este fenómeno tropezaremos en el segundo tomo, al estudiar las fuerzas nucleares y los métodos de obtención de la energía del núcleo (§§ 80.4, 82.7—82.12).

## § 20.2. Variación de la energía interna al deformarse el cuerpo

1. Bajo la acción de una fuerza el cuerpo se deforma, es decir, cambia sus dimensiones y forma. La deformación del cuerpo está ligada con la variación de la distancia entre las moléculas y, por lo tanto, con el cambio de la energía de interacción molecular. Por consiguiente, *la deformación de un cuerpo se ve acompañada de la variación de su energía interna.*

Ya que la energía interna del cuerpo cambia, también varía su masa. ¿Por qué no lo advertimos? El siguiente ejemplo nos permitirá responder a esa pregunta.

Bajo la acción de una fuerza  $F = 2 \cdot 10^6$  N, una barra de acero de longitud  $l = 1$  m y sección  $S = 1$  cm<sup>2</sup> se alarga en  $\Delta l = 1$  mm. El trabajo de la fuerza elástica

$$A = \frac{kx^2}{2} = \frac{F\Delta l}{2} = 10 \text{ J.}$$

Pero éste es igual a la variación de la energía interna de la barra:  $A = \Delta \mathcal{E}_0$ . La variación de su masa

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{10}{9 \cdot 10^{16}} = 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ kg.}$$

Pero la masa de la barra antes de la deformación

$$m = \rho l S = 7,8 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 0,78 \text{ kg.}$$

Como nos muestra el cálculo, la variación de la masa del cuerpo es pequeñísima, ¡sólo se advierte en el décimo sexto signo después de la coma! No hay instrumentos que sean

capaces de revelar una magnitud tan pequeña. Por esta razón, las variaciones de la masa del cuerpo, al deformarse éste, son despreciadas en la práctica.

2. Calculemos en cuanto variará la energía de una molécula al deformarse el cuerpo. Un kilogramo de acero contiene  $10^{25}$  moléculas. Nuestra barra de masa igual a 0,78 kg consta de  $N = 0,78 \cdot 10^{25}$  moléculas. En tal caso, la variación de la energía de una molécula

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{10}{0,78 \cdot 10^{25}} = 1,3 \cdot 10^{-24} \text{ J.}$$

Es más cómodo expresar esta energía en electronvoltios. Como ya hemos indicado,  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , por tanto

$$\varepsilon = \frac{1,3 \cdot 10^{-24}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-5} \text{ eV.}$$

Así, pues, la variación de la energía de una molécula al deformarse el cuerpo constituye varias millonésimas partes de un electronvoltio. Más abajo vamos a comparar esta magnitud con la variación de la energía de una molécula con otros procesos.

### § 20.3. Variación de la energía interna del cuerpo con los procesos térmicos

1. Reciben el nombre de térmicos, aquellos procesos que están ligados con el cambio de su *estado de agregación*, es decir, fusión o solidificación, evaporación o condensación. Con detalle, estos procesos serán examinados más adelante. Aquí nos limitaremos a dar una característica general de ellos desde el punto de vista de la variación de la energía interna.

El cambio de la temperatura de un cuerpo está ligado con la variación de la energía cinética de movimiento de sus moléculas. No obstante, hay que remarcar que de modo simultáneo cambia también la energía potencial de sus interacciones (salvo en el caso de un gas enrarecido). En efecto, el cambio de temperatura es acompañado por la variación de la distancia entre las posiciones de equilibrio en los nodos de la red cristalina del cuerpo, lo que registramos como cambio de las dimensiones del cuerpo al variar la temperatura. Es natural, que con esto cambia la energía de interacción de las moléculas. En lo que se refiere al

cambio del estado de agregación, éste es resultado de la variación de la estructura molecular, lo que se provoca por el cambio tanto de la energía de interacción de las moléculas, como también por el carácter de su movimiento.

Así, pues, *los procesos térmicos son acompañados por la variación de la energía interna del cuerpo.*

2. Valoremos en cuanto cambia la energía de una molécula en los procesos térmicos. Como sabemos, al aumentar  $1^{\circ}\text{C}$  la temperatura de 1 kg de agua se absorbe una energía igual a  $4,18 \cdot 10^3$  J. Un kilogramo de agua contiene  $3,3 \cdot 10^{26}$  moléculas. Por lo tanto

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{4,18 \cdot 10^3}{3,3 \cdot 10^{26} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-3} \text{ eV.}$$

Esta energía es, aproximadamente, 100 veces mayor que con las deformaciones elásticas. Por otro lado, al transformarse 1 kg de agua en vapor se absorben  $2,25 \cdot 10^6$  J. En semejante caso la energía de la molécula aumenta, más o menos,

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{2,25 \cdot 10^6}{3,3 \cdot 10^{26} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 0,5 \text{ eV.}$$

3. A pesar de que con los procesos térmicos la energía interna crece miles de veces más que con las deformaciones elásticas, con dichos procesos tampoco es posible medir la variación de la masa. En efecto, si al evaporarse 1 kg su energía aumenta  $2,25 \cdot 10^6$  J, la masa crecerá en la siguiente magnitud

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{2,25 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^{16}} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ kg}$$

lo que está muy lejos de los límites de sensibilidad de los instrumentos de medida.

#### § 20.4. Variación de la energía interna durante las reacciones químicas

1. Las reacciones químicas son procesos de reestructuración de las moléculas, su descomposición en partes más sencillas o, por lo contrario, procesos de surgimiento de moléculas más complicadas formadas por otras más simples o por átomos aislados (reacciones de análisis y síntesis). Con ello, varían considerablemente las fuerzas de interacción entre los átomos, lo que se acompaña por la corres-



pondiente variación de la energía de interacción. Además, cambia el carácter tanto de las moléculas, como la interacción entre ellas, ya que las moléculas de la sustancia creada de nuevo interactúan entre sí de forma diferente que las moléculas de las sustancias iniciales.

Así, pues, *las reacciones químicas son acompañadas de la variación de la energía interna del cuerpo.*

Notemos, que las reacciones químicas siempre se acompañan por procesos térmicos, es decir, cambio de la temperatura y, con frecuencia, del estado de agregación del sistema. Por ejemplo, al quemarse el carbono sólido forma productos gaseosos: monóxido de carbono y bióxido de carbono (gas carbónico).

2. Vamos a valorar la energía de una molécula durante las reacciones químicas. Al quemarse 1 kg de carbón se desprende, aproximadamente, una energía igual a  $3 \cdot 10^7$  J. Como un kilogramo de carbón consta de  $5 \cdot 10^{25}$  átomos de carbón, la variación de la energía de una molécula constituirá

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{3 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^{25} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 4 \text{ eV.}$$

Por consiguiente, durante las reacciones químicas la variación de la energía de una molécula constituye varios electronvoltios, es decir, cientos y miles de veces más que con los procesos térmicos y millones de veces más que durante las deformaciones elásticas.

Señalemos, que esta energía coincide con el valor medio de la energía cinética de un electrón, localizado en el átomo (§ 16.7). Semejante hecho era de esperar, ya que las reacciones químicas se reducen a la reestructuración de las capas electrónicas de los átomos y las moléculas.

Sin embargo, también en este caso la variación de la masa de los cuerpos en interacción es tan pequeña, que está fuera de la precisión de los instrumentos de medida: se advertirá sólo en la décima cifra significativa y con semejante exactitud no sabemos medir la masa. En realidad, al quemar 1 kg de carbón

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{3 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^{16}} = 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ kg.}$$

## § 20.5. Variación de la energía interna en las reacciones nucleares

1. A ciertas condiciones, los núcleos de los átomos sufren transformaciones que reciben el nombre de *reacciones nucleares*. Independientemente del mecanismo de los procesos que transcurren en tal caso (los que pueden ser muy variados), todos ellos están ligados con una considerable variación de la energía de interacción de las partículas. Por consiguiente, *las reacciones nucleares se acompañan por la variación de la energía interna del cuerpo* en el que se encuentran los núcleos que sufren las correspondientes transformaciones. Esto permite valorar el rendimiento energético de la reacción, según las masas de las partículas iniciales y los productos de la reacción conocidos (§ 80.4).

Resulta que si 1 kg de hidrógeno pesado (deuterio) se convierte en helio, como resultado de esta reacción se obtienen, en total, 993,75 g de helio, o sea, que la masa en reposo disminuye  $\Delta m_0 = 6,25$  g. Tal variación de la masa (el 0,6%) ya puede ser medida con instrumentos sensibles.

La variación de la energía interna con esta reacción constituirá

$$\Delta \mathcal{E}_0 = \Delta m_0 c^2 = 6,25 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 5,62 \cdot 10^{14} \text{ J.}$$

Para comparar, calculemos cuánto carbón hay que quemar para producir una cantidad igual de energía:

$$m_{\text{car}} = \frac{5,62 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^7} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ kg}$$

(aquí  $3 \cdot 10^7$  J es la energía que se desprende al quemarse 1 kg de carbón). Tomando en consideración que un vagón puede sólo contener 50 t de carbón, obtenemos que al transformarse 1 kg de deuterio en helio se desprende una cantidad de energía igual a la que obtendríamos al quemar el carbón contenido en 400 vagones.

2. Apreciemos la variación de la energía de un núcleo durante semejante género de reacciones. Un kilogramo de helio contiene  $1,5 \cdot 10^{26}$  átomos, por lo tanto,

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{5,62 \cdot 10^{14}}{1,5 \cdot 10^{26} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,34 \cdot 10^7 \text{ eV} = 23,4 \text{ MeV.}$$

Esta energía es millones de veces mayor que la de las reacciones químicas y miles de millones de veces mayor que la energía de los procesos térmicos.

Notemos, que estas cifras también caracterizan el orden de las fuerzas nucleares en comparación con las fuerzas de interacción entre los átomos y las moléculas.

### Capítulo 21

## LEY DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

### § 21.1. El trabajo como medida de la variación de las energías total e interior

1. En el § 20.2 hemos puesto en claro que con las deformaciones de un cuerpo, cambian las distancias entre las partículas de que aquél está constituido. Este hecho lleva a la variación de la energía interna del cuerpo.

Además, con las deformaciones inelásticas cambia la temperatura del cuerpo, de lo que nos cercioramos con facilidad con un experimento. Si doblamos con rapidez varias veces un trozo de alambre, en el lugar de la flexión la temperatura crece bruscamente, lo que se puede sentir tocando el alambre con el dedo en dicho lugar.

Pero durante la deformación del cuerpo se realiza trabajo. Este es, precisamente, la medida de variación de la energía interna.

2. También cambia la energía interna de un cuerpo durante el choque inelástico de éste con otro cuerpo. Con esto, como mostramos en el (§ 17.2), la energía cinética de los cuerpos que chocan disminuye. Pero de aquí de ningún modo se deduce que la energía cinética desaparece por completo. Es fácil cerciorarse de que ella se convierte en la energía interna del cuerpo.

Hagamos el siguiente experimento. Coloquemos un trozo de alambre en un yunque y golpeemos contra él varias veces fuertemente con un martillo. Si después de esto tocamos el sector golpeado del alambre nos convenceremos de que la temperatura ha crecido considerablemente.

Como vemos, con un golpe inelástico la energía cinética de los cuerpos se convierte en interna. Pero la medida de la variación de la energía cinética es el trabajo de la fuerza. Es natural, que el trabajo de esa misma fuerza puede servir de medida de la variación de la energía interna.

3. Por fin, la variación de la energía interna transcurre bajo la acción de la fuerza de rozamiento, ya que, como sabemos de la práctica, el rozamiento siempre es acompañado por la variación de la temperatura de los cuerpos en rozamiento. Es natural, que el trabajo de la fuerza de rozamiento pueda servir de medida de la variación de la energía interna.

4. Los ejemplos aducidos nos permiten establecer una ligazón más general, de la que mostramos en el cap. 16, entre el trabajo de una fuerza y la variación de la energía.

Supongamos que la energía total de un cuerpo en cierto estado es igual a  $\mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{E}_0^{(1)} + K^{(1)}$ . Si sobre el cuerpo actúa cierta fuerza externa, el estado de éste variará; en correspondencia también cambiará su energía total que se hará igual a  $\mathcal{E}^{(2)} = \mathcal{E}_0^{(2)} + K^{(2)}$ . La variación de la energía  $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)} = (\mathcal{E}_0^{(2)} - \mathcal{E}_0^{(1)}) + (K^{(2)} - K^{(1)})$  o de forma más corta

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta\mathcal{E}_0 + \Delta K. \quad (21.1)$$

Pero nosotros ya sabemos que el trabajo de la fuerza externa puede hacer que varíe tanto la energía cinética, como la interna del cuerpo, es decir, su energía total. Por esto, podemos escribir

$$\Delta\mathcal{E} = A_{\text{ext}}, \quad (21.2)$$

o sea, que *el trabajo de una fuerza externa es la medida de variación de la energía total del cuerpo.*

## § 21.2. Transmisión de calor

1. Existe otro procedimiento para la variación de la energía del cuerpo que no está relacionado con el trabajo de una fuerza. Si ubicamos un cuerpo en la llama de un quemador su temperatura cambiará y, por consiguiente, también variará su energía interna. Metiendo después el cuerpo caliente en agua fría, nos cercioraremos de que su temperatura de nuevo ha cambiado, lo que otra vez está ligado con la variación de su energía. No obstante, en este caso no se ha realizado ninguna clase de trabajo, ya que no se produjo un desplazamiento visible ni del cuerpo, ni de sus partes aisladas bajo la acción de ciertas fuerzas.

En realidad, aquí la variación de la energía interna del cuerpo transcurrió por la acción de colisiones moleculares

recíprocas. En el cuerpo caliente las moléculas se mueven a mayores velocidades, en el cuerpo frío, a menores. Durante el contacto entre estos dos cuerpos se producen choques elásticos entre las moléculas. Al chocar una partícula en rápido movimiento con otra, que posee menor velocidad, le transmite parte de su energía cinética. Como es natural, durante el contacto de dos cuerpos con diferente temperatura, a cuenta de los choques entre las moléculas, la energía cinética sumaria de las moléculas del cuerpo caliente disminuirá, mientras que la energía cinética sumaria de las moléculas del cuerpo frío, crecerá. El resultado de esto es, precisamente, la transmisión de energía del cuerpo caliente al frío sin que se realice trabajo.

*Recibe el nombre de transmisión de calor la comunicación de energía de un cuerpo a otro sin que se realice trabajo.*

2. El proceso de intercambio de calor entre cuerpos que se hallan en contacto directo, que hemos examinado, es denominado *transmisión de calor por conducción o conductividad térmica.*

La transmisión de calor puede transcurrir a cuenta de la convección. Las capas de líquido o gas, al hacer contacto con un cuerpo a alta temperatura, se calientan y ascienden, mientras que su lugar es ocupado por capas más frías. El intercambio de calor que transcurre mediante los flujos de líquido o gas, recibe el nombre de *transmisión de calor por convección.*

3. Por fin, la transmisión de calor puede transcurrir con ayuda de rayos tanto visibles, como invisibles. De esto podemos cerciorarnos con ayuda del siguiente experimento. Fijemos en un soporte el cuerpo caliente. Acerquemos a él la mano por abajo a una distancia de 15—20 cm. Sentiremos que el cuerpo transmite a la mano energía. Este proceso no es convección, ya que el flujo de aire caliente asciende y no puede llegar a la mano. Esto tampoco puede ser conductividad térmica, ya que ésta es muy pequeña para todos los gases, incluido el aire.

Resulta que todo cuerpo emite rayos infrarrojos y a temperaturas superiores a 800°C, luz visible. El proceso de transmisión de energía mediante ondas electromagnéticas (radiación infrarroja y visible) se llama *transmisión de calor por radiación.*

En el experimento relatado tropezamos en realidad con semejante género de transmisión de calor. En efecto, al

colocar entre la mano y el cuerpo una chapa de hojalata, sentiremos que el calentamiento de la mano cesa. La causa reside en que el metal parcialmente refleja y en parte absorbe la radiación y ésta ya no llega a la mano.

Señalemos, para finalizar, que si para la transmisión de calor por conducción o por convección entre dos cuerpos es preciso que entre ellos haya obligatoriamente materia, la transmisión de calor por radiación transcurre en el vacío. Así, la energía que emite el Sol llega a la Tierra por el espacio sideral, en donde hay vacío profundo.

### § 21.3. Cantidad de calor

1. La medida de la variación de la energía de un cuerpo durante los procesos mecánicos es el trabajo realizado por las fuerzas externas (véase (21.2)). Introduzcamos una magnitud física que caracterice la variación de la energía del cuerpo con la transmisión de calor. Dicha magnitud recibe el nombre de *cantidad de calor* y se designa por  $Q$ .

*l lamamos cantidad de calor la energía comunicada mediante la transmisión de calor.*

De esta definición sigue, que si la energía del cuerpo sólo varía a causa de la transmisión de calor, entonces

$$Q = \Delta \mathcal{E}, \quad (21.3)$$

es decir, *la cantidad de calor es la medida de la variación de la energía del cuerpo durante la transmisión de calor.*

2. En el Sistema Internacional la unidad de la cantidad de calor, como el trabajo y la energía, es el julio (§ 16.6):

$$[Q] = [\mathcal{E}] = [A] = \text{J}.$$

En la práctica se emplea, a veces, la unidad de cantidad de calor fuera de sistema, llamada *caloría*. Por definición

$$1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}.$$

3. Recordemos al lector las expresiones con las que se puede calcular la cantidad de calor.

Al variar la temperatura del cuerpo,

$$Q = mc \Delta t, \quad (21.4)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $\Delta t$ , la variación de la temperatura,  $c$ , el calor específico de la materia.

Al fundirse un cristal (o al cristalizarse un fundido),

$$Q = m\lambda, \quad (21.5)$$

donde  $\lambda$  es el calor específico de fusión.

Al evaporarse un líquido (o condensarse un vapor)

$$Q = mL, \quad (21.6)$$

donde  $L$  es el calor específico de vaporización.

Durante una reacción química

$$Q = mq, \quad (21.7)$$

donde  $q$  es el calor específico de la reacción. Por ejemplo, la cantidad de calor que se desprende al quemarse 1 kg de combustible recibe el nombre de *calor específico de quemado del combustible*.

4. Hay que prestar atención a que el término "calentamiento" se utiliza corrientemente en dos sentidos: como la transmisión de energía en forma de calor (durante el intercambio de calor) y como variación de la temperatura. Pero estos dos procesos no son equivalentes. La temperatura del cuerpo se puede cambiar sin transmitirle calor. Con el choque o la deformación inelásticos, con el rozamiento, etc. la temperatura del cuerpo varía no a cuenta de la transmisión de calor, sino a causa del trabajo. Y a la inversa, durante procesos como la fusión o ebullición, la temperatura del cuerpo no varía, aunque se le transmite energía en forma de calor. Por esta razón, durante la descripción precisa de los fenómenos, hay que evitar el término de doble sentido "calentamiento" e indicar con exactitud en qué consiste la esencia del proceso que examinamos, es decir, variación de temperatura o comunicación de energía mediante la transmisión de calor.

## § 21.4. Primer principio de la termodinámica

Recibe el nombre de *termodinámica* la ciencia que estudia las condiciones de transformación de la energía de un género de ésta a otro y que caracteriza estas transformaciones desde el punto de vista cuantitativo.

1. Más arriba fue mostrado (fórmulas (21.2) y (21.3)) que la energía del cuerpo puede cambiar bien a cuenta de la aplicación de fuerzas externas, ya mediante el intercambio de calor con el medio circundante. También es posible el caso cuando la energía varía a cuenta de estas dos causas. Entonces, la variación de la energía del sistema es igual a la suma del trabajo de las fuerzas externas y la cantidad de calor, extraído de los cuerpos que rodean a dicho sistema:

$$\Delta \mathcal{E} = A_{\text{ext}} + Q. \quad (21.8)$$

2. El trabajo que realiza el sistema contra las fuerzas externas, difiere del trabajo de las fuerzas externas sólo por su signo:  $A = -A_{\text{ext}}$ . Entonces, a la expresión (21.8) se le puede aducir la forma

$$\Delta \mathcal{E} = -A + Q$$

o bien

$$Q = \Delta \mathcal{E} + A, \quad (21.9)$$

es decir, *la cantidad de calor* (la energía recibida por el sistema por medio de la transmisión de calor) *se consume para la variación de la energía del sistema y para el trabajo contra las fuerzas externas.*

3. La expresión obtenida llámase *primer principio de la termodinámica*. Este tiene un sentido extremadamente general y puede ser aplicado para describir un amplísimo círculo de fenómenos. En adelante emplearemos dicha ley para describir una serie de procesos térmicos y otros.

En los siguientes párrafos del presente capítulo aclararemos la ligazón entre el primer principio de la termodinámica y una de las más importantes leyes de la Naturaleza: la ley de la conservación de la energía.

### § 21.5. Sistema aislado adiabáticamente

Un sistema de cuerpos es *cerrado* cuando en comparación con las fuerzas internas, las externas aplicadas a él pueden no ser tomadas en consideración (§ 15.1). De esta definición se desprende que en un sistema cerrado el trabajo de las fuerzas externas es igual a cero.

Recibe el nombre de *aislado adiabáticamente* un sistema que no tiene intercambio de calor con el medio circundante. En correspondencia con esta definición, la cantidad de calor que recibe un sistema aislado adiabáticamente es nula.

El concepto de sistema aislado adiabáticamente es una idealización de ciertos sistemas reales. Queda claro, que es imposible aislar por completo un sistema del intercambio de calor, pero hay la posibilidad de aproximar a las adiabáticas las transformaciones que transcurren en el sistema dado.

Ante todo, el intercambio de calor se produce, por regla, con suficiente lentitud, de forma mucho más lenta que la transmisión de energía con ayuda de otros procesos. Por esta razón, cualquier otra transformación rápida del tipo explosión, choque, inflamación, etc., con suficiente grado de aproximación puede ser considerada adiabática.



Por otro lado, el sistema puede ser aproximado al adiabático, obstaculizando el intercambio de calor con el medio circundante, o sea, creando un aislamiento térmico fiable. Es un buen ejemplo de *cubierta adiabática* la vasija de Dewar, que es la parte principal de un termo (fig. 21.1). Se trata de un recipiente de vidrio de paredes dobles finas, entre las cuales se crea alto vacío. Éste obstaculiza la transmisión de calor por conducción y la convección. La pared interior del recipiente está plateada. Como resultado de esto, la superficie especular obtenida refleja bien los rayos, obstaculizando la transmisión de calor radiante.

El sistema ubicado en la vasija de Dewar con alto grado de aproximación, puede considerarse aislado adiabáticamente.

### § 21.6. Ley de la conservación de la energía

1. Examinemos un sistema de cuerpos que no interactúa de forma mecánica con los cuerpos que lo rodean (sistema cerrado) y no tiene intercambio de calor con cuerpos externos (sistema aislado adiabáticamente). De que el sistema es cerrado, se desprende que él no realiza trabajo contra las fuerzas externas, es decir,  $A = 0$ . De que el sistema es aislado adiabáticamente, se deduce que éste no recibe y no cede energía por intercambio de calor, o sea,  $Q = 0$ .

Basándonos en el primer principio de termodinámica (21.9), obtenemos que aquí la energía total del sistema no varía:  $\Delta \mathcal{E} = 0$  y, por lo tanto,  $\mathcal{E} = \text{const.}$

Así, pues, *la energía total de un sistema cerrado y aislado adiabáticamente es una magnitud constante.* Esta es la enunciación más general de la ley de la conservación de la energía.

2. La ley de la conservación de la energía en la mecánica newtoniana (§ 19.1) es un caso particular de la ley que hemos obtenido ahora. En efecto, en el cap. 19 sólo hemos considerado los sistemas conservativos, en los que no hay intercambio de calor y en los que para la conservación de la energía es necesaria una sola condición: que el sistema sea cerrado.

3. La ley de la conservación de la energía no exige en absoluto que la energía de cada uno de los cuerpos que entran



Fig. 21.1.

en el sistema dado quede invariable. En realidad, entre los cuerpos puede haber tanto interacción mecánica, como intercambio de calor y, por esta causa, la energía de los cuerpos aislados, que constituyen el sistema que examinamos, puede, sin duda alguna, variar. Para la conservación de la energía del sistema es preciso que éste no interactúe con los cuerpos externos y no tome parte en el intercambio de calor. En semejante caso, la energía total del sistema no variará, aunque cambie la energía de sus partes constituyentes.

### § 21.7. Ley de la conservación de la masa

1. Si la energía total de sistema se conserva, también se conservará la masa relativista correspondiente a ella. De esta forma, de la ley de la conservación de la energía puede ser deducida *la ley de la conservación de la masa*.

*La masa relativista de un sistema cerrado y aislado adiabáticamente es una magnitud constante.*

Como vemos, la ley de la conservación de la masa es un corolario de la ley de la conservación de la energía. Por esta razón, se habla con frecuencia de una ley única de la conservación de la energía y de la masa.

Representa dificultades más considerables la masa en reposo (la masa propia del sistema).

2. En la mecánica newtoniana se examinan cuerpos en movimiento a pequeñas velocidades. En semejante caso, la masa del cuerpo coincide, en realidad, con su masa en reposo; aquí, las variaciones de la energía del cuerpo a cuenta de su movimiento, deformaciones, procesos térmicos o químicos son pequeñísimas en comparación con la energía en reposo (§§ 16.2, 20.2—20.4), por lo que se puede considerar que esta última es una magnitud constante. Además, en la mecánica newtoniana no se examinan los casos de transformación de una forma de la materia en otras; por ejemplo, en los límites de dicha teoría son imposibles las transformaciones de unas partículas de la materia en otras, en el campo electromagnético o en otros campos. Por este motivo, en la mecánica newtoniana, la masa se considera como una magnitud constante para el cuerpo dado (independientemente de su energía), mientras que la masa del sistema, como una suma de las masas de los cuerpos de los que el sistema consta. Será natural, que en la mecánica newtoniana sea justa una *ley de la conservación de la masa*, independiente de la

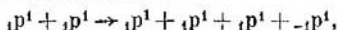
ley de la conservación de la energía. La práctica confirma perfectamente esta ley con aquellos procesos que se examinan en esta teoría.

3. En la teoría de la relatividad la masa en reposo del sistema no es igual a la suma de las masas en reposo de los cuerpos de los que está formado el sistema (§ 20.1). En realidad, sólo esto ya es suficiente para afirmar que, en el caso general, la masa en reposo no es una magnitud constante.

Pero, además, con grandes energías cinéticas, es posible la transformación de unas partículas en otras, así como el "surgimiento" y "desaparición" de las partículas. Aquí, nos limitaremos a un ejemplo.

4. Supongamos que un protón rápido, acelerado en un acelerador hasta una velocidad próxima a la de la luz, choca con un protón inmóvil. Resulta que si el protón rápido posee una energía cinética suficiente, en lugar de dos partículas surgirán cuatro: tres protones y un antiprotón.

La reacción se escribe así:



en donde  ${}_1p^1$  es un protón, mientras que  $-{}_1p^1$ , un antiprotón (una partícula de masa igual a la del protón, pero con signo inverso de la carga eléctrica). Designemos por  $\mathcal{E}_0$  la energía en reposo del protón; entonces, la energía en reposo del sistema antes del choque será  $2\mathcal{E}_0$ , después de éste,  $4\mathcal{E}_0$ . Así, pues, la masa en reposo aquí no se conserva; la energía cinética se transforma en energía en reposo.

Haciendo uso de las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento, vamos a determinar la energía cinética mínima del protón que es capaz de "hacer nacer" un antiprotón, al chocar contra un blanco de hidrógeno inmóvil. Para simplificar la resolución, admitamos que después de la colisión todas las partículas están en movimiento con la misma cantidad de movimiento  $p_1$ . De acuerdo con la ley de la conservación de la cantidad de movimiento

$$p = 4p_1, \quad (21.10)$$

donde  $p$  es la cantidad de movimiento del protón rápido antes del choque contra el blanco. Haciendo uso de la ligazón (16.8) entre la energía y cantidad de movimiento, tenemos

$$\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2 = p^2 c^2, \quad \mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_0^2 = p_1^2 c^2, \quad (21.11)$$

donde  $\mathcal{E}_0$  es la energía en reposo del protón,  $\mathcal{E}$ , la energía del protón rápido antes de la colisión y  $\mathcal{E}_1$ , la energía del protón o antiprotón después del choque. Excluyendo de (21.10) y de (21.11) las cantidades de movimiento  $p$  y  $p_1$ , obtenemos

$$\mathcal{E}^2 - 16\mathcal{E}_1^2 + 15\mathcal{E}_0^2 = 0. \quad (21.12)$$

De la ley de la conservación de la energía se desprende que la energía total de dos protones antes de la colisión es igual a la suma de las energías totales de las cuatro partículas surgidas después de la colisión:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_0 = 4\mathcal{E}_1. \quad (21.13)$$

Poniendo esta expresión en (21.12) y después de sencillos cálculos, tendremos

$$\mathcal{E} = 7\mathcal{E}_0, \quad (21.14)$$

de donde sigue que la energía cinética de un protón rápido antes de la colisión

$$K = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = 6\mathcal{E}_0. \quad (21.15)$$

Es de importancia sustancial que de toda la energía cinética  $K = 6\mathcal{E}_0$ , sólo  $2\mathcal{E}_0$  se ha transformado en energía en reposo; el resto, es decir,  $4\mathcal{E}_0$  conservará la forma de energía cinética de los productos de la reacción, o sea, de tres protones y un antiprotón.

5. Recomendamos que el lector realice el cálculo numérico, tomando en consideración que la masa en reposo del protón  $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg. Se cerciorará de que la energía cinética del protón rápido constituye  $K \approx 6 \text{ GeV} = 6 \cdot 10^9 \text{ eV}$  y que su velocidad es igual al 99% de la de la luz.

## § 21.8. Algo más acerca de la masa relativista

1. En § 15.8 deducimos la expresión para la masa relativista, haciendo uso de las propiedades del centro de inercia del sistema. Ahora vamos a mostrar, que esta fórmula puede ser obtenida partiendo de tres nociones: la ley de la conservación de la cantidad de movimiento (§ 15.2), la ley de la conservación de la masa relativista (§ 21.7) y la ley relativista de la composición de velocidades.

Estudiemos los dos mismos cuerpos que en el § 15.9 y supongamos que han chocado de manera inelástica, forman-

do un nuevo cuerpo de masa  $M$ , en movimiento a la velocidad  $v$ .

De la ley de la conservación de las masas relativistas, se desprende:

$$M = m + m_0, \quad (21.16)$$

mientras que de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento:

$$mu = (m + m_0)v. \quad (21.17)$$

2. Pasemos al sistema de referencia ligado con el cuerpo a la izquierda. Aquí sólo varían las direcciones de los vectores de velocidad, quedando invariables las demás magnitudes. La ley de la conservación de la cantidad de movimiento tomará la forma

$$-mu = Mv' = -v(m + m_0). \quad (21.18)$$

Por otro lado, al pasar de un sistema inercial de referencia a otro, la velocidad se transforma de acuerdo con la fórmula (12.11), que en el caso dado se escribirá:

$$v' = -v = \frac{v - u}{1 - vu/c^2}. \quad (21.19)$$

Después de resolver esta ecuación cuadrada respecto de  $v$  y empleando los mismos razonamientos que en el § 15.8, obtendremos la expresión buscada de la masa relativista.

## Capítulo 22

### LEY DE LA CONSERVACIÓN DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

#### § 22.1. Particularidades del movimiento rotativo

En la práctica cotidiana se tropieza frecuentemente con cuerpos en rotación: se trata de toda clase de volantes, árboles, rotores de generadores y motores, tornillos, brocas, fresas, etc. Las particularidades del movimiento rotativo consisten en que todos los puntos del cuerpo se mueven por circunferencias concéntricas, cuyos centros están ubicados en el eje de rotación. Todos estos puntos están en movi-

miento a *diferentes* velocidades lineales, mientras que para todos ellos es igual la velocidad angular  $\omega = d\alpha/dt$  (§ 4.7).

Al estudiar las leyes de movimiento de un punto material, introducimos una serie de magnitudes dinámicas: cantidad de movimiento, fuerza, energía cinética, etc. En realidad, también hicimos uso de dichas magnitudes para la descripción de las leyes del movimiento de traslación de un sólido. Si un sólido está en movimiento de traslación, todos sus puntos se mueven por iguales trayectorias (§ 1.1) y, por consiguiente, a igual velocidad. Por esta razón, las expresiones para la cantidad de movimiento o la energía cinética del cuerpo tendrán el mismo aspecto que para un punto material. En efecto, la cantidad de movimiento del cuerpo es igual a la suma de las cantidades de movimiento de las partes aisladas que lo constituyen:

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + \dots + p_n = m_1 v + m_2 v + \dots + m_n v = \\ &= (m_1 + m_2 + \dots + m_n) v = m v, \end{aligned}$$

donde  $m_1, m_2, \dots, m_n$  son las masas de las partículas aisladas, mientras que la masa del cuerpo  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ . Este mismo resultado será también obtenido para la energía cinética de un cuerpo en movimiento de traslación.

Si el sólido gira, el razonamiento anterior no será válido, ya que las velocidades de diversos puntos serán diferentes. En semejante caso es preciso expresar las características dinámicas mediante la velocidad angular. Es precisamente por esta causa, por lo que nos vemos obligados a introducir, en este caso, una serie de nuevas magnitudes físicas, tales como momento de fuerza, momento de inercia y momento de cantidad de movimiento.

## § 22.2. Energía cinética y momento de inercia

1. Deduzcamos la expresión para la energía cinética de un sólido en rotación alrededor de un eje inmóvil. Vamos a resolver el problema con la aproximación de la mecánica newtoniana, o sea, a condición de que todos los puntos se muevan a velocidades, mucho menores que la de la luz en el vacío. Para simplificar el problema, examinaremos primero un sistema constituido por dos puntos materiales generalizando, a continuación, el resultado obtenido para cualquier sólido.

2. Supongamos que dos puntos materiales de masas  $m_1$  y  $m_2$  están situados a una distancia  $l$  el uno del otro (fig. 22.1). Consideraremos que el sistema es rígido, es decir, que la distancia entre los puntos no varía. Alrededor del eje el sistema gira a una velocidad angular  $\omega$ . Entonces, de acuerdo

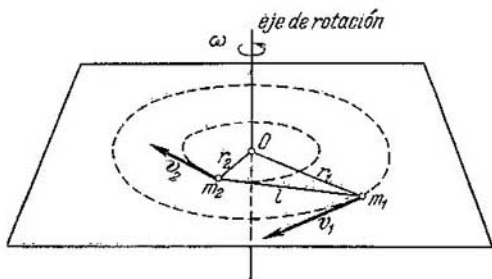


Fig. 22.1.

con (4.12) la velocidad del primer punto  $v_1 = r_1\omega$ , la del segundo,  $v_2 = r_2\omega$ , donde  $r_1$  y  $r_2$  son las distancias de los puntos materiales al eje de rotación. Como sigue de (16.5) la energía cinética de los puntos materiales

$$K_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2, \quad K_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2. \quad (22.1)$$

La energía cinética del sistema es igual a la suma de las energías cinéticas de los puntos materiales que forman el sistema:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2). \quad (22.2)$$

### 3. La magnitud física

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad (22.3)$$

recibe el nombre de *momento de inercia* de un sistema de puntos materiales. Este caracteriza la distribución de las masas de dichos puntos respecto del eje de rotación.

En el SI como unidad de momento de inercia se toma el *kilogramo por metro cuadrado* ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ).

Sustituyendo (22.3) en (22.2), obtenemos

$$K = J\omega^2/2. \quad (22.4)$$

Así, pues, la energía cinética de un sistema de puntos materiales es igual a la mitad del producto del momento de inercia de dicho sistema por el cuadrado de la velocidad angular de rotación.

4. Si el sistema consta no de dos sino que de  $n$  puntos materiales, la expresión para su energía cinética quedará invariable, pero el momento de inercia tomará el aspecto

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2. \quad (22.5)$$

Un sólido puede ser dividido en un número suficientemente grande de partículas de masa  $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$ , de tal forma que cada una de ellas pueda ser considerada punto material. Entonces, el momento de inercia de semejante cuerpo

$$J = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_n r_n^2. \quad (22.6)$$

Hablando en general, el resultado dependerá del procedimiento de división del cuerpo en partículas y de la posición del eje de rotación. Sólo pasando al límite, con el aumento infinito del número de particiones, obtendremos un resultado preciso. El cálculo del momento de inercia de un sólido es un problema matemático suficientemente complicado y en el ámbito del presente libro no será resuelto.

### § 22.3. Dependencia entre el momento de inercia y la posición del eje de rotación

1. El momento de inercia de un cuerpo no sólo depende de su masa, sino que también de la posición del eje de rotación.

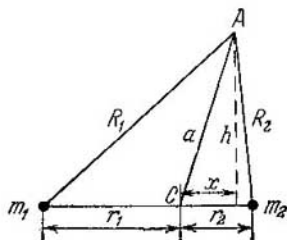


Fig. 22.2.

Esto se desprende directamente de la expresión (22.5). En efecto, si trasladamos el eje de rotación a otro punto, las masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  no variarán, pero los radios  $r_1, r_2, \dots, r_n$  serán otros, a causa de lo cual el momento de inercia también cambiará.

Calculemos los momentos de inercia de un sistema de dos puntos materiales respecto de dos ejes, paralelos entre sí y perpendiculares al plano de la figura (fig. 22.2). La distancia entre los ejes  $AC = a$ .

El momento de inercia del sistema en relación con el eje que pasa por el punto  $A$ :

$$J = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2. \quad (22.7)$$



El momento de inercia de ese mismo sistema respecto del eje que pasa por el centro de masas  $C$ :

$$J_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad (22.8)$$

Según el teorema de Pitágoras

$$R_1^2 = h^2 + (r_1 + x)^2, \quad R_2^2 = h^2 + (r_2 - x)^2.$$

Sustituyendo en (22.7), realizando sencillas transformaciones y teniendo en cuenta (22.8)

$$J = J_0 + (m_1 + m_2) (h^2 + x^2) + 2x (m_1 r_1 - m_2 r_2).$$

Pero  $h^2 + x^2 = a^2$ ; de la definición del concepto "centro de masas" (15.7) se desprende que  $m_1 r_1 - m_2 r_2 = 0$ . Por fin,

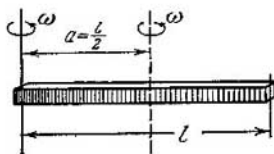


Fig. 22.3.

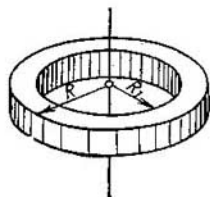


Fig. 22.4.

para velocidades no relativistas  $m_1 + m_2 = m$  es la masa del sistema. Por consiguiente

$$J = J_0 + ma^2. \quad (22.9)$$

Así, pues, el momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto de un eje tomado al azar, es igual al momento de inercia de dicho sistema en relación con el eje paralelo que pasa por el centro de masas, más el producto de la masa del sistema por el cuadrado de la distancia entre los ejes (*teorema de Steiner*).

Como  $ma^2$  es un número positivo, del teorema de Steiner se desprende que el momento de inercia de un sistema tiene el valor mínimo respecto del eje que pasa por su centro de masas.

2. Hagamos uso del teorema de Steiner para calcular el momento de inercia de una barra homogénea en lo que atañe a un eje perpendicular a la barra y que pasa por su extremo (fig. 22.3). Sean  $m$  la masa de la barra y  $l$ , su longitud. El

momento de inercia es proporcional a la masa y al cuadrado de las dimensiones lineales:

$$J = \theta ml^2,$$

siendo  $\theta$  un coeficiente adimensional.

Calculemos el momento de inercia respecto de un eje que pasa por el centro de masas. Por un lado podemos considerar que la barra consta de dos trozos iguales de masas  $m_1 = m/2$  y longitudes  $l_1 = l/2$ . Tomando en consideración que el momento de inercia de toda la barra es igual a la suma de los momentos de inercia de las dos mitades, obtenemos

$$J_0 = 2\theta m_1 l_1^2 = 2\theta \frac{m}{2} \frac{l^2}{4} = \frac{\theta}{4} ml^2.$$

Por otro lado, de acuerdo con el teorema de Steiner,

$$J_0 = J - ma^2 = \theta ml^2 - m(l/2)^2 = ml^2(\theta - 1/4).$$

Comparando las dos igualdades, obtendremos

$$\theta/4 = \theta - 1/4, \text{ de donde } \theta = 1/3.$$

De forma que el momento de inercia de una barra homogénea respecto de un eje que pasa por su extremo y es perpendicular a la barra,

$$J = ml^2/3. \quad (22.10)$$

El momento de inercia de esa misma barra, pero respecto de un eje que pasa por el centro de masas

$$J_0 = ml^2/12. \quad (22.11)$$

3. El momento de inercia de un disco con relación a un eje que pasa por su centro, es proporcional a su masa y al cuadrado de su radio:

$$J = \alpha m R^2.$$

Para determinar el coeficiente de proporcionalidad  $\alpha$ , calculemos el momento de inercia de un anillo (fig. 22.4). Es igual a la diferencia de los momentos de inercia de dos discos con radios  $R$  y  $R_1$  y de masas  $m$  y  $m_1 = mR_1^2/R^2$ , respectivamente:

$$J_A = J - J_1 = \alpha m R^2 - \alpha m_1 R_1^2 = \frac{\alpha m}{R^2} (R^4 - R_1^4).$$

La masa del anillo

$$m_A = m - m_1 = m (R^2 - R_1^2)/R^2.$$

Si el anillo es suficientemente fino ( $R_1 \approx R$ ), su momento de inercia se puede calcular de (22.6). Tenemos

$$J_A = \Delta m_1 R^2 + \Delta m_2 R^2 + \dots = (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots) \times R^2 = m_A R^2 = m (R^2 - R_1^2).$$

Comparando las dos expresiones para el momento de inercia del anillo, obtendremos después de simplificar

$$\alpha (R^2 + R_1^2) = R^2.$$

Pero como según el planteamiento  $R_1 \approx R$ , entonces  $\alpha = 1/2$ .

Así, pues, el momento de inercia de un disco respecto de un eje que pasa por su centro perpendicularmente a su plano, es igual a

$$J = 1/2 mR^2. \quad (22.12)$$

## § 22.4. Momento de fuerza

1. Supongamos que sobre un cuerpo que gira alrededor de un eje inmóvil está aplicada cierta fuerza  $F$  (fig. 22.5). Calculemos el trabajo que realiza dicha fuerza al girar el cuerpo a un ángulo  $\Delta\alpha$ . Por definición (16.12), el trabajo elemental es igual a

$$\Delta A = F_t \Delta l.$$

Pero  $F_t = F \operatorname{sen} \gamma$ , donde  $\gamma$  es el ángulo entre la dirección de la fuerza y la del radio trazado del eje de rotación al punto de aplicación de la fuerza. En lo que se refiere al arco  $\Delta l = r \Delta\alpha$ . Por lo tanto

$$\Delta A = Fr \operatorname{sen} \gamma \cdot \Delta\alpha. \quad (22.13)$$

2. La magnitud

$$M = Fr \operatorname{sen} \gamma = Fd \quad (22.14)$$

será llamada *momento de fuerza* respecto del eje de rotación. La distancia más corta desde el eje de rotación hasta la dirección de la fuerza  $d = r \operatorname{sen} \gamma$  recibirá el nombre de *brazo de la fuerza*.

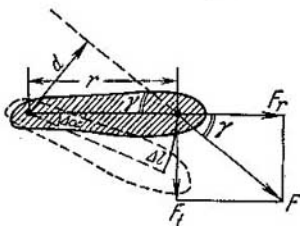


Fig. 22.5.

Llamamos momento de fuerza respecto de cierto eje el producto de la fuerza por su brazo.

La unidad de momento de fuerza en el Sistema Internacional de unidades es un newton-metro ( $N \cdot m$ ).

3. Si ponemos (22.14) en la expresión para el trabajo elemental (22.13), obtenemos

$$\Delta A = M \Delta \alpha, \quad (22.15)$$

es decir, el trabajo que se realiza al girar un cuerpo es igual al producto del momento de fuerza por el ángulo de giro.

4. Para calcular la potencia, la expresión (22.15) debe dividirse por el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Pero como  $\Delta A / \Delta t = N_m$  es la potencia media, mientras que  $\Delta \alpha / \Delta t = \omega_m$ , o sea, la velocidad angular media, se obtiene

$$N_m = M \omega_m$$

o bien, pasando al límite para  $\Delta t \rightarrow 0$ , hallamos para la potencia instantánea, que

$$N = M \omega. \quad (22.16)$$

La potencia instantánea es igual al producto del momento de fuerza por la velocidad angular de rotación.

### § 2.5. Condición para el equilibrio de un cuerpo que tiene eje de rotación

1. En el § 19.6 deducimos la condición de equilibrio para un cuerpo libre, que puede desplazarse en cualquier dirección. En este caso, el equilibrio se alcanza si la suma vectorial de todas las fuerzas (su resultante) es igual a cero. Examinemos qué condición ha de satisfacer un cuerpo, que puede girar alrededor de cierto eje prefijado, para estar en equilibrio.

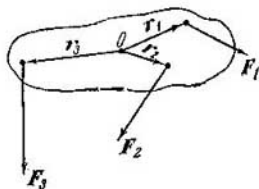


Fig. 22.6.

Examinemos qué condición ha de satisfacer un cuerpo, que puede girar alrededor de cierto eje prefijado, para estar en equilibrio.

Vamos a considerar positivos los momentos que hacen girar el cuerpo en sentido antihorario y negativos, los momentos que le hacen girar en sentido horario.

Así, pues, en la fig. 22.6, si el eje pasa por O, los momentos de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  tienen signo negativo, el momento de la fuerza  $F_3$ , signo positivo.

2. Si el cuerpo se encuentra en estado de equilibrio, al hacerlo girar a un ángulo infinitésimo  $\Delta\alpha$ , la energía potencial no varía, por consiguiente el trabajo elemental  $\Delta A$ , igual a la variación de la energía potencial, será nulo:  $\Delta A = 0$ . Pero

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 = M_1 \Delta\alpha + M_2 \Delta\alpha + M_3 \Delta\alpha = (M_1 + M_2 + M_3) \Delta\alpha.$$

Pero como  $\Delta\alpha \neq 0$ , queda claro que

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0. \quad (22.17)$$

Esta es la condición de equilibrio buscada. De forma que *un cuerpo que tiene un eje de giro prefijado se encuentra en equilibrio si es igual a cero la suma algebraica de todos los momentos de fuerza respecto a dicho eje.*

De otro modo, podemos decir, que el equilibrio se alcanza en aquel caso, cuando la suma de los momentos que hacen girar al cuerpo en sentido antihorario es igual a la suma de los momentos que lo hacen girar en sentido horario.

3. Como vemos de la condición obtenida, una pequeña fuerza aplicada sobre un brazo grande es capaz de equilibrar una fuerza mayor con pequeño brazo. Esta propiedad de los momentos de fuerza encuentra aplicación práctica en las palancas, el cabrestante, el elevador de tornillo (gato) y una gran serie de otros dispositivos, muy difundidos en técnica.

## § 22.6. Momento de cantidad de movimiento y ecuación fundamental de dinámica

1. Sea que sobre un cuerpo, en rotación alrededor de un eje inmóvil, actúan varias fuerzas (fig. 22.6). Designemos por  $M$  la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas. Como muestra la experiencia, bajo la acción del momento sumario de las fuerzas, la velocidad angular de rotación del cuerpo varía y, junto con ésta, cambia su energía cinética. Una variación infinitamente pequeña de la energía cinética (a condición de que  $J = \text{const}$ )

$$dK = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega d\omega.$$

Pero de acuerdo con (16.13) y (22.16), tenemos

$$dK = \Delta A = N dt = M\omega dt,$$

de donde

$$M dt = J d\omega = d(J\omega). \quad (22.18)$$

2. La magnitud física igual al producto del momento de inercia por la velocidad angular recibe el nombre de *momento de la cantidad de movimiento* (de otro modo, *momento rotatorio* o *momento de impulsión*):

$$L = J\omega. \quad (22.19)$$

Señalemos que para un punto material, en movimiento por una circunferencia de radio  $r$ , el momento de cantidad de movimiento es igual al producto de la cantidad de movimiento por el radio:

$$L = J\omega = mr^2\omega = mrv = pr. \quad (22.20)$$

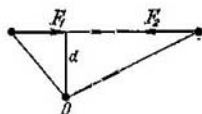


Fig. 22.7.

La unidad de momento de cantidad de movimiento en el SI es un *kilogrametro al cuadrado por segundo* ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ).

3. Si dividimos la igualdad (22.18) por  $dt$  y tomamos en consideración (22.19), hallamos

$$M = \frac{dL}{dt} = L'(t). \quad (22.21)$$

Así es la *ecuación fundamental de dinámica para un sólido en rotación*: el momento de fuerza es igual a la derivada del momento de cantidad de movimiento en el tiempo.

4. Hay que prestar atención al hecho de que en la expresión (22.21) se trata de la suma de los momentos de *las fuerzas externas*. En lo que respecta a las fuerzas internas, la suma de sus momentos es siempre nula, lo que sigue directamente de la tercera ley de Newton. Para demostrarlo examinemos un sistema de dos puntos materiales en interacción (fig. 22.7). La fuerza  $F_2 = -F_1$ , ambas fuerzas tienen igual brazo  $d$ . De esta manera,  $M_1 = F_1d$ ,  $M_2 = F_2d = -F_1d = -M_1$  y momento sumario de las fuerzas internas

$$M_{\text{int}} = M_1 + M_2 = 0.$$

## § 22.7. Ley de la conservación del momento de cantidad de movimiento

1. Sea igual a cero la suma algebraica de los momentos de las fuerzas externas aplicadas sobre un cuerpo. En particular, esta condición es siempre justa para un sistema ce-

rrado, sobre el cual las fuerzas externas no actúan por completo. Entonces, de (22.21) se deduce:

$$dL/dt = 0 \text{ o bien } L = \text{const.} \quad (22.22)$$

Hemos obtenido un importante resultado, que recibe el nombre de *ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento*.

*El momento de la cantidad de movimiento de un sistema cerrado es una magnitud constante.*

2. De la diferencia entre las nociones "cantidad de movimiento" y "momento de la cantidad de movimiento" se desprende un interesante corolario.

En el § 15.7 fue mostrado que bajo la acción de las fuerzas internas, la velocidad del centro de masas de un sistema de puntos materiales no puede variar. Durante el movimiento de traslación de un cuerpo, la velocidad de todos sus puntos coincide con la velocidad del centro de masas. Por consiguiente, las fuerzas internas no pueden variar la velocidad de un cuerpo en movimiento de traslación.

Otro resultado completamente diferente se obtiene cuando el cuerpo gira alrededor de un eje. Bajo la acción de las fuerzas internas puede variar la distancia entre partes aisladas del cuerpo, lo que provoca la variación de su momento de inercia. Pero de la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento sigue que sólo es constante el producto  $L = J\omega$ , y no cada uno de los factores. Si bajo la acción de las fuerzas internas el momento de inercia disminuye, una igual cantidad de veces crecerá la velocidad angular, mientras que el producto  $J\omega$  seguirá siendo una magnitud constante.

3. Semejante resultado tiene múltiples aplicaciones prácticas.

Examinemos cómo un deportista realiza el salto hacia atrás (fig. 22.8). Después de ponerse en cuclillas con las manos dirigidas hacia atrás, el deportista salta hacia arriba elevando los brazos adelante y, a continuación, desplazándolos hacia arriba y ligeramente hacia atrás. De este modo él comunica a su cuerpo una pequeña velocidad de rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masas (a eso del nivel de la cintura). Cerca del punto superior de la trayectoria, el deportista se "agrupa", es decir, bruscamente atrae las rodillas a la barbilla y las agarra con las manos. Con esto, el momento de inercia disminuye de forma consi-

derable, mientras que la velocidad de rotación crece, lo que permite al deportista efectuar la voltereta con rapidez. Al aterrizar, de nuevo se endereza y lanza las manos hacia arriba y, ligeramente, adelante, aminorando así la rotación.

De forma análoga, los deportistas de patinaje artístico realizan la figura llamada trompo. Separando las manos hacia los lados y elevando la pierna libre, el deportista se comunica lenta rotación alrededor del eje vertical. "Agrupación"



Fig. 22.8.

pándose" con brusquedad, o sea, acercando al cuerpo los brazos y la pierna libre, el deportista disminuye el momento de inercia y comienza a girar con gran rapidez.

4. Es fácil cerciorarse de que en todos los ejemplos aducidos, la energía cinética de rotación no se conserva. Sea al principio la energía cinética  $K = J\omega^2/2$ . Después de la "agrupación" el momento de inercia disminuye  $n$  veces,  $J_1 = J/n$ . En una misma cantidad de veces aumenta la velocidad angular: de  $J\omega = J_1\omega_1$  se deduce que  $\omega_1 = n\omega$ . La energía cinética

$$K_1 = \frac{J_1\omega_1^2}{2} = \frac{J\omega^2 n^2}{n \cdot 2} = nK.$$

El incremento de la energía cinética  $\Delta K = K_1 - K = K(n - 1)$ . Pero para aumentar la energía cinética hace falta trabajo. ¿Qué fuerzas lo realizan?

Como con la primera aproximación los sistemas examinados son cerrados, la acción de las fuerzas externas puede ser despreciada. Por lo tanto, en semejante caso la energía cinética de rotación crece a cuenta de las fuerzas internas, es decir, al fin y al cabo por la acción de la energía interna del sistema en rotación. Como vemos, este resultado co-



responde por completo a la ley de la conservación de la energía.

5. De la ley de la gravitación se desprende que *cada uno de los planetas gira alrededor del Sol por una elipse, con la particularidad de que éste se encuentra en uno de sus focos* (primera ley de Kepler). De acuerdo con la ley de la conservación de la energía (19.3)

$$\frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} = \text{const.}$$

Es fácil cerciorarse de que la velocidad orbital varía continuamente: a medida que aumenta la distancia entre el Sol y el planeta, la velocidad de éste decrece (fig. 22.9).

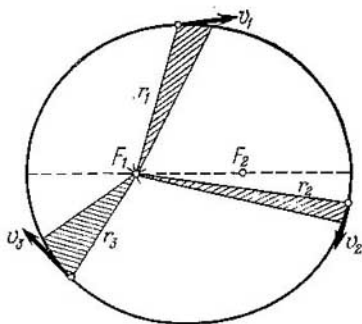


Fig. 22.9.

Kepler, haciendo uso de sus observaciones realizadas durante muchos años, estableció que *en el transcurso de iguales intervalos de tiempo, el radio vector del planeta describe iguales áreas* (segunda ley de Kepler). Vamos a demostrar que esta ley es un corolario de la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento.

En efecto, el Sol y el planeta constituyen un sistema cerrado y, por esta razón, en lo que a este se refiere puede ser aplicada la ley de la conservación del momento de cantidad de movimiento. El centro de masas de dicho sistema coincide, prácticamente, con el centro del Sol, por consiguiente, la velocidad de éste es, en realidad, igual a cero. De acuerdo con (22.22) el momento de la cantidad de movimiento de

este sistema

$$L = mvr = \text{const.} \quad (22.23)$$

El área descrita por el radio vector del planeta por unidad de tiempo,

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \frac{r dl}{dt} = \frac{mvr}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{const.} \quad (22.24)$$

Esta es la expresión de la segunda ley de Kepler.

### § 22.8. Analogía entre las magnitudes y las correlaciones entre ellas con movimientos de traslación y rotativo

Si comparamos las correlaciones entre las magnitudes que caracterizan el movimiento de un punto material (o de un cuerpo en movimiento de traslación) con las mismas correlaciones que describen la rotación de un cuerpo alrededor de un eje, se advierte con facilidad la profunda analogía entre ellas. Escribamos una serie de magnitudes y las ecuaciones que las ligan en forma de una tabla, limitándonos al ámbito de la mecánica newtoniana (tabla 22.1).

Tabla 22.1

Movimiento de traslación	Movimiento rotativo
Desplazamiento $\Delta l$	Ángulo de giro $\Delta \alpha$
Velocidad $v$	Velocidad angular $\omega$
Masa $m$	Momento de inercia $J$
Cantidad de movimiento $p = mv$	Momento de la cantidad de movimiento $L = J\omega$
Fuerza $F$	Momento de fuerza $M$
Ecuación fundamental de dinámica	Ecuación fundamental de dinámica
$F = \frac{dp}{dt} = p'(t)$	$M = \frac{dL}{dt} = L'(t)$
Energía cinética	Energía cinética
$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$	$K = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2J}$
Trabajo elemental	Trabajo elemental
$\Delta A = F_t dl$	$\Delta A = M d\alpha$
Potencia $N = F_t v$	Potencia $N = M\omega$

Como vemos en la tabla, la simple sustitución de magnitudes análogas en las fórmulas para el movimiento de traslación nos lleva automáticamente a fórmulas correctas para el movimiento rotativo. Por ejemplo, al sustituir en la expresión  $K = p^2/2m$  la cantidad de movimiento  $p$  por el momento de la cantidad de movimiento  $L$ , análogo a ella, y la masa  $m$  por su análogo, es decir, por el momento de inercia  $J$ , para el movimiento rotativo obtenemos la expresión  $K = L^2/2J$ . Del mismo modo, por analogía, podemos escribir la expresión para el trabajo que se realiza al torsionar un resorte a cierto ángulo  $\varphi$ . En efecto, en el § 18.2 obtuvimos de una gráfica la expresión  $A = Fl/2$ . Sustituyendo la fuerza por su análogo, o sea, el momento de fuerza, y el desplazamiento por el ángulo de giro, obtendremos  $A = M\varphi/2$ . Claro está, que esta fórmula puede deducirse independientemente con ayuda de la gráfica, pero haciendo uso de la analogía la obtenemos con mayor rapidez y sencillez.

Recomendamos al lector que, introduciendo el concepto de aceleración angular  $\beta = d\omega/dt$ , obtenga por analogía la expresión para la velocidad angular instantánea y ángulo de giro con rotación uniformemente variable, así como también la expresión para la ecuación fundamental dinámica de un cuerpo en rotación.

### Capítulo 23

## SIMETRÍA EN LA NATURALEZA Y LEYES DE LA CONSERVACIÓN

### § 23.1. Las leyes de la conservación como leyes fundamentales de la naturaleza

1. En los capítulos anteriores hemos examinado las tres leyes fundamentales de la naturaleza: las leyes de la conservación de la cantidad de movimiento, del momento de cantidad de movimiento y de la energía. Hay que tener en cuenta que estas leyes sólo se cumplen en los sistemas inerciales de referencia. Efectivamente, al deducir estas leyes hicimos uso de la segunda y tercera leyes de Newton y estas últimas pueden sólo utilizarse en los sistemas inerciales.

Recordemos también que la cantidad de movimiento y el momento de cantidad de movimiento se conservan en aquel caso, cuando podemos considerar que el sistema es cerrado (la suma de todas las fuerzas externas y, en correspondencia, la de todos los momentos de fuerza es igual a cero). Pero para la conservación de la energía del cuerpo es insuficiente que el sistema sea cerrado, es decir, además el cuerpo debe estar aislado adiabáticamente (o sea, no debe tomar parte en el intercambio de calor).

2. Las leyes de la conservación son valiosas por su comunidad. En realidad, ni los detalles de uno u otro proceso físico, ni las particularidades de los cuerpos aislados que toman parte en dichos procesos, no influyen sobre la justeza de las indicadas leyes. Son del mismo modo aplicables tanto a los planetas y estrellas, como a las moléculas, átomos y partículas elementales de las que están constituidos los núcleos atómicos. De ellas se puede hacer uso al investigar procesos térmicos, químicos, eléctricos y cualesquiera otros.

3. En el transcurso de toda la historia de desarrollo de la física, las leyes de la conservación han resultado ser casi las únicas leyes que han conservado su importancia al sustituir unas teorías por otras.

Por ejemplo, en la teoría de la relatividad sufren notables cambios las representaciones clásicas acerca del tiempo y la simultaneidad de los acontecimientos, la longitud de los segmentos y la masa de los cuerpos; se introducen nuevas enunciaciones de la ley de composición de velocidades y de la segunda ley de Newton, cambia la expresión para la energía cinética, etc. No obstante, las leyes de la conservación de la cantidad de movimiento, del momento de la cantidad de momento y de la energía, son también por completo justas en dicha teoría. Más aún, en la teoría de la relatividad las leyes de la mecánica newtoniana, la ley de la conservación de la masa y de la conservación de la energía, se unifican formando la ley única de la conservación de la masa y la energía.

En el micromundo, es decir, el de los átomos, moléculas y partículas elementales, tropezamos con una serie de fenómenos que divergen bruscamente de los fenómenos en el mundo de los grandes cuerpos. Gracias al principio de incertidumbre, en este caso es imposible resolver el problema fundamental de dinámica y de forma unívoca determinar, digamos, la trayectoria de un electrón en el átomo. Todo

esto requiere otro enfoque de los fenómenos del micromundo. Sin embargo, también aquí las leyes de la conservación siguen conservando su fuerza y en la mecánica cuántica juegan un papel aún mayor que en la mecánica newtoniana o relativista. Con frecuencia, las leyes de la conservación son el único instrumento que sirve para explicar los fenómenos que transcurren en el micromundo.

Es precisamente *el carácter universal de las leyes de conservación* el que proporciona a éstas su valía.

### § 23.2. Las leyes de la conservación como principios de imposibilidad

1. Entre las leyes del tipo de la ecuación fundamental de dinámica y las leyes de la conservación hay una diferencia de principio. Las leyes de dinámica nos dan una representación acerca del transcurso detallado del proceso. Por ejemplo, si están prefijadas la fuerza que actúa sobre un punto material, así como las condiciones iniciales, podemos hallar la ley de movimiento, la trayectoria, el valor y la dirección de la velocidad en cualquier momento de tiempo, etc. (véase el cap. 8). Por su parte, las leyes de la conservación no nos dan indicaciones directas acerca de cómo debe transcurrir uno u otro proceso. Sólo nos indican qué procesos son imposibles y, por lo tanto, no existen en la naturaleza.

De esta manera, las leyes de la conservación se manifiestan como *principios de imposibilidad: todo fenómeno con el que no se cumpla aunque no sea más que una de las leyes de conservación, es imposible* y semejantes fenómenos no se observan en la naturaleza. *Todo fenómeno con el que no se viola ninguna de las leyes de conservación, puede, en principio, transcurrir.* Notemos que los fenómenos no imposibles siempre se producen en la práctica, aunque con distinta probabilidad: algunos de dichos fenómenos transcurren con gran frecuencia, otros, rara vez, pero todos ellos pueden ser observados.

Puede parecer que las leyes de la conservación proporcionan demasiada arbitrariedad, demasiadas variantes y, por esta razón, no queda claro por qué en el experimento se realiza con la mayor frecuencia un solo proceso. En la realidad resulta que la actuación conjunta de varias leyes de conservación define de forma casi unívoca el posible transcurso del proceso.

2. Examinemos un ejemplo. ¿Puede un cuerpo en reposo ponerse en movimiento a cuenta de su energía interna? Semejante proceso no contradice a la ley de la conservación de la energía. Es sólo necesario que la energía cinética que surge sea exactamente igual a pérdida de energía interna.

Pero en realidad, este proceso nunca se produce, ya que él contradice a la ley de la conservación de la cantidad de movimiento. Si el cuerpo se pone en movimiento, su cantidad de movimiento crecerá por sí sola, lo que es imposible. Por esta causa, la energía interna del cuerpo no puede convertirse en cinética, si el cuerpo no se descompone en partes.

Si admitimos la posibilidad de la descomposición de dicho cuerpo en partes, entonces la imposibilidad, que impone la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, se retira. Con esto, los fragmentos creados pueden moverse de forma que su centro de masas quede en reposo, que es precisamente lo que exige la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

Así, pues, para que la energía interna de un cuerpo en reposo pueda convertirse en energía cinética, este cuerpo debe ser capaz de descomponerse en fragmentos. Pero al haber una ley más que imposibilite la descomposición de dicho cuerpo en fragmentos, su energía interna y su masa en reposo serán constantes.

3. Por cierto, que precisamente por la acción conjunta de la ley de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento se explica el hecho de que para obtener antiprotones durante la colisión de los protones rápidos contra los inmóviles (§ 21.7) es preciso comunicar a las partículas que bombardean una energía cinética  $6\mathcal{E}_0 \approx 6 \text{ GeV}$ , aunque para el surgimiento de dos partículas nuevas, o sea un protón y un antiprotón, es suficiente una energía  $2\mathcal{E}_0$ .

### § 23.3. Las leyes de la conservación y la simetría del espacio — tiempo

1. Al mostrar el carácter universal de las leyes de la conservación, al mismo tiempo entramos en cierta contradicción lógica con los razonamientos que nos ayudaron a deducir algunas de dichas leyes. En efecto, las leyes de la conservación fueron obtenidas como un corolario de las segunda y tercera leyes de Newton. Pero estas mismas leyes son el resultado de la generalización de experimentos con interac-

ciones elásticas, gravitatorias y de Coulomb. Sin embargo, las indicadas interacciones no describen todos los fenómenos de la naturaleza.

En la actualidad conocemos dos tipos más de interacciones. Por las interacciones fuertes están condicionadas las fuerzas nucleares que actúan entre las partículas elementales en el interior del núcleo, así como los procesos de formación de las partículas elementales pesadas con energías muy altas, por ejemplo, la reacción del surgimiento del par protón—antiprotón, examinada en el § 21.7. El resultado de las interacciones débiles es la descomposición de ciertas partículas elementales, por ejemplo la desintegración beta de los núcleos (§§ 81.12, 83.5).

2. No es evidente por completo, que las leyes de Newton sean aplicables a dichas interacciones, más aún cuando en semejante caso juega fundamental papel el principio de incertidumbre. Pero con dichas interacciones, las leyes de la conservación son completamente justas, lo que se certifica por todos los fenómenos conocidos.

De este modo, resulta que las leyes de la conservación tienen un carácter más omnímodo que las leyes de Newton, que fueron nuestro punto de partida. Por esta razón, nos parece conveniente hallar ciertos principios más generales de los que se desprendieran las leyes de la conservación.

3. Resulta que en realidad semejantes principios existen. Son los principios de simetría del espacio—tiempo. Fue mostrado que de la homogeneidad del espacio sigue la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, de la isotropía del espacio, la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento y de la homogeneidad del tiempo, la ley de la conservación de la energía.

El hecho de que las leyes de la conservación sean el corolario de representaciones tan generales, es una convincente confirmación de la importancia universal de dichas leyes.

#### § 23.4. La homogeneidad del tiempo y la conservación de la energía

Como ilustración de la dependencia entre las propiedades de la simetría del espacio—tiempo y las leyes de la conservación, examinemos ciertas consideraciones elementales que aclaran la ligazón entre la ley de la conservación de la energía y la homogeneidad del tiempo.

1. La homogeneidad del tiempo, acerca de la que ya hablamos en el § 1.2, expresa, precisamente, la independencia de los fenómenos de la naturaleza del momento de tiempo que hemos adoptado como inicial. En particular, de esto se deduce que la masa en reposo de un sistema cerrado y aislado adiabáticamente no depende del tiempo.

Notemos, que el aislamiento adiabático, que no juega ningún papel al analizar las propiedades del espacio, aquí desempeña un papel substancial, ya que al haber intercambio de calor la masa en reposo varía con el tiempo.

2. Derivando la ecuación (16.8) y tomando en consideración que  $m_0 = \text{const}$ , de nuevo obtenemos una ecuación que coincide con (16.10):

$$d\mathcal{E} = u dp. \quad (23.1)$$

Pero como el sistema es cerrado, la fuerza externa  $F = 0$ , por consiguiente  $dp = F dt = 0$ . Con estas condiciones, de (23.1) se desprende que  $d\mathcal{E} = 0$ .

Así, pues, de la homogeneidad del tiempo, para un sistema cerrado y aislado adiabáticamente, se desprende que  $d\mathcal{E} = 0$  ó bien  $\mathcal{E} = \text{const}$ , es decir, la ley de la conservación de la energía. Una demostración más rigurosa requiere un aparato matemático más complicado.

## Capítulo 24

### SISTEMAS NO INERCIALES DE REFERENCIA Y GRAVITACIÓN

#### § 24.1. Fenómenos en un sistema de referencia en movimiento acelerado

1. En los capítulos anteriores hemos descrito los fenómenos en sistemas inerciales de referencia. Examinemos cómo se comportan los cuerpos en sistemas de referencia que se mueven con aceleración respecto del sistema inercial. Para simplificar los razonamientos, nos limitaremos al caso particular, cuando el sistema no inercial de referencia en relación con el inercial, está en movimiento rectilíneo, con aceleración constante  $w = \text{const}$  en el transcurso de cortos inter-



valos de tiempo, de forma que la velocidad del sistema de referencia  $v = wt \ll c$ .

A pesar de tan limitado planteamiento del problema, con medios elementales, obtendremos todas las regularidades que tienen importancia de principio.

2. Imaginémosnos un vagón suficientemente largo, a lo largo del cual está tendida una barra horizontal. Por ésta, sin rozamiento, puede moverse una bola maciza (fig. 24.1).

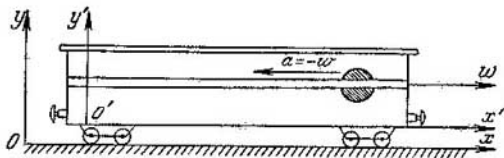


Fig. 24.1.

El sistema de referencia  $xyz$ , relacionado con la Tierra, como ya hemos dicho, es inercial en grado suficiente. Consideremos como se describen en el sistema de referencia  $x'y'z'$ , ligado con el vagón, los fenómenos que transcurren en éste.

La experiencia nos muestra que cuando el vagón se mueve respecto de la Tierra con aceleración  $w$ , la bola se desplaza a lo largo de la barra con aceleración  $a = -w$ , en lo que atañe

**Sistema  $xy$**

Sobre la bola no actúa ninguna fuerza y por la ley de inercia su velocidad no varía, es decir, respecto de la Tierra su aceleración es igual a cero. Pero en relación con la Tierra el vagón se mueve con aceleración  $w$ , por lo que respecto del vagón la bola se mueve con aceleración

$$a = -w.$$

**Sistema  $x'y'$**

Sobre la bola no actúa ninguna fuerza, pero, sin embargo, en relación con el vagón tiene una aceleración  $a$ . Por lo tanto, en el sistema de referencia ligado con el vagón, ha sido violada la ley de inercia: aquí surgen aceleraciones que no han sido provocadas por fuerzas. La causa radica en que el vagón se mueve respecto del sistema inercial con la aceleración

$$w = -a.$$

al vagón. Describamos este fenómeno desde el punto de vista de los dos sistemas de referencia.

Así, pues, en un sistema de referencia en movimiento acelerado se viola la ley de inercia. Por esta razón, semejante sistema es *no inercial*.

3. Variemos en cierto grado el experimento, uniendo la bola con un resorte, uno de cuyos extremos está fijado en la pared delantera del vagón (fig. 24.2). Mientras que el vagón está en reposo en relación con la Tierra o, en lo que a ésta atañe, está en movimiento rectilíneo y uniforme, el resorte

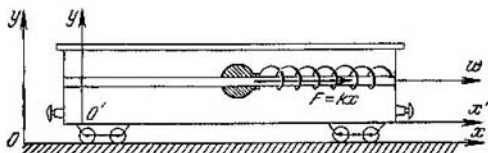


Fig. 24.2.

no se deformará. Si el vagón comienza a moverse con aceleración el muelle se estirará y conservará este estado mientras continúe el movimiento acelerado del vagón. Pero la bola estará en reposo, respecto del vagón. Examinemos también este caso desde el punto de vista de los dos sistemas de referencia.

Sistema $xy$ (inercial)	Sistema $x'y'$ (no inercial)
<p>La bola está en reposo respecto del vagón y, por consiguiente, junto con el vagón se mueve en relación con la Tierra con aceleración <math>w</math>. Pero según la segunda ley de Newton la aceleración se provoca por la fuerza <math>F = mw</math>. Esta fuerza está aplicada a la bola por el lado del resorte deformado:</p>	<p>La bola está en reposo en lo que atañe al vagón, aunque el resorte deformado actúa sobre ella con una fuerza <math>F = kx</math>. Por lo tanto, en el sistema de referencia, ligado con el vagón, se viola la segunda ley de Newton. La cuestión reside en que respecto del sistema inercial de referencia el vagón se mueve con la aceleración</p>
$F = kx = mw.$	$w = l'/m = kx/m.$

## § 24.2. Fuerza de inercia

1. Como mostramos en el párrafo anterior, en los sistemas no inerciales de referencia no se cumplen las leyes de Newton. No obstante, podemos enunciar una regla que permita, *de modo formal*, hacer uso de la segunda ley de Newton (la ecuación fundamental de dinámica) en los sistemas no inerciales de referencia.

Con este fin, retornemos al análisis de los fenómenos que transcurren en el vagón durante su movimiento acelerado (véanse las figs. 24.1 y 24.2). En el primer experimento,

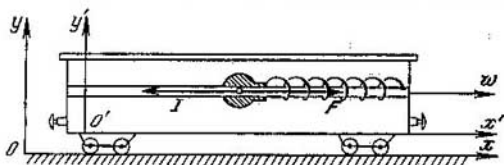


Fig. 24.3.

cuando la bola no interactúa con otros cuerpos, ésta a pesar de todo, se mueve respecto del vagón con aceleración  $a = -w$ . De esta forma, la bola se comporta como si sobre ella actuara cierta fuerza

$$I = ma = -mw,$$

que le comunicaría dicha aceleración.

En el segundo experimento, sobre la bola actúa el resorte deformado con una fuerza  $F = -kx$ . Sin embargo, dicha fuerza no comunica a la bola aceleración en relación con el vagón. Es como si sobre la bola actuara una fuerza  $I$  tal que equilibrara la fuerza  $F$  (fig. 24.3). La magnitud  $I = -mw$ , donde  $w$  es la aceleración del sistema no inercial de referencia (respecto del inercial), recibe el nombre de *fuerza de inercia*.

2. Haciendo uso de esta noción, podemos escribir de la forma siguiente la ecuación fundamental de dinámica en sistemas no inerciales:

$$R + I = ma, \quad (24.1)$$

donde  $R$  es la suma de todas las fuerzas de interacción,  $I$ , la fuerza de inercia,  $a$ , la aceleración del cuerpo respecto del sistema no inercial de referencia.

La fórmula (24.1) es la generalización de la ecuación fundamental de dinámica al tratar sistemas no inerciales de referencia:

*La suma vectorial de todas las fuerzas de interacción y las fuerzas de inercia es igual al producto de la masa del cuerpo por su aceleración respecto del sistema no inercial de referencia.*

3. Mostremos con un ejemplo como se aplica este principio. Supongamos que en un vagón en movimiento acelerado con relación a la Tierra, está colgado de un hilo cierto cuerpo de masa  $m$ . Como muestra la experiencia, en tanto que el vagón se mueva con aceleración, el hilo formará cierto ángulo  $\alpha$  con la vertical. Calculemos este ángulo en sistemas inercial y no inercial de referencia.

#### Sistema inercial

Como el cuerpo está en reposo respecto del vagón, el cuerpo, junto con éste, se moverá con una aceleración  $w$  en relación con la Tierra. Esta aceleración es comunicada al cuerpo por la resultante de dos fuerzas: la de la gravedad y la de la tensión del hilo (fig. 24.4).



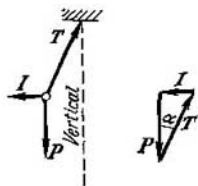
De acuerdo con la ecuación fundamental de dinámica

$$F = P + T = mw.$$

Pero  $F/P = \operatorname{tg} \alpha$ . Poniendo los valores  $F = mw$  y  $P = mg$ , obtenemos  $\operatorname{tg} \alpha = mw/mg = w/g$ .

#### Sistema no inercial

Como el cuerpo está en reposo respecto del vagón, la suma vectorial de todas las fuerzas, incluidas las fuerzas de interacción y de inercia, es igual a cero. Por consiguiente, la fuerza de la gravedad, la fuerza de tensión del hilo y la fuerza de inercia forman un triángulo cerrado (fig. 24.5).



Del dibujo vemos que:  $\operatorname{tg} \alpha = I/P$ . Sustituyendo  $I = mw$  y  $P = mg$ , tendremos

$$\operatorname{tg} \alpha = mw/mg = w/g.$$

### § 24.3. Particularidades de las fuerzas de inercia

1. Las fuerzas de inercia tienen una serie de singularidades que las distinguen de las fuerzas de interacción: elásticas, eléctricas, gravitacionales, fuerzas de rozamiento.

Enumeremos las más importantes de ellas:

a) La fuerza de inercia está provocada no por la interacción de los cuerpos, sino que por el movimiento acelerado del propio sistema de referencia; por esta razón, la tercera ley de Newton no puede ser aplicada a las fuerzas de inercia.

b) La fuerza de inercia actúa sobre el cuerpo sólo en sistemas no inerciales de referencia; en los sistemas inerciales no existen semejantes fuerzas.

c) Para cualquier sistema de cuerpos, ubicado en un sistema no inercial de referencia, las fuerzas de inercia son las fuerzas externas; por lo tanto, aquí no hay sistemas cerrados y, por consiguiente, no se cumplen las leyes de la conservación (con mayor detalle, véase el § 24.4).

d) Y por fin, señalemos que la fuerza de inercia, como la gravitatoria, es proporcional a la masa del cuerpo; por esto, en el campo de las fuerzas de inercia, como en el de las gravitatorias, todos los cuerpos se mueven con la misma aceleración, independientemente de sus masas (con mayor detalle, véase el § 24.5).

2. En los sistemas inerciales de referencia no hay fuerzas de inercia. Por esta causa, en dichos sistemas de referencia no se puede hacer uso de las fuerzas de inercia, ya que esto es un gran error. En los sistemas inerciales, el término «fuerza» sólo se aplica en el sentido newtoniano, como medida de la interacción de los cuerpos.

En los sistemas no inerciales, las fuerzas de inercia actúan como las de interacción. Si al frenar el vagón brusca-mente, la fuerza de inercia le lanza hacia adelante, sentirá esta fuerza de forma tal real como la fuerza de la gravedad. De forma exactamente igual, el cosmonauta siente con toda la realidad la fuerza de inercia que le aprieta contra el sillón durante la aceleración del cohete.

### § 24.4. El espacio y el tiempo en los sistemas no inerciales de referencia

1. Hemos llamado reiteradamente la atención del lector de que en los sistemas inerciales de referencia el tiempo es homogéneo, mientras que el espacio es homogéneo e isó-

tropo. Las propiedades geométricas del espacio homogéneo e isótropo se describen con ayuda de la geometría de Euclides.

Uno de los postulados fundamentales de la geometría de Euclides es el quinto, que puede ser formulado del siguiente modo: por un punto que no yace en la recta dada, puede ser trazada una recta paralela a la primera, con la particularidad de que puede ser trazada sólo una. De este postulado se

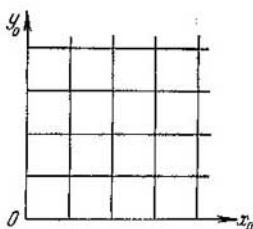


Fig. 24.6.

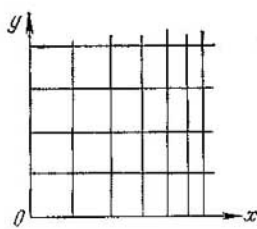


Fig. 24.7.

desprende que la suma de los ángulos internos del triángulo es igual a  $\pi$  radianes ( $180^\circ$ ). Y, por fin, notemos que en la geometría de Euclides, la distancia más corta entre dos puntos es un segmento de recta.

Para simplificar los siguientes razonamientos, nos limitaremos al análisis de las correlaciones geométricas en el plano, digamos,  $xy$ .

2. Sea que un observador se encuentra en un sistema inercial de referencia (por ejemplo, en la Tierra, fig. 24.1). Como ya sabemos, aquí el espacio y el tiempo son homogéneos e isótropos.

En el espacio homogéneo e isótropo la longitud del segmento no depende de la región del espacio en que se encuentra. Dividamos los ejes de coordenadas en segmentos iguales  $\Delta x_0 = \Delta y_0 = l_0$  y por los puntos de división tracemos rectas paralelas a los ejes. En tal caso, el plano  $x_0y_0$  se dividirá en celdas elementales (fig. 24.6), que tienen la forma de iguales cuadrados.

Del mismo modo, gracias a la homogeneidad del tiempo en el sistema inercial de referencia, el intervalo de tiempo  $\Delta t_0$  entre dos acontecimientos, no depende del punto del espacio en el que se producen los acontecimientos.

3. El observador, situado en un sistema no inercial de referencia (por ejemplo, en un vagón en movimiento acelerado), descubrirá que el espacio no es homogéneo (fig. 24.7). En efecto, la longitud del segmento en un sistema de referencia en movimiento es menor que en el sistema de referencia, donde el segmento está en reposo (12.8):

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (24.2)$$

Si el observador, en movimiento uniformemente acelerado, ha recorrido la distancia  $x_0$  en relación con la Tierra, entonces

$$v^2 = 2wx_0,$$

donde  $w$  es la aceleración del vagón. Poniendo el valor de  $v^2$  en (24.2), obtenemos

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - 2wx_0/c^2}. \quad (24.3)$$

Esta expresión tiene sentido para  $2wx_0 \ll c^2$ . En tal caso,  $x \approx x_0$  y la expresión (24.3) toma el aspecto

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - 2wx/c^2}. \quad (24.3')$$

Vemos que en los sistemas no inerciales de referencia la longitud del segmento es función de la región del espacio en que se encuentra: en los puntos con diferentes abscisas la longitud de un mismo segmento es diversa.

Pero a lo largo del eje de ordenadas el segmento conserva invariable su longitud, ya que en esa dirección no hay movimiento:  $\Delta y = \Delta y_0$ . Si construimos la red de coordenadas en un sistema no inercial de coordenadas, nos cercioraremos de que aquí el plano  $xy$  se divide en celdas elementales, en forma de rectángulos cuya anchura decrece a medida que nos desplazamos a lo largo del eje de abscisas (fig. 24.7).

4. En un sistema no inercial de referencia, el espacio no sólo no es homogéneo, sino que tampoco es isótropo.

Efectivamente, aquí las dos direcciones a lo largo del eje de abscisas no son equivalentes: en nuestro ejemplo, a lo largo de la dirección positiva de este eje, el elemento de longitud decrece, mientras que a lo largo de la negativa, crece. En lo que se refiere al eje de ordenadas la magnitud del elemento de longitud no varía. Por consiguiente, mediante un experimento físico, tenemos la posibilidad de

distinguir diversas direcciones en dicho espacio, lo que certifica que no es isótropo.

Indiquemos, que a causa de que el espacio no es homogéneo e isótropo, en los sistemas no inerciales de referencia no se cumplen las leyes de la conservación de la cantidad de movimiento y del momento de la cantidad de movimiento, de lo que ya hemos hablado.

5. Por fin, podemos cerciorarnos de que en los sistemas no inerciales de referencia, el tiempo no es homogéneo, como resultado de lo cual aquí no se cumple la ley de la conservación de la energía.

En un sistema de referencia en movimiento, el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos, que transcurren en un mismo punto (§ 12.9), se expresa de la forma siguiente:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (24.4)$$

Haciendo, como antes, uso de la expresión  $v^2 = 2wx$ , obtenemos

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 2wx/c^2}}. \quad (24.5)$$

6. Vamos a mostrar que en los sistemas no inerciales de referencia, a causa de que el espacio no es homogéneo e isótropo, sus propiedades deben ser descritas por la *geometría no euclídea*.

En calidad de demostración, examinemos qué aspecto tiene en el espacio dado un segmento de recta, no paralelo a los ejes de coordenadas. Construyamos en un sistema inercial de referencia el segmento  $AB$  bajo un ángulo de  $45^\circ$  a los ejes de coordenadas (fig. 24.8). En el sistema no inercial *el segmento se convertirá en una quebrada* (fig. 24.9), y en realidad, si hacemos el elemento de longitud  $\Delta x$  infinitamente pequeño, se convertirá en *una línea curva*. Pero, entonces, la suma de los ángulos del triángulo curvilíneo obtenido resultará ya mayor que  $180^\circ$  ( $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$ ). Esto significa que en el espacio dado la geometría no es de Euclides.

Indiquemos también que aquí la distancia más corta entre los puntos  $A$  y  $B$  no será ya un segmento de recta, sino el arco de cierta curva, lo que también distingue la geometría de este espacio de la de Euclides.



7. En 1826 fue N. I. Lobachevski el primero que presentó la posibilidad de la existencia de geometrías no euclídeas. El mostró que es posible realizar construcciones de geometría no contradictoria, en la cual no se cumple el quinto postulado de Euclides. De esta forma, Lobachevski comenzó una serie de trabajos, continuados más adelante, acerca

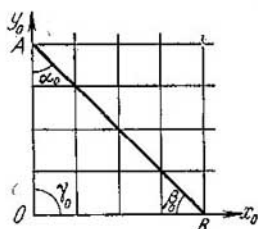


Fig. 24.8.

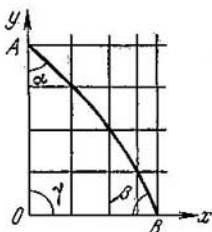


Fig. 24.9.

de las geometrías no euclídeas. Al mismo tiempo, propuso la idea de que la geometría del mundo real, posiblemente, es no euclídea.

Los contemporáneos de Lobachevski no pudieron comprender la profundidad de las ideas que radicaban en sus obras y muchos de ellos, no las tomaron en serio. Esto era comprensible, ya que la geometría de Euclides, de la que hacían uso durante más de dos milenios, estaba considerada como la base intangible de las ciencias, mientras que el intento de crear una geometría no euclídea se semejaba a una verdadera excentricidad, contradecía al «sentido común». Por cierto, que la teoría de la relatividad fue admitida por muchos científicos de este mismo modo.

A pesar de todo, resultó que la verdad se encontraba no en el «sentido común» de los conservadores, sino en las ideas revolucionarias de Lobachevski y Einstein. La previsión del científico acerca del carácter no euclídeo del mundo que nos rodea fue confirmada plenamente por la teoría general de la relatividad.

Llamamos con frecuencia espacio «curvado», aquel cuyas propiedades se describen en la geometría no euclídea. El sentido de ese término consiste en que en el espacio no euclídeo la distancia más corta entre dos puntos no es una línea

recta, sino cierta curva que recibe el nombre de «línea geodésica». Puede servir de ejemplo el arco de un gran círculo en la superficie de una esfera o una línea helicoidal en la superficie de un cilindro.

### § 24.5. Principio de equivalencia

1. Las fuerzas de inercia, como las de gravitación, son proporcionales a las masas de los cuerpos sobre las que están aplicadas. Por esta causa, en el campo de las fuerzas de inercia, como en el de las fuerzas de gravitación, todos los cuerpos se mueven con la misma aceleración, que no depende de sus masas.

De este modo, *las fuerzas de inercia, por sus manifestaciones, no se distinguen de las de gravitación.* Para ilustrar semejante hecho, analicemos una vez más el fenómeno descrito en el punto 3 del § 24.1. En él, sobre la bola actúa un resorte elásticamente deformado con una fuerza  $F = -kx$ , pero ésta no comunica al cuerpo aceleración respecto del vagón. Semejante situación es posible si sobre la bola, además de la fuerza de elasticidad, actúa una fuerza más de

#### Primera deducción

Por lo visto, *el vagón es un sistema no inercial de referencia* y la fuerza de elasticidad equilibra la fuerza de inercia:  $F = -I$ . Para cerciorarse de que ésta es, efectivamente, la fuerza de inercia, hay que unir al muelle cuerpos de distinta masa. Como la fuerza de inercia es proporcional a la masa del cuerpo, el alargamiento del muelle debe ser proporcional a la masa:

$$x = \frac{-F}{k} = \frac{I}{k} = \frac{mw}{k} = \xi m,$$

en donde

$$\xi = w/k = \text{const.}$$

#### Segunda deducción

Por lo visto, *el vagón es un sistema inercial de referencia, pero se encuentra en el campo de gravitación* y la fuerza de elasticidad equilibra la de gravitación:  $F = -P$ . Para cerciorarnos que ésta es realmente la fuerza de gravitación, hay que unir al muelle cuerpos de diferente masa. Como la fuerza de gravitación es proporcional a la masa del cuerpo, el alargamiento del muelle también es proporcional a la masa:

$$x = \frac{-F}{k} = \frac{P}{k} = \frac{mg}{k} = \xi m,$$

en donde

$$\xi = g/k = \text{const.}$$

igual magnitud, pero en dirección opuesta. Sin embargo, todos los cuerpos situados en el vagón, salvo el resorte, no interactúan con la bola. ¿A qué deducciones podemos llegar?

De este modo, *los fenómenos en un sistema inercial, situado en un campo gravitatorio homogéneo, y los que se producen en un sistema no inercial, que se mueve con aceleración de magnitud y dirección constantes, transcurren de forma absolutamente igual.* Este principio fue enunciado por primera vez

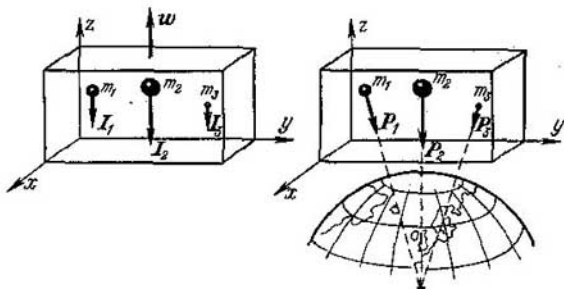


Fig. 24.10.

por Einstein y creó la base de la teoría relativista de gravitación (§ 24.6). Recibió el nombre de *principio de equivalencia*.

2. Hay que prestar particular atención a la precisión de enunciación del indicado principio. Sólo es válido para *pequeñas* regiones del espacio, tan pequeñas que en ellas el campo gravitatorio puede considerarse homogéneo. En grandes regiones del espacio, en las que de forma explícita se manifiesta la no homogeneidad del campo gravitatorio, es imposible elegir tal sistema no inercial de referencia en el que las fuerzas de inercia tengan las mismas magnitudes y direcciones que en el campo de las fuerzas de gravitación.

La cuestión consiste en que el campo de las fuerzas de gravitación es *central*, es decir, dichas fuerzas están dirigidas hacia el centro de la masa gravitante, por ejemplo de la Tierra: las fuerzas de gravitación varían inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Con ninguna aceleración del sistema de referencia es imposible obtener semejantes fuerzas de inercia, ya que con el movimiento acelerado

del sistema de referencia, las fuerzas de inercia serán paralelas entre sí (fig. 24.10).

3. De aquí se desprende, que no se puede ni pensar en que del principio de equivalencia se deduce que el campo gravitatorio es sólo «aparente», que en cualquier caso es posible elegir un sistema de referencia en el que no haya campo gravitatorio. Sobre este error advirtió múltiples veces Einstein. Sólo se puede hablar de que las propiedades del espacio y el tiempo en un campo gravitatorio y en sistemas no inerciales de referencia son análogas. En esto consiste la esencia de la teoría de gravitación de Einstein. Ciertas ideas de la misma serán examinadas a continuación.

### § 24.6. Concepto de la teoría de gravitación de Einstein

1. En el entorno de cuerpos macizos surge un campo gravitatorio. Se caracteriza por el vector de intensidad  $G$ , que por su sentido físico coincide con la aceleración de los cuerpos en el punto dado del campo, y de la magnitud escalar  $\varphi$ , que es el potencial del campo gravitatorio (§§ 9.6, 18.8). En un campo homogéneo, dirigido a lo largo del eje de abscisas, el potencial  $\varphi = gx$ , donde  $g$  es la aceleración de la caída libre,  $x$ , la distancia del punto del campo al nivel nulo del potencial, que elijiremos en el eje de ordenadas (véase (18.28)).

Del principio de equivalencia se desprende que las propiedades del espacio y el tiempo en el campo gravitatorio deben ser las mismas que en los sistemas no inerciales de referencia.

2. Supongamos que en punto, en el que el potencial del campo gravitatorio es igual a cero, el elemento de longitud a lo largo del eje de abscisas es igual a  $\Delta x_0$ ; en ese mismo punto del campo, el intervalo de tiempo es igual a  $\Delta t_0$ . Entonces, en otro cualquier punto del campo, en el que el potencial es  $\varphi$ , el elemento de longitud  $\Delta x \neq \Delta x_0$ , y el intervalo de tiempo  $\Delta t \neq \Delta t_0$ . Para los cálculos hagamos uso de las fórmulas (24.3') y (24.5). Ya que del principio de equivalencia sigue que  $g = w$ , el producto  $wx = gx = \varphi$ . Sustituyendo en (24.3') y (24.5), obtenemos

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - 2\varphi/c^2} \quad (24.6)$$

y

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 2\varphi/c^2}}. \quad (24.7)$$

Así, pues, en un campo gravitatorio, lo mismo que en los sistemas no inerciales de referencia, el tiempo no es homogéneo, mientras que el espacio no es euclídeo, es decir, no homogéneo y no isótropo. De este modo se ha confirmado la genial previsión de Lobachevski, de que la geometría del mundo real puede ser no euclídea.

3. Veamos, cómo desde este punto de vista se describe el movimiento de un cuerpo en el campo gravitatorio.

En la mecánica newtoniana, cuando no hay campo gravitatorio, un cuerpo se mueve por inercia, o sea, de modo rectilíneo y uniforme. Si, por el contrario, penetra en un campo gravitatorio, bajo la acción de la fuerza se viola el carácter inercial del movimiento. El cuerpo adquiere aceleración y se pone en movimiento no uniforme y no rectilíneo.

De acuerdo con la teoría general de la relatividad (teoría de gravitación de Einstein) *los cuerpos siempre se mueven por inercia*, independientemente de si hay o no campo gravitatorio. El movimiento por inercia es un movimiento por la *línea geodésica* (es decir, por la distancia más corta) y para éste se consume *el mínimo de tiempo propio* (o sea, el tiempo según el reloj ligado con el cuerpo en movimiento).

Si el cuerpo está en movimiento fuera del campo gravitatorio, allí el espacio es homogéneo e isótropo y el tiempo, homogéneo. Por lo tanto, el cuerpo se moverá por una trayectoria rectilínea, y la velocidad de movimiento será una magnitud constante: de  $\Delta x = \text{const}$  y  $\Delta t = \text{const}$ , sigue que  $v = \Delta x / \Delta t = \text{const}$ .

Si, por el contrario, el cuerpo se mueve por el campo gravitatorio, en el que el tiempo no es homogéneo y el espacio, no homogéneo y no isótropo, la línea geodésica ya no es una línea recta, sino que es cierta curva, cuya forma depende de la estructura del campo gravitatorio. De la misma forma, la velocidad de movimiento será una magnitud variable, ya que el elemento de longitud y el intervalo de tiempo son aquí funciones del potencial gravitatorio (véase (24.6) y (24.7)).

Sobre la base de estas ideas, Einstein pudo formular la teoría relativista de gravitación, de la cual la ley de gravitación de Newton se desprende como un caso límite para campos débiles, con movimientos lentos de los cuerpos en interacción.

Sin embargo, esta nueva opinión acerca de las propiedades del espacio y el tiempo, permitió a Einstein, no sólo

obtener una nueva teoría de gravitación, sino que también descubrir tres efectos que no eran conocidos en la teoría de gravitación de Newton.

4. Ante todo, Einstein mostró que los planetas se mueven alrededor del Sol por curvas no cerradas y no por elipses. Cada una de estas curvas puede ser representada, aproximadamente, por elipses, cuyo eje gira con lentitud en el plano de la órbita.

Para los planetas muy lejanos del Sol, revelar este efecto es muy complicado. Entre los planetas el más cercano del Sol es Mercurio; por consiguiente, él se encuentra en un

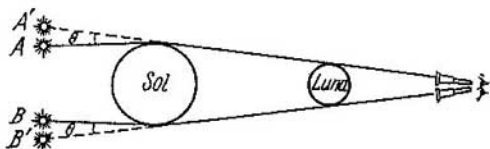


Fig. 24.11.

campo gravitatorio más fuerte y se mueve por la órbita con mayor rapidez que otros planetas. Por este motivo, los efectos relativistas se manifiestan con más fuerza. Resultó, que el giro del eje de la órbita de Mercurio debe constituir  $43''$  por siglo. Semejante singularidad en las leyes de movimiento de Mercurio fue observada por los astrónomos ya en la mitad de siglo XIX, pero no se conseguía explicar semejante fenómeno. Las mediciones astronómicas más precisas del desplazamiento dieron el valor  $(42,6 \pm 0,9)''$  por centenario, lo que perfectamente se explica con la teoría de gravitación de Einstein.

5. El segundo efecto que sigue de dicha teoría, es la curvatura de los rayos luminosos en el campo gravitatorio. En efecto, la luz siempre se propaga por las líneas geodésicas, y en el campo gravitatorio dichas líneas son curvas que dependen de la estructura del campo.

En el ámbito del Sistema Solar, un campo gravitatorio fuerte sólo existe en las cercanías de la superficie del Sol. Por esta razón, la curvatura de los rayos luminosos puede ser observada de la forma siguiente. Hay que fotografiar un sector de la esfera celeste cerca del Sol, seguidamente, ese

mismo sector, cuando el Sol salga de él; con ello, se debe observar el desplazamiento de las estrellas a cierto ángulo  $\theta$  (fig. 24.11). Es natural que las fotografías de la bóveda celeste deben hacerse durante el eclipse total, ya que de otro modo, sobre el fondo de la brillante luz del Sol, la débil luz que emerge de las estrellas no se verá.

Einstein demostró que

$$\theta = \frac{4\varphi}{c^2} = \frac{4\gamma M}{c^2 R}, \quad (24.8)$$

donde  $M$  y  $R$  son, respectivamente, la masa y el radio del Sol. Poniendo los valores de  $\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ H} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ,  $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ,  $R = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$  y  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , obtenemos

$$\theta = 0,085 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 1,75''.$$

Las mediciones realizadas por una serie de observadores, ofrecieron de  $(1,72 \pm 0,11)''$  a  $(1,82 \pm 0,15)''$ , lo que en los límites de los errores de medición concuerda perfectamente con la teoría.

6. Por fin, gracias a la no homogeneidad del tiempo, cualquier proceso periódico en el campo gravitatorio debe transcurrir con más lentitud que fuera del campo. Por consiguiente, la marcha del reloj en el campo gravitatorio se retrasa.

Sea que un átomo irradia ondas electromagnéticas (es indiferente que sea luz visible o radiación gama) fuera del campo gravitatorio, con cierta frecuencia  $\nu_0$ . Entonces, ese mismo átomo, estando ubicado en un campo gravitatorio de potencial  $\varphi$ , irradiará ondas con menor frecuencia  $\nu$ . En realidad,  $\nu_0 = \Delta N / \Delta t_0$ , donde  $\Delta N$  es el número de oscilaciones. En el campo gravitatorio  $\nu = \Delta N / \Delta t$ , de donde  $\nu / \nu_0 = \Delta t_0 / \Delta t$ . Haciendo uso de (24.7), obtendremos

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - 2\varphi/c^2}. \quad (24.9)$$

En el experimento puede ser registrada la variación de la frecuencia

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = 1 - \sqrt{1 - 2\varphi/c^2} = \frac{2\varphi}{c^2 (1 + \sqrt{1 - 2\varphi/c^2})}.$$

Como, por lo general  $\frac{2\varphi}{c^2} \ll 1$ , entonces

$$1 + \sqrt{1 - 2\varphi/c^2} \approx 2.$$

Así, pues,

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{\varphi}{c^2}. \quad (24.10)$$

En el campo gravitatorio de la Tierra, el efecto de variación de la frecuencia es exclusivamente pequeño. Por ejemplo, a una altura  $h$  de la Tierra

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{\varphi}{c^2} = \frac{gh}{c^2} = \frac{9,81h}{9 \cdot 10^{16}} = 1,09 \cdot 10^{-16} h.$$

A pesar de todo, en 1960 Pound y Rebka, empleando el efecto de Mössbauer (§ 81.11), consiguieron confirmar de manera experimental la variación de la frecuencia de la radiación gamma en el campo gravitatorio de la Tierra. Fue comparada la radiación de dos núcleos del isótopo de hierro de masa atómica 57 de dos fuentes, una de las cuales se encontraba en la superficie de la Tierra y la segunda, a una altura de 22,5 m. La variación teórica de la frecuencia  $\Delta v/v_0 = 2,46 \cdot 10^{-15}$ . En el experimento resultó  $\Delta v/v_0 = (2,56 \pm 0,25) \cdot 10^{-15}$ . Su razón

$$\frac{\Delta v(\text{exp.})}{\Delta v(\text{teór})} = 1,04 \pm 0,12,$$

lo que en los límites de los errores del experimento, de forma brillante confirma la teoría de gravitación de Einstein.

### § 24.7. Paradoja de los gemelos

1. Supongamos que una nave cósmica es lanzada de la Tierra en el punto  $A$ , se acelera y se aleja de ella, a lo largo

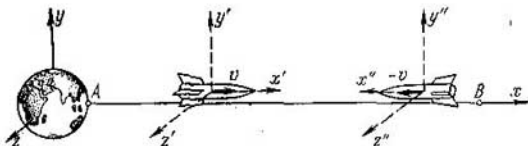


Fig. 24.12.

del eje de abscisas, a una velocidad  $v$ . A continuación, en el punto  $B$  la nave gira, se mueve hacia la Tierra a esa misma velocidad, es frenada y aterriza. Liguemos con la Tierra el sistema de referencia  $xyz$ , con la nave al alejarse, el sistema  $x'y'z'$  y con la nave al acercarse, el sistema  $x''y''z''$  (fig. 24.12).



Comparemos el intervalo de tiempo entre el lanzamiento y el aterrizaje según las indicaciones del reloj en la Tierra y del reloj ubicado en la nave cósmica. Se supone que la estructura de los relojes les permite funcionar con igual perfección en los dos sistemas de referencia.

2. El intervalo de tiempo entre los dos acontecimientos ocurridos según el reloj terrestre

$$\Delta t_{\text{Tierra}} = t_{2A} - t_{1A} = (t_{2A} - t_B) + (t_B - t_{1A}), \quad (24.11)$$

donde  $t_{1A}$  es el momento de lanzamiento de la nave,  $t_{2A}$ , el momento de aterrizaje y  $t_B$ , el momento de giro. Ese mismo intervalo de tiempo según el reloj cósmico, de acuerdo con (12.22), será igual a

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{c6sm}} = \Delta t'' + \Delta t' &= \frac{t_{2A} - t_B + (x_A - x_B) v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \\ &+ \frac{t_B - t_{1A} - (x_B - x_A) v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (24.12)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{x_A - x_B}{t_{2A} - t_B} = -v, \quad \frac{x_B - x_A}{t_B - t_{1A}} = v,$$

y poniéndolas en (24.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{c6sm}} &= (t_{2A} - t_B) \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + (t_B - t_{1A}) \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \\ &= (t_{2A} - t_B) \sqrt{1 - v^2/c^2} + (t_B - t_{1A}) \sqrt{1 - v^2/c^2} = \\ &= \Delta t_{\text{Tierra}} \sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned}$$

Así, pues,

$$\Delta t_{\text{c6sm}} = \Delta t_{\text{Tierra}} \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (24.13)$$

3. Este problema se puede resolver de otro modo, desde el punto de vista del observador que se encuentra en la nave cósmica. El reloj, en reposo en relación con la nave, muestra el tiempo propio (§ 12.9):

$$\Delta t_{\text{c6sm}} = \Delta t'_0 + \Delta t''_0. \quad (24.14)$$

El tiempo de acuerdo con el reloj en Tierra, será hallado por la fórmula (12.21):

$$\Delta t_{\text{Tierra}} = \Delta t' + \Delta t'' = \frac{\Delta t'_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{\Delta t''_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_{\text{c6sm}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (24.15)$$

De nuevo hemos llegado a la fórmula (24.13).

Así, pues, con todo cálculo resulta que el tiempo en la nave cósmica transcurre con mayor lentitud que en la Tierra. Si, por ejemplo,  $v = 0,9998c$ , el tiempo se retrasa 50 veces! Por lo tanto, si uno de los gemelos marcha a la velocidad indicada a un largo viaje cósmico y, durante éste (por su calendario) envejece un año, su hermano que queda en la Tierra, envejecerá 50 años.

4. El retraso del tiempo en una nave cósmica que se mueve a gran velocidad, ofrece de principio la posibilidad de viajar a las lejanas estrellas, en el transcurso de intervalos de tiempo razonables según su propio reloj. Pero bien es verdad que las personas que quedaron en la Tierra nada sabrán de los resultados de semejante viaje.

Notemos, que en la actualidad son completamente desconocidos los requisitos técnicos (incluidas las fuentes de energía) que permitirán acelerar las naves cósmicas hasta velocidades ultrarrelativistas. Incluso la aceleración de las partículas elementales hasta dichas velocidades está ligada con enormes dificultades (§§ 41.4—41.6).

5. El resultado que más arriba hemos obtenido recibe el nombre de "paradoja de los gemelos". En realidad no hay paradoja ninguna y las objeciones que a veces se presentan respecto del resultado obtenido no tienen base. Consideremos algunas de ellos.

En ocasiones dicen que el resultado obtenido contradice al principio de la relatividad (§ 12.2). Esta objeción se basa en una confusión. Durante el lanzamiento, giro y aterrizaje, en la nave cósmica surgen sobrecargas, durante el vuelo libre, la ingravidez; en la Tierra no existe ninguno de esos fenómenos. Así, pues, los dos sistemas de referencia no son equivalentes y por lo tanto, en ellos el ritmo del tiempo es diferente. Aquí el principio de relatividad no es aplicable.

A veces, se oponen al resultado obtenido indicando que la nave cósmica no es un sistema inercial de referencia en las

etapas de lanzamiento, giro y aterrizaje, y durante el cálculo hicimos uso de las fórmulas de la teoría especial de la relatividad. Esta observación es razonable, pero resulta que el carácter no inercial no varía la esencia del problema. En los sectores, donde el movimiento de la nave no es uniforme, el tiempo también retardará, lo que fue mostrado en los párrafos anteriores.

6. En ocasiones se expresan dudas acerca de si es o no justa la aplicación de la teoría de la relatividad al ritmo de los procesos que transcurren en los organismos vivientes. Por cierto, que la posibilidad de aplicar a dichos organismos las leyes de la mecánica newtoniana, no provoca dudas. Pero no hay ningún motivo para el surgimiento de dichas dudas. El fomento de la ciencia ha mostrado que, al fin de cuentas, la vida se reduce a procesos fisicoquímicos, que transcurren en sistemas muy complicados, constituidos de compuestos de alto número molecular, es decir, de albúminas y ácidos nucleicos. Gracias a su alto grado de organización, estos sistemas, como es lógico, tienen sus regularidades específicas. Pero las leyes generales de física tanto newtoniana, como relativista, son aplicables por completo a dichos organismos.

### *Tercera parte*

## **TEORÍA CINÉTICO-MOLECULAR DE UN GAS**

### *Capítulo 25*

### **MOVIMIENTO MOLECULAR**

#### **§ 25.1. Cómo fue medida la velocidad de movimiento de las moléculas**

1. Como sabemos, todos los cuerpos constan de moléculas y átomos, que se encuentran en permanente movimiento caótico. ¿Cómo determinar la velocidad de movimiento de las moléculas?

Fue Stern quien en 1920 realizó por primera vez semejante experimento. En el futuro, el método del "haz molecular", propuesto por él lo emplearon diferentes científicos, que crearon instalaciones más perfectas. Examinemos la idea del experimento realizado por Lammert en 1929.

2. El aparato (fig. 25.1) consta del recipiente 1 de gruesas paredes, al que se une el "horno molecular" 2, es decir, un recipiente en el que se evapora mercurio (u otro cualquier metal líquido). Los vapores de mercurio pasan por el sistema de diafragmas 3, a causa de lo cual se crea un haz molecular bastante estrecho. Con el motor 6 se ponen en accionamiento dos discos 4 y 5 con finas rendijas (fig. 25.2) giradas una respecto de la otra a cierto ángulo  $\varphi$ . El haz molecular, después de pasar por las rendijas en los dos discos, llega a la trampa 7, refrigerada por nitrógeno líquido. Las moléculas se sedimentan en las paredes del blanco 8, formando en él un sedimento visible.

Mediante la bomba 9, en la instalación se mantiene alto vacío para evitar la colisión de los átomos de mercurio con las moléculas de aire.

3. Está claro, que si los discos están inmóviles, el haz molecular no llegará al blanco. Pero si ponemos los discos

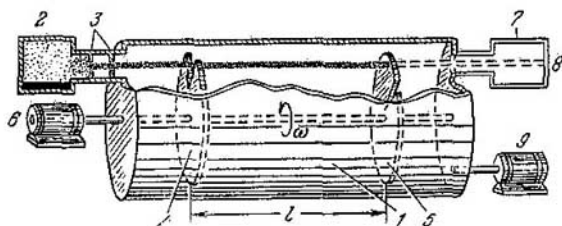


Fig. 25.1.

en rotación, las moléculas que tienen determinada velocidad, podrán pasar por las rendijas del segundo disco. Esto se producirá en aquel caso, cuando durante el tiempo que las moléculas consumen para pasar el espacio entre los dos discos, el segundo de éstos gira, precisamente, al ángulo  $\varphi$ , de forma que la rendija resulta encontrarse en el camino del haz molecular.

Si los discos giran a una velocidad angular  $\omega = 2\pi n$  (donde  $n$  es su frecuencia de rotación), el ángulo  $\varphi = \omega t = 2\pi n t$ . Pero  $t = l/v$ , donde  $v$  es la velocidad de las moléculas. De aquí,  $\varphi = 2\pi n l/v$ , o bien

$$v = 2\pi n l/\varphi. \quad (25.1)$$

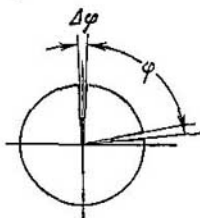


Fig. 25.2.

Conociendo el ángulo entre las rendijas, la distancia entre los discos y su frecuencia de rotación, puede ser calculada la velocidad de las moléculas.

Por ejemplo, si  $l = 40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$ ,  $\varphi = 24^\circ = 24\pi/180$  rad y  $n = 3000 \text{ rpm} = 50 \text{ rps}$ , la velocidad de las moléculas

$$v = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 0,4 \cdot 180}{24\pi} = 300 \text{ m/s.}$$

4. Notemos, que a causa de la anchura finita de las rendijas, la velocidad no se mide con precisión, sino que con cierto error. En efecto, sea que la molécula vuela por el borde izquierdo de la rendija del primer disco. Por la rendija del segundo disco puede pasar tanto por el borde izquierdo, como por el derecho. Pero en el primer caso, el sistema gira al ángulo  $\varphi$ , mientras que en el segundo, a  $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$ . Correspondientemente, al blanco llegarán tanto las moléculas que se mueven a la velocidad  $v$  (pasarán por el borde izquierdo), como las que se mueven a menor velocidad  $v_1 = 2\pi nl/\varphi_1$  (que pasarán por el borde derecho de la rendija). Al medir la velocidad, el error será igual

$$\Delta v = v - v_1 = \frac{2\pi nl}{\varphi} - \frac{2\pi nl}{\varphi + \Delta\varphi} = \frac{2\pi nl \Delta\varphi}{\varphi(\varphi + \Delta\varphi)} = \frac{v\Delta\varphi}{\varphi + \Delta\varphi}. \quad (25.2)$$

En nuestro caso concreto, que hemos calculado más arriba, para  $\Delta\varphi = 2^\circ$ , tenemos

$$\Delta v = 300 \cdot 2/26 = 23 \text{ m/s.}$$

Así, pues, en el experimento dado sólo podemos afirmar que la velocidad de las moléculas se encuentra dentro de los límites de 300 y 277 m/s.

Claro está, que este error puede ser reducido, si las rendijas se hacen más estrechas. Sin embargo, en principio es imposible liquidar por completo la dispersión de las velocidades, ya que no se pueden hacer las rendijas de una anchura infinitamente estrecha.

## § 25.2. Distribución de las moléculas por las velocidades

1. Si todas las moléculas estuvieran en movimiento a las mismas velocidades, con ángulo prefijado entre las rendijas y la distancia preestablecida entre los discos, todas las moléculas llegarían a la trampa sólo con una determinada frecuencia de rotación del disco. En tal caso, a una velocidad idónea de rotación, el blanco se cubriría con rapidez de una capa de moléculas, mientras que a otras velocidades las moléculas no llegarían a él. En realidad, los resultados del experimento resultaron ser otros por completo. Ante todo, las moléculas penetraban a la trampa a diversas velocidades de rotación, lo que significa que en el haz hay moléculas con distintas velocidades. En efecto, de (25.1) sigue que las mo-

lécúlas que se mueven a grandes velocidades, llegarán a la trampa a mayores velocidades de rotación de los discos, por lo contrario, las moléculas más lentas llegarán a la trampa a menores velocidades de rotación. Más adelante resultó, que para obtener un sedimento de igual grosor a diferentes velocidades de rotación es preciso un intervalo de tiempo distinto. Por su lado, esto indica que en el haz la parte de moléculas rápidas y lentas es diferente.

2. En el experimento que describimos, lo más difícil es determinar el número de moléculas que se mueven a una u otra velocidad. Para vencer esta dificultad fue hallada una original salida. La práctica ha mostrado que un sedimento visible se obtiene con un bien determinado número de moléculas condensadas. Mientras mayor es el número de moléculas en el haz, menor cantidad de tiempo se requiere para obtener un sedimento visible, es decir,  $N_1/N_2 =$

$t_2/t_1$ . De esta forma, en el experimento dado puede ser definido el número relativo de moléculas, cuya velocidad se halla en el intervalo de  $v$  a  $v + \Delta v$ , es decir, el número  $\Delta N/(N\Delta v)$ .

Los resultados de uno de los experimentos se aducen en la tabla 25.1 y en la fig. 25.3. Las mediciones fueron realizadas con las moléculas de cierta sustancia a determinada temperatura en el "horno molecular".

3. De los resultados del experimento se desprende que hay cierta velocidad a la que se mueve la mayoría de las moléculas; en nuestro caso se halla en los márgenes de 270—300 m/s. Esta velocidad recibe el nombre de *la más probable*. Designémosla por  $u$ .

La mayoría de las moléculas se mueve a velocidades próximas a la más probable; hay muy pocas moléculas cuyas

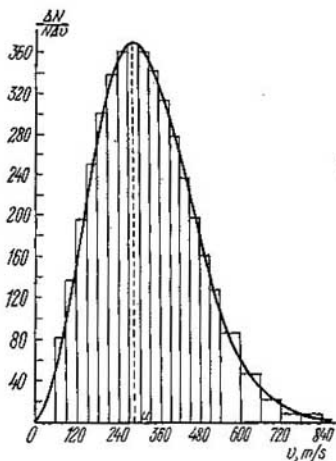


Fig. 25.3.

Tabla 25.1

Intervalo de velocidades, m/s	Número relativo de moléculas, $\Delta N/(N\Delta v)$	Intervalo de velocidades, m/s	Número relativo de moléculas, $\Delta N/(N\Delta v)$
60—90	82	360—390	313
90—120	137	390—420	278
120—150	195	420—450	237
150—180	251	450—480	198
180—210	300	480—510	161
210—240	338	510—540	127
240—270	362	540—600	86
270—300	368	600—660	46
300—330	361	660—720	22
330—360	342	720—840	9

velocidades sean mucho mayores o mucho menores que la más probable.

La distribución de las moléculas por las velocidades, obtenida de modo experimental, concuerda correctamente con la distribución teórica que fue obtenida ya en 1860 por Maxwell, que aplicó las leyes de la teoría de probabilidad al movimiento térmico, caótico. La ley obtenida fue denominada *distribución de las moléculas por las velocidades de Maxwell*. La buena coincidencia de la ley teórica con los datos experimentales, es una perfecta confirmación de que nuestras representaciones acerca del carácter del movimiento molecular en los gases son correctas.

4. Tanto mediante un experimento, como con ayuda de la distribución de las moléculas por velocidades de Maxwell, puede ser calculada la velocidad más probable de movimiento de las moléculas de un gas. Resulta, que ésta depende de la temperatura del gas y de la masa de sus moléculas.

Por ejemplo, a temperaturas de 0°C y 100°C, la velocidad más probable de las moléculas de hidrógeno es igual, respectivamente, a 1510 y 1765 m/s. A esas mismas condiciones, la velocidad más probable de las moléculas de oxígeno es igual a 378 y 442 m/s, o sea, 4 veces menor, mientras que la velocidad de las moléculas de los vapores de mercurio, 151 y 176,5 m/s, es decir, 10 veces menor que la velocidad de las moléculas de hidrógeno.

Como es sabido, la masa de una molécula de hidrógeno es 16 veces menor que la de una molécula de oxígeno y 100



veces menor que la masa de un átomo de mercurio (la molécula de mercurio consta de un sólo átomo, mientras que las moléculas de hidrógeno y oxígeno son biatómicas). Por lo tanto, del experimento se desprende que a la temperatura prefijada de los gases, las velocidades más probables de sus moléculas son razón inversa de las raíces cuadradas de sus masas:

$$u_1/u_2 = \sqrt{m_2/m_1}. \quad (25.3)$$

De aquí podemos obtener

$$m_1 u_1^2/2 = m_2 u_2^2/2. \quad (25.4)$$

Así pues, *la energía cinética media de las moléculas no depende de la naturaleza del gas y sólo depende de su temperatura.*

### § 25.3. Longitud del recorrido libre de una molécula

1. Como a la temperatura ambiente la velocidad de las moléculas de un gas constituye varias centenas de metros por segundo, a primera vista no queda claro por qué en los gases la difusión transcurre con relativa lentitud. Por ejemplo, en una habitación el olor se propaga de un extremo de ésta a otro en un intervalo de tiempo igual a decenas de segundos y no en centésimas de segundo, como al parecer deberíamos de esperar. La causa radica en que las moléculas chocan entre sí con mucha frecuencia, por lo que su trayectoria no es una línea recta, sino que una quebrada muy complicada.

Podemos obtener una representación del carácter de dicha trayectoria si con un microscopio observamos el movimiento de una partícula browniana. En 1827, Brown, mediante una potente lupa, observó la conducta en el agua de finísimas esporas, cuya dimensión era cerca de un micrómetro (micra). Descubrió que dichas partículas se encuentran en movimiento caótico permanente, como si ejecutaran una fantástica danza. Más adelante, fue revelado que *el movimiento browniano* es realizado por todas las partículas microscópicas tanto en los líquidos, como en los gases.

2. Según demostraron Einstein y Smolujovski en 1905, las partículas brownianas se comportan como gigantescas moléculas, cuya energía cinética media es igual a la energía cinética media de las moléculas del líquido o gas que rodean

dicha partícula. Por esta causa, el carácter del movimiento de las partículas brownianas corresponde por completo al del movimiento de las moléculas, pero con una notable diferencia: la velocidad de movimiento de las partículas es mucho menor que la velocidad de movimiento de las moléculas. En efecto, de la igualdad de los valores medios de la energía cinética de las partículas y las moléculas  $\bar{K}_{\text{par}} = \bar{K}_{\text{mol}}$  se desprende que

$$M\bar{v}_{\text{par}}^2/2 = m\bar{v}_{\text{mol}}^2/2 \text{ o bien } \bar{v}_{\text{par}} = \bar{v}_{\text{mol}} \sqrt{m/M},$$

donde con una raya se designa el valor medio de la velocidad,  $m$ , la masa de la molécula,  $M$ , la masa de la partícula browniana. Esta contiene miles de millones de moléculas:  $M/m \approx$

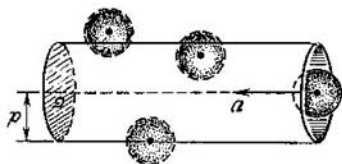


Fig. 25.4.

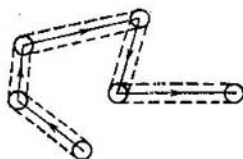


Fig. 25.5.

$\approx 10^{10}$ ; la velocidad de las moléculas de un gas constituye varios cientos de metros por segundo. Por lo tanto, la velocidad de las partículas brownianas es de unos milímetros por segundo, lo que es observado en la práctica.

3. Así, pues, la molécula sufre cada segundo múltiples colisiones. Probemos calcular el número de colisiones recíprocas por segundo y la longitud media del recorrido libre de una molécula.

Supongamos que al chocar entre sí las moléculas se comportan como bolitas elásticas. Además, para simplificar los cálculos, vamos a suponer que sólo una molécula se mueve, la extrema izquierda en la fig. 25.4, mientras que las demás están en reposo. Durante la colisión de las moléculas sus centros se aproximan a una distancia  $d$ , igual al diámetro de una molécula. Por esta razón, es idóneo considerar que el radio de la molécula en movimiento  $r = d$ , mientras que las demás moléculas son puntos materiales.

Con cada colisión, la molécula cambia la dirección de su movimiento, de modo que su trayectoria tiene la forma de

una complicada quebrada (fig. 25.5). Para comodidad de cálculo, mentalmente rectificaremos esta trayectoria, como está mostrado en la fig. 25.4. Esto no puede reflejarse en el cálculo del número de colisiones, ya que aquí la forma de la trayectoria no juega ningún papel. La molécula que consideramos realiza un recorrido  $l = vt$  durante el lapso  $t$ . En el transcurso de dicho tiempo, nuestra molécula chocará con todas las demás moléculas, cuyos centros se encuentran en un cilindro, cuya generatriz  $l = vt$ , mientras que el área de la base  $\sigma$  tiene un diámetro igual al diámetro doblado de la molécula. Este área recibe el nombre de *sección eficaz de choque*.

El número de moléculas en dicho cilindro  $N = n\sigma l = n\sigma vt$ , donde  $n$  es la concentración de moléculas, es decir, el número de moléculas por unidad de volumen. Por segundo, la molécula sufre  $z$  choques (colisiones):

$$z = N/t = n\sigma v. \quad (25.5)$$

4. Si la molécula se moviera en el vacío, sin sufrir colisiones, pasaría por segundo una distancia, numéricamente igual a su velocidad. En realidad, la molécula sufre  $z$  choques por segundo. Por consiguiente, la longitud del recorrido libre

$$\lambda = v/z = 1/n\sigma. \quad (25.6)$$

Este cálculo es bastante aproximado, ya que durante la deducción hemos hecho una serie de suposiciones artificiales. Sin embargo, la rigurosa teoría, que toma en consideración el movimiento de todas las moléculas, nos ofrece un resultado que diverge del obtenido un 30–40%, lo que en el caso dado no es muy sustancial, ya que aquí nos interesan no los valores precisos de las magnitudes, sino sólo su orden.

5. Existen varios métodos que de modo experimental, nos permiten determinar la longitud del recorrido libre. Resulta que con la presión atmosférica normal, la longitud del recorrido libre de la molécula de un gas constituye cerca de  $0,1\mu\text{m} = 10^{-7} \text{ m}$ ; por otro lado, la concentración de las moléculas de un gas a estas condiciones  $n \approx 10^{25} \text{ m}^{-3}$ . De aquí puede ser hallada la sección eficaz de choque

$$\sigma = \frac{1}{n\lambda} \approx \frac{1}{10^{-7} \cdot 10^{25}} = 10^{-18} \text{ m}^2.$$

Como  $\sigma = n d^2$ , donde  $d$  es el diámetro eficaz de la molécula,

$$d = \sqrt{\sigma/\pi} \approx 10^{-9} \text{ m.}$$

Por su orden, el resultado obtenido concuerda bien con los valores numéricos de las dimensiones de las moléculas, que se obtienen por otros procedimientos.

### § 25.4. Difusión

1. Denominamos *difusión* el proceso de nivelación de la concentración de dos sustancias al mezclarse éstas entre sí. La difusión transcurre tanto en los gases, como en los líquidos y sólidos.

El siguiente experimento nos permite observar la difusión en los gases. Un cilindro de acero con gruesas paredes

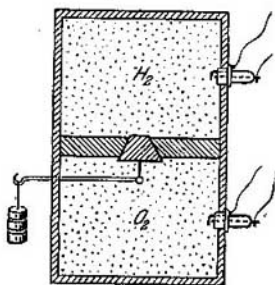


Fig. 25.6.

se divide en dos partes por medio de un tabique en el que hay una válvula (fig. 25.6). La parte inferior del cilindro se llena de oxígeno, la superior de hidrógeno. En las paredes laterales hay bujías de encendido, entre cuyos electrodos puede crearse una chispa. Al comenzar el experimento, la chispa no produce una explosión, ya que el oxígeno está separado del hidrógeno. Si abrimos la válvula, después de cierto intervalo de tiempo, los gases se mezclan y la chispa

provoca la explosión de la mezcla creada, es decir, del grisú. Notemos que durante la difusión, el oxígeno, que es más pesado, asciende, mientras que el hidrógeno, 16 veces más ligero que el oxígeno, desciende. Por consiguiente, los gases se desplazaran a pesar de la acción del campo de la fuerza de gravedad.

Como es natural, este fenómeno se explica de acuerdo con la teoría cinético-molecular. La cuestión radica en que al moverse de forma caótica y chocando entre sí, las moléculas de los gases se mezclan. Gradualmente, surge una mezcla de los dos gases con igual concentración de los dos tipos de moléculas.

2. Señalemos, que gracias a la difusión, la atmósfera que nos rodea (por lo menos su capa interior —la troposfera) es una mezcla homogénea de nitrógeno, oxígeno, dióxido de carbono, con una pequeña cantidad de gases inertes y vapores de agua. Si no hubiera difusión se produciría la división en capas de la atmósfera bajo la acción del campo de la fuerza de gravedad: abajo estaría una capa del dióxido de carbono, él más pesado, sobre éste el oxígeno y, aún más arriba, el nitrógeno y los gases inertes.

3. Como al crecer la temperatura aumentan las velocidades de movimiento de las moléculas, al mismo tiempo se acelera el proceso de difusión, lo que se observa en la práctica. Todos sabemos, que en el agua caliente la sal o el azúcar se diluyen con mucha mayor rapidez que en la fría, lo que significa la aceleración del proceso de difusión con el crecimiento de la temperatura. Fenómenos análogos también observamos tanto en los gases, como en los sólidos.

### § 25.5. Ley de la difusión

1. Tratemos de aclarar con mayor profundidad el mecanismo de la difusión en los gases y, simultáneamente, determinar de qué depende la masa de la materia que se transporta durante la difusión. Para facilitar los razonamientos, examinemos el proceso de *autodifusión*, es decir, aquel caso cuando el recipiente está relleno de un solo gas, pero en diversas partes de éste la concentración de las moléculas es diferente.

Sea, por ejemplo, el recipiente un tubo en cuya parte izquierda se mantiene una concentración excesiva, mientras que en la derecha, cierto enrarecimiento (fig. 25.7). Por la dirección del eje de abscisas, la concentración de las moléculas  $n$  y la densidad del gas, proporcional a ella,  $\rho = m_0 n$ , disminuyen. Destaquemos mentalmente en el tubo un área  $S$  y calculemos la masa  $\Delta m$  de la materia que se transporta por la unidad de área en el transcurso de la unidad de tiempo, o sea, la magnitud  $\Delta m / (S \Delta t)$ .

2. Por el plano sólo pueden pasar aquellas moléculas distanciadas de él a una distancia que no supere la longitud del recorrido libre, es decir, las moléculas que se encuentran en las capas 1 y 2 de la fig. 25.7. Pero como las moléculas se mueven de forma absolutamente caótica y todas las direcciones en el espacio son para ellas iguales, *en término medio*, por la dirección prefijada sólo se moverá una sexta parte de

todas las moléculas:  $N/6$  a lo largo de la dirección positiva del eje de abscisas,  $N/6$ , a lo largo de su dirección negativa, etc.

En el volumen  $1$  hay  $N_1 = n_1 S \lambda$  moléculas; de ellas, por la superficie  $S$  pasará una sexta parte, o sea,  $N_1/6 = 1/6 n_1 S \lambda$ . De igual modo, del volumen  $2$  por la superficie  $S$  pasará  $N_2/6 = 1/6 n_2 S \lambda$  moléculas. Como resultado, por la super-

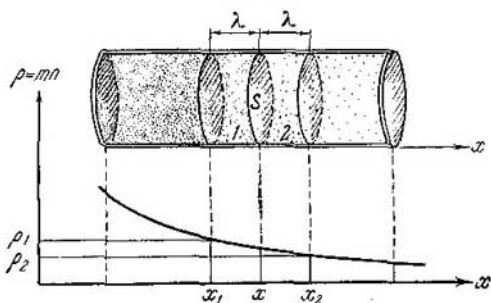


Fig. 25.7.

ficie, durante un tiempo  $\Delta t$ , difundirá una cantidad de moléculas igual a  $\Delta N = 1/6 S \lambda (n_1 - n_2)$ . Multiplicando los dos miembros de la igualdad por la masa de una molécula  $m_0$  y teniendo en cuenta que  $m_0 \Delta N = \Delta m$  y  $m_0 (n_1 - n_2) = m_0 n_1 - m_0 n_2 = \rho_1 - \rho_2 = -\Delta \rho$ , obtenemos

$$\Delta m = -\frac{1}{6} S \lambda \Delta \rho. \quad (25.7)$$

3. Transformemos esta igualdad en cierto grado. La magnitud  $\frac{\Delta \rho}{\Delta x} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{x_2 - x_1}$ , que caracteriza la velocidad de variación de la densidad del gas a lo largo del eje de abscisas, recibe el nombre de *gradiente de densidad*. La fracción  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\lambda}{\Delta t} = 2v$  es igual a la velocidad media duplicada de movimiento de las moléculas. Teniendo esto en cuenta, reescribimos (25.7) de la siguiente forma:

$$\Delta m = -\frac{1}{6} S \lambda \Delta \rho = -\frac{1}{6} S \lambda \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta t = -\frac{1}{3} \lambda v \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S \Delta t.$$

De aquí, la masa de la sustancia que se transporta a causa de la difusión, se expresa así:

$$\Delta m = -\frac{1}{3} \lambda v \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S \Delta t, \quad (25.8)$$

o bien,

$$\Delta m = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S \Delta t, \quad (25.9)$$

es decir, la masa de la sustancia transportada por difusión es proporcional al gradiente de velocidad, al área de la sección del tubo y al tiempo. Esta es la ley de la difusión.

4. El coeficiente

$$D = \frac{1}{3} \lambda v \quad (25.10)$$

se denomina *coeficiente de difusión*. Conociendo el coeficiente de difusión y la velocidad media de movimiento de las moléculas, puede ser también calculada la longitud del recorrido libre de la molécula.

### § 25.6. Separación de las mezclas de gases

1. Fenómenos bastante interesantes pueden ser observados durante la difusión de los gases a través de un tabique poroso. Para estudiar este fenómeno realicemos el siguiente experimento (fig. 25.8). Un recipiente poroso de arcilla no cocida se une mediante un tubo de goma con un manómetro de agua. Cubramos el recipiente con un vaso picudo (cubilete) e introduzcamos en este último hidrógeno, es decir, un gas cuyas moléculas son de masa mucho menor que la de las moléculas de nitrógeno u oxígeno, de las que consta el aire. Veremos que el nivel del líquido en el manómetro se desplaza y muestra que la presión dentro del recipiente poroso es mayor que la atmosférica.

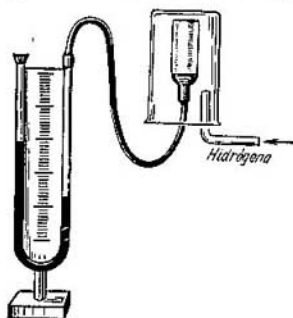


Fig. 25.8.

Este fenómeno puede ser explicado del modo siguiente. A través de las paredes del recipiente difunden tanto el aire, como el hidrógeno. El primero sale del recipiente, mientras que el segundo, entra. No obstante, la velocidad de difusión de cada uno de ellos es diferente. Como la masa de una molécula de hidrógeno es, aproximadamente, 16 veces menor que la masa de la molécula de oxígeno y 14 veces menor que la de nitrógeno, la velocidad de movimiento de las moléculas y, en correspondencia su coeficiente de difusión, es alrededor de 4 veces mayor que el coeficiente de difusión

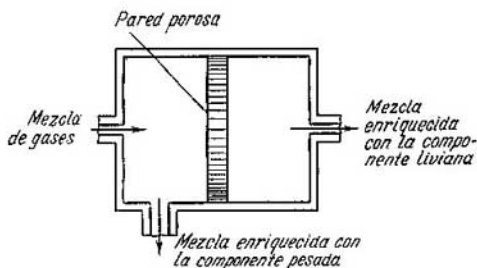


Fig. 25.9.

del aire. Como resultado, en el recipiente poroso penetra una cantidad mucho mayor de hidrógeno que la del aire que sale, por lo que la presión dentro de este recipiente crece.

Partiendo de dichas consideraciones, podemos adivinar que si el recipiente poroso se sumerge en un gas más pesado, por ejemplo en dióxido de carbono, la velocidad de difusión del aire del recipiente será considerablemente mayor que la velocidad de difusión del dióxido de carbono al recipiente poroso. Por este motivo, la presión del gas dentro de éste será menor que la atmosférica, lo que veremos gracias al manómetro. El experimento confirma esta suposición.

2. El fenómeno descrito puede utilizarse para separar las mezclas gaseosas. Imaginémonos un recipiente dividido por la mitad con un tabique poroso (fig. 25.9). A la mitad izquierda del recipiente se bombea una mezcla gaseosa compuesta de dos componentes. Como la componente ligera



difunde con mayor rapidez que la pesada por el tabique poroso, a la salida del aparato obtendremos nuevas mezclas gaseosas, de las cuales una está enriquecida con la componente ligera y la segunda, con la más pesada. Haciendo pasar la mezcla que nos interesa por una gran cantidad de cámaras, podemos conseguir, prácticamente, la separación total de una componente de la otra.

3. Casi todos los elementos químicos son una mezcla de *isótopos*, es decir, de átomos de propiedades químicas absolutamente iguales, pero que difieren por su masa atómica.

Por ejemplo, el hidrógeno consta del 99,985 % de un isótopo ligero (protio) y del 0,015 % de un isótopo pesado (deuterio); las masas de sus átomos se relacionan como 1 : 2 (con más precisión—1,008142:2,014735). De forma artificial podemos obtener un isótopo ultrapesado de hidrógeno (tricio), con una masa del átomo, aproximadamente, 3 veces mayor de la del protio. El uranio natural consta, en lo fundamental, de dos isótopos con masas de los átomos que se relacionan, aproximadamente, como 235 : 238; el isótopo ligero constituye el 0,715 %, el pesado, 99,28 % de toda la masa de uranio. El restante 0,005 % está constituido por otros isótopos.

La separación de los isótopos por métodos químicos es imposible, ya que sus propiedades químicas son absolutamente iguales. Por esta razón, para su separación hay que hacer uso de fenómenos físicos, cuyo transcurso depende de la masa de los átomos.

El método de difusión, descrito más arriba, es uno de los más importantes procedimientos de separación de los isótopos.

Por ejemplo, para algunos tipos de reactores nucleares, es necesario uranio enriquecido, con un contenido hasta del 80 % del isótopo ligero. Para su producción utilizase un gas: hexafluoruro de uranio ( $UF_6$ ), que mediante bombas se hace pasar por un sistema de varios centenares, e incluso miles, de cámaras de difusión (en función del grado necesario de enriquecimiento). Como resultado, la instalación para la separación por difusión de los isótopos de uranio es una maquinaria de enormes dimensiones y de muy alto precio.

## GASES IDEALES O PERFECTOS

## § 26.1. Presión de los gases

1. La experiencia muestra que un gas que ocupa cierto recipiente presiona contra sus paredes. De acuerdo con la teoría cinético-molecular semejante fenómeno es explicado del modo siguiente. Al moverse de forma absolutamente caótica, las moléculas chocan contra las paredes del recipiente. La cantidad de movimiento sumaria que las moléculas transmiten por unidad de tiempo a la unidad de área es, precisamente, la presión que crea el gas.

Para calcular la presión hagamos uso de la fórmula (17.17), con la que se describe la presión de un flujo de partículas que chocan elásticamente con la pared (§ 17.5):

$$p = 2nm_0v^2, \quad (26.1)$$

donde  $n$  es la concentración de las partículas. Sin embargo, en esta expresión debemos introducir dos correcciones. En el § 17.5 considerábamos un flujo de partículas, en el que éstas se movían en una misma dirección, a igual velocidad. Las moléculas de un gas ideal están en movimiento caótico en las más diversas direcciones, mientras que la velocidad de las moléculas, según la distribución de Maxwell, es diferente. Por esta causa, en lugar del cuadrado de la velocidad, en la fórmula (26.1) hay que introducir *el valor medio de cuadrado de la velocidad*:

$$\langle v^2 \rangle = \overline{v^2} = \frac{1}{N} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2).$$

La raíz cuadrada del valor medio de la segunda potencia de la velocidad  $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$  recibe el nombre de *velocidad media cuadrática*.

Como es lógico, en (26.1) hay que poner, en lugar de la concentración  $n$ , una sexta parte de ésta, o sea,  $n/6$ . En efecto, a causa de completo carácter caótico del movimiento molecular y del enorme número de moléculas por unidad de volumen, podemos afirmar que en cualquier dirección se mueve una sexta parte de las moléculas.

2. De tal modo, la presión del gas es proporcional a la concentración de las moléculas y a su energía cinética media:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \bar{v}^2}{2}. \quad (26.2)$$

A la expresión (26.2) puede aducírsele otra forma, teniendo en cuenta que la concentración de las moléculas  $n = N/V$ , donde  $N$  es la cantidad total de moléculas en un recipiente de volumen  $V$ ; poniendo  $n = N/V$  en (26.2), obtenemos

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m_0 \bar{v}^2}{2}. \quad (26.3)$$

3. Como muestra la práctica, la energía cinética media de las moléculas no depende del género del gas, sino que

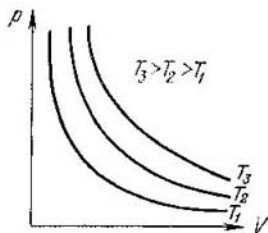


Fig. 26.1.

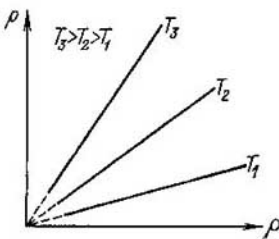


Fig. 26.2.

sólo se define por su temperatura (§ 25.2). Por lo tanto, en la transformación isotérmica (es decir, que transcurre a temperatura invariable) la energía cinética media de las moléculas es una magnitud constante. Pero con semejante condición, de (26.3) sigue que el producto de la presión del gas por su volumen también es una magnitud constante. Así, pues, hemos obtenido el siguiente resultado muy importante.

A temperatura invariable ( $m_0 \bar{v}^2/2 = \text{const}$ ) y con masa constante del gas ( $N = \text{const}$ ), el producto de su presión por el volumen es una magnitud constante (ley de Boyle—Mariotte),

$$pV = \text{const.}$$

4. Con frecuencia esta ley se formula del siguiente modo: *con la transformación isotérmica, la presión del gas es razón inversa de su volumen* (para la masa invariable del gas).

La gráfica de una isoterma en los ejes  $p - V$  es una hipérbola (fig. 26.1). Para una misma masa de gas, diversas curvas corresponden a diferentes temperaturas.

5. El volumen es igual al cociente de la razón entre la masa y la densidad:  $V = m/\rho$ . Poniendo esta igualdad en (26.4) y tomando en consideración que suponemos que la masa del gas es una magnitud constante, obtenemos

$$p/\rho = \text{const.} \quad (26.5)$$

Así, pues, la ley de Boyle—Mariotte puede ser enunciada de la siguiente forma: *a temperatura constante y con una masa invariable del gas, su presión es razón directa de la densidad*.

La gráfica de esta dependencia está representada en la fig. 26.2. La inclinación de la gráfica es función de la temperatura del gas.

## § 26.2. Unidad de presión

1. En el Sistema Internacional la unidad de presión es un *pascal* (Pa). Esta es la presión, provocada por una fuerza

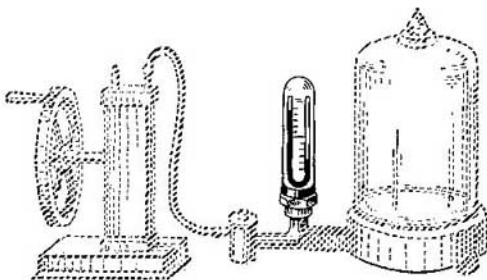


Fig. 26.3.

de 1 N, distribuida uniformemente por una superficie perpendicular a ella de  $1 \text{ m}^2$  de área:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/1 \text{ m}^2.$$

2. Es cómodo comparar la presión de un líquido o un gas con la presión de la columna vertical de cierto líquido. Por ejemplo, la presión atmosférica se mide mediante un barómetro de mercurio; el grado de enrarecimiento de una instalación de vacío (fig. 26.3), con ayuda de un manómetro.

Para calcular la presión que ejerce una columna vertical de líquido, hay que dividir su peso por el área de la base:

$$p = \frac{P}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho h S g}{S} = \rho h g, \quad (26.6)$$

donde  $\rho$  es la densidad del líquido,  $h$ , la altura de la columna,  $g$ , la aceleración de caída libre.

En particular, la presión atmosférica normal es la presión del aire que se equilibra por una columna de mercurio de 760 mm de altura. Tenemos

$$p_0 = 13,595 \cdot 10^3 \cdot 0,760 \cdot 9,80665 = 101\,325 \text{ Pa} \approx 0,1 \text{ MPa}.$$

Para medir pequeñas presiones, con frecuencia se hace uso del tubo manométrico inclinado. Aquí

$$p = \rho g l \sin \alpha, \quad (26.7)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre el tubo y el plano horizontal y  $l$ , la longitud de la columna de líquido.

### § 26.3. Gas ideal o perfecto

1. La ley de Boyle—Mariotte fue comprobada mediante múltiples experimentos. Resultó, que si las presiones no sobrepasan varias decenas de atmósferas y a temperaturas relativamente altas (de un orden de la temperatura ambiente y mayores) dicha ley se cumple de forma correcta. La desviación de los resultados del experimento de los cálculos teóricos no supera el 1 . . . 3%. Sin embargo, a presiones de un orden de 5 . . . 10 MPa y mayores, los valores experimentales de los productos  $pV$  ya se diferencian considerablemente de los teóricos.

En la tabla 26.1 y en la fig. 26.4 se aducen ciertos datos de la compresión de tres gases diferentes a la temperatura invariable  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , presión inicial  $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$  e igual volumen inicial  $V_0 = 22,41 \text{ m}^3$ .

2. Del análisis de los resultados del experimento se deduce que a presiones que no superan varios megapascals, la

Tabla 26.1

Oxígeno			Hidrógeno			Helio		
$p$ , MPa	$V$ , m <sup>3</sup>	$\frac{pV}{p_0V_0}$	$p$ , MPa	$V$ , m <sup>3</sup>	$\frac{pV}{p_0V_0}$	$p$ , MPa	$V$ , m <sup>3</sup>	$\frac{pV}{p_0V_0}$
1,020	2,20	0,988	1,020	2,24	1,006	1,017	2,240	1,003
5,208	0,408	0,936	5,252	0,448	1,04	5,178	0,448	1,02
10,74	0,187	0,884	10,94	0,224	1,08	10,64	0,224	1,05

correlación entre la presión y el volumen del gas puede ser expresada por la ley de Boyle—Mariotte. A estas condiciones, es conveniente no tomar en consideración las insignificantes

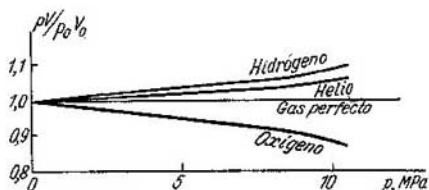


Fig. 26.4.

discrepancias entre los datos experimentales y los valores teóricos de  $pV = \text{const}$  e introducir la noción de cierto *gas ideal* o *perfecto*, que sigue al pie de la letra la ley de Boyle—Mariotte.

Así, pues, recibe el nombre de *ideal* o *perfecto*, el gas en que con la transformación isotérmica la presión es con exactitud inversamente proporcional a su volumen (con la masa invariable).

El concepto de gas ideal es una idealización, del mismo modo que lo son las nociones de punto material, carga puntiforme, etc. No obstante, en una serie de casos, la utilización de tales idealizaciones es muy conveniente, ya que permite simplificar considerablemente la solución del problema sin notorio perjuicio de la precisión de su resultado.

3. Tratemos de aclarar cuál es la estructura molecular de un gas ideal. Con este objeto, comparemos la densidad de

gas con la de un líquido (o sólido) a iguales presión y temperatura.

A presión atmosférica normal y temperatura  $100^{\circ}\text{C}$ , la densidad del agua es igual a  $958,4 \text{ kg/m}^3$ , mientras que la del vapor de agua  $0,598 \text{ kg/m}^3$ , es decir, 1600 veces menor. Pero la densidad es el producto de la masa de una molécula por la concentración de éstas:  $\rho = m_0 n$ . Por consiguiente, en una unidad de volumen de agua hay 1600 veces mayor cantidad de moléculas que en la unidad de volumen del vapor de agua.

Como el volumen es proporcional al cubo de las dimensiones lineales, la distancia entre las moléculas de vapor es  $\sqrt[3]{1600} \approx 12$  veces mayor que la distancia entre las moléculas de agua a esas mismas condiciones. Cálculos análogos para otras sustancias conducen a iguales resultados: *la distancia entre las moléculas en los gases es decenas de veces mayor que en los líquidos o sólidos (a presiones no muy grandes).*

4. Más adelante vamos a mostrar que las fuerzas moleculares varían muy rápidamente con la distancia; por ejemplo, las fuerzas de atracción molecular son razón inversa de la séptima potencia de la distancia (§ 31.4). Por lo tanto, *las fuerzas de interacción entre las moléculas en los gases (a presiones no muy grandes) son decenas de millones de veces menores que en los líquidos y los sólidos.* Esto quiere decir, que a estas condiciones podemos desprestigiar las fuerzas de interacción molecular.

De este modo se justifica la implícita suposición, que en realidad hicimos al deducir la fórmula (26.2), cuanto tuvimos en cuenta sólo la interacción entre las moléculas del gas y las paredes del recipiente, pero se desprestigió la interacción entre las propias moléculas. Por lo tanto, la ley de Boyle—Mariotte será realizada si en el gas no juegan un papel notorio las fuerzas de interacción molecular.

Indiquemos, que en el caso dado, tampoco se toman en consideración las dimensiones de las moléculas, ya que el volumen sumario de éstas (calculado, por ejemplo, según sus dimensiones eficaces) es mucho menor que el volumen del recipiente.

Así, pues, desde el punto de vista molecular, *un gas perfecto es un sistema de moléculas que no interactúan entre sí y que, con la primera aproximación, se pueden tomar como puntos materiales.*

## § 26.4. Temperatura

1. El concepto de temperatura, surgió inicialmente de las sensaciones «frío» y «caliente». Pero semejante criterio es demasiado subjetivo, ya que nuestras sensaciones no sólo dependen del estado del medio, sino que también del estado de nuestro organismo. Por ejemplo, si a una misma habitación entran dos personas, una recién salida de un baño caliente, y la otra de la calle donde hiela, la primera persona tendrá frío y la segunda, calor.

Hay que hallar un criterio objetivo para caracterizar la temperatura, así como establecer un procedimiento unívoco para medir esta magnitud.

2. Desde el punto de vista de termodinámica, *la temperatura es una magnitud que caracteriza la dirección de la transmisión de calor*. En efecto, como nos muestra la práctica, la transmisión de calor siempre transcurre de tal modo que la energía, en forma de calor, solo se transmite de los cuerpos calientes a los fríos.

Para ilustrar este fenómeno examinemos el siguiente experimento. En un recipiente que contiene cierta cantidad de agua, sumerjamos un trozo de hierro caliente. Después de cierto tiempo advertiremos que la temperatura de los dos cuerpos se ha nivelado, es decir, al tocarlos, el agua y el hierro están de igual modo templados. Pero, en este caso, el hierro se enfrió y su energía interior, correspondientemente, disminuyó; por otro lado, el agua se calentó y, por consiguiente, su energía interna creció.

3. Por definición (§ 21.3), recibe el nombre de cantidad de calor la energía comunicada mediante la transmisión de calor. O sea, durante el contacto de dos cuerpos con diferentes temperaturas *la cantidad de calor se transmite del cuerpo con más alta temperatura al cuerpo con temperatura más baja*.

La igualdad de temperaturas se define por la siguiente condición: *las temperaturas de dos cuerpos son iguales si entre ellos no tiene lugar transmisión de calor*.

Esto debe tenerse en cuenta al medir la temperatura. En realidad, el termómetro siempre registra su propia temperatura; por esta razón, para medir correctamente la temperatura de cierto cuerpo, hay que poner el termómetro en contacto con él y esperar hasta que las indicaciones del termómetro sean estables. Esto significará que la transmisión de



calor entre el cuerpo y el termómetro ha cesado y la temperatura de uno y otro es igual.

4. Desde el punto de vista de las representaciones cinético-moleculares, *la temperatura es una magnitud que caracteriza la energía cinética media del movimiento de traslación de las moléculas de un gas ideal*. Semejante definición tiene sentido, ya que la experiencia muestra que a igual temperatura, las energías cinéticas medias de las moléculas de diversos gases coinciden (§ 25.2).

Tomando en consideración el sentido termodinámico de la temperatura, podemos reducir la medición de la temperatura de cualquier cuerpo a la medida de la energía cinética media de las moléculas de un gas ideal, que se encuentre en estado de equilibrio termodinámico respecto del cuerpo dado. Sin embargo, la medición de las velocidades (o energías cinéticas) de las moléculas está relacionada con considerables dificultades. Por esta causa, en la práctica medimos no la energía cinética de las moléculas, sino que otra magnitud proporcional a ella, por ejemplo, la presión del gas.

### § 26.5. Temperatura absoluta y ecuación de estado de un gas ideal

1. Definamos *la temperatura absoluta* como una magnitud física *proporcional a la energía cinética media del movimiento de traslación de las moléculas de un gas ideal*. De acuerdo con esta definición y con las leyes de la teoría molecular clásica, la dependencia entre la temperatura y la energía cinética media de las moléculas de semejante gas, tiene el aspecto

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT. \quad (26.8)$$

Donde  $\bar{\epsilon}_k$  es la energía cinética media de movimiento de traslación de las moléculas,  $T$ , la temperatura absoluta y  $k$ , un coeficiente de proporcionalidad, llamado *constante de Boltzmann* (§ 26.9).

Para poder hacer uso del concepto de temperatura absoluta, formulado con anterioridad, ante todo hay que establecer el método de medición de dicha magnitud; a continuación, debe establecerse la unidad de medida y, por fin, definir el nivel nulo de la temperatura. Todo esto será realizado en los siguientes párrafos.

2. Como ya hemos mostrado, la energía cinética media de las moléculas de un gas perfecto, puede ser expresada me-

dianete la presión del gas y la concentración de sus moléculas (véase (26.2)):

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{m_0 \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{p}{n}. \quad (26.9)$$

De (26.8) y (26.9), sigue

$$p = nkT, \quad (24.10)$$

es decir, la presión de un gas ideal es proporcional a su temperatura absoluta y la concentración de las moléculas.

3. Teniendo en cuenta que  $n = N/V$ , obtenemos

$$\frac{pV}{T} = Nk = \text{const.} \quad (26.11)$$

Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación de estado de un gas*. Se enuncia del modo siguiente:

*Para la masa invariable de un gas (es decir, con número constante de moléculas  $N$ ), el producto de la presión y el volumen es proporcional a su temperatura absoluta.*

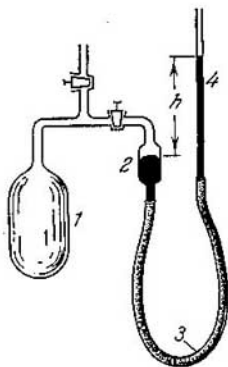


Fig. 26.5.

### § 26.6. Termómetro de gas

1. Para la medición de la temperatura absoluta se utiliza un instrumento denominado *termómetro de gas* (fig. 26.5). Éste está constituido por el recipiente 1, lleno de gas (por regla, hidrógeno); mediante el tubo 2, con el extremo ensanchado, y la manga de goma 3, el recipiente se une con el tubo manométrico 4. El recipiente lleno de hidrógeno se pone en contacto con el cuerpo, cuya temperatura se quiere medir. Subiendo o bajando el tubo manométrico, se hace llegar el nivel en el ensanchamiento 2 hasta la marca prefijada, de forma que la medición de la presión transcurre a volumen invariable.

2. La temperatura de dos cuerpos se nivela del modo siguiente. Primeramente creamos el equilibrio termodinámico del termómetro de gas con el primer cuerpo y, a continuación, con el segundo, midiendo cada vez la presión

según la altura de la columna de mercurio. Después, basándonos en la ecuación de estado de un gas (26.11), a condición de la constancia del volumen del gas, llegamos a la conclusión de que

$$T_1/T_2 = p_1/p_2. \quad (26.12)$$

Es decir, la medición de la temperatura se reduce a medir la presión del gas.

Como es natural, en la práctica la temperatura no se mide con termómetros de gas, sino que con otros instrumentos, o sea, con termómetros de mercurio o de alcohol, de resistencia o con termopares, etc. No obstante, todos estos instrumentos se gradúan por medio del termómetro de gas que, por lo tanto, sirve de instrumento-patrón.

3. No es casual que como cuerpo termométrico se haya elegido el hidrógeno y no otro cualquier gas. Resulta que las indicaciones del termómetro de hidrógeno son de mayor precisión que las del termómetro de gas, cuyo recipiente esté lleno de otro gas cualquiera. Dichas indicaciones son las más próximas a las que ofrecería un termómetro relleno de gas ideal.

Tabla 26.2

Gas	$\delta = \Delta p/p_{\text{Ind}}$
Oxígeno	0,00073
Hidrógeno	0,00012
Helio	0,00018

En la tabla 26.2. se aducen los errores que proporcionan los termómetros de gas al medir la temperatura del agua en ebullición. El error relativo

$$\delta = \frac{\Delta p}{p_{\text{Ind}}} = \frac{p - p_{\text{Ind}}}{p_{\text{Ind}}},$$

donde  $p_{\text{Ind}}$  son las indicaciones del termómetro de gas ideal,  $p$ , las indicaciones del termómetro de gas relleno del gas correspondiente. Vemos que estas discrepancias son muy pequeñas y constituyen centésimas de tanto por ciento. Con esto, las indicaciones del termómetro de hidrógeno son una vez y media más precisas que las del de helio y seis veces de mayor exactitud que al rellenar el recipiente con oxígeno (o aire).

## § 26.7. Temperatura absoluta y temperatura según la escala de Celsius

1. Por unidad de temperatura absoluta se toma un *Kelvin* (K), que en el SI se define como 1/273,16 parte de la temperatura termodinámica del punto triple del agua (§ 36.6). En la práctica se emplea como unidad de temperatura un *grado de Celsius* (°C). El grado de Celsius y el Kelvin son iguales:

$$1^{\circ}\text{C} = 1\text{K} = (T_{\text{eb}} - T_{\text{fus}})/100. \quad (26.13)$$

Con anterioridad, el grado Celsius era determinado como una centésima del intervalo de temperaturas entre el punto de fusión del hielo y el punto de ebullición del agua destilada a presión normal  $p_0 = 101\,325\text{ Pa}$ .

Sobre esta base, podemos determinar de forma experimental el valor de la temperatura absoluta de los puntos de fusión del hielo y ebullición del agua. En efecto, de (26.12) se desprende

$$T_{\text{eb}}/T_{\text{fus}} = p_{\text{eb}}/p_{\text{fus}}, \quad (26.14)$$

donde  $p_{\text{fus}}$  es la presión que muestra un termómetro de gas sumergido en una mezcla de agua y hielo en fusión,  $p_{\text{eb}}$ , la presión que ese mismo termómetro de gas muestra al ser sumergido en agua en ebullición. De la práctica se deduce:  $p_{\text{eb}}/p_{\text{fus}} = 1,3661$ . Poniendo este valor en (26.14) y teniendo en cuenta (26.13), obtenemos

$$\begin{aligned} T_0 &= T_{\text{fus}} = 273,15\text{ K}; \\ T_{\text{eb}} &= 373,15\text{ K}. \end{aligned} \quad (26.15)$$

Tabla 26.3

Estado de equilibrio (a $p = 101\,325\text{ Pa}$ )	Temperatura	
	K	°C
Punto de ebullición del hidrógeno	20,28	-252,87
Punto de ebullición del neón	27,102	-246,048
Punto de ebullición del oxígeno	90,188	-182,962
Punto triple del agua	273,16	0,01
Punto de ebullición del agua	373,15	100
Punto de solidificación del cinc	692,73	419,58
Punto de solidificación de la plata	1235,08	961,93
Punto de solidificación del oro	1337,58	1064,43

2. Para las mediciones prácticas de la temperatura es empleada la Escala práctica internacional de temperaturas (EPIT—68) basada en un sistema de puntos fundamentales de referencia (constantes) que se reproducen con facilidad. Algunos de ellos se han aducido en la tabla 26.3.

Según los datos de los puntos constantes puede ser graduado el termómetro de gas. La fórmula (26.12) puede ser escrita:

$$T = 373,15 h/h_{\text{eb}},$$

donde  $h$  es la altura de la columna de mercurio en el tubo manométrico del termómetro de gas a la temperatura que se mide y  $h_{\text{eb}}$ , la altura de dicha columna en el punto de ebullición del agua; esta magnitud se determina de forma experimental para cada termómetro. De esta manera se realiza la graduación del termómetro de gas, es decir, por la altura de la columna de mercurio en el tubo manométrico puede ser de inmediato calculada la temperatura absoluta.

3. Como ya hemos dicho, el grado y el kelvin son de igual dimensión. Sólo se ha desplazado el nivel de lectura de las temperaturas. La correlación entre las temperaturas en las dos escalas se muestra en la fig. 26.6. Es fácil cerciorarse, que

$$t = T - 273,15, \quad (26.16)$$

donde  $t$  es la temperatura Celsius,  $T$ , la temperatura absoluta.

Para los cálculos de una precisión del 0,055 % puede suponerse, que

$$t = T - 273.$$

### § 26.8. Cero absoluto

1. Según la escala absoluta, el nivel nulo recibe el nombre de cero absoluto. A éste corresponde una temperatura de  $-273,15^{\circ}\text{C}$  según la Escala práctica internacional de temperaturas.

El cero absoluto es la temperatura límite más baja. No hay tal experimento en el que sea posible obtener una temperatura igual al cero absoluto, siendo imposible por completo, obtener una temperatura menor que el cero absoluto.

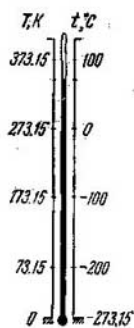


Fig. 26.6.

La obtención de bajas temperaturas, próximas al cero absoluto, ofrecen gran interés, ya que a semejantes temperaturas las propiedades de la materia varían de modo notorio. Surgen una serie de interesantes fenómenos, tales como la superfluidez del helio, superconductividad, etc. (§ 75.10). En la actualidad, mediante complicadísimos métodos, que aquí no pueden ser examinados, han sido obtenidas temperaturas mayores que el cero absoluto sólo 0,0001 K.

2. Hay que señalar que a temperaturas próximas al cero absoluto, la energía cinética media de las moléculas ya no es proporcional a la temperatura absoluta. Esto se desprende del hecho que a temperaturas cercanas al cero absoluto, comienzan a manifestarse las propiedades cuánticas de las moléculas. En particular, con la disminución de la temperatura, la energía cinética media de las moléculas no tiende a cero, como podríamos suponer de acuerdo con (26.8), sino a la energía mínima de una partícula localizada, lo que está expresado por la fórmula (16.26). El cero absoluto es la temperatura a la que corresponde la energía interna mínima del sistema.

Así, pues, a bajas temperaturas surge la *degeneración del gas*, es decir, la correlación (26.8) no es válida. La *temperatura de degeneración* puede ser apreciada de la desigualdad

$$\frac{3}{2} kT \gg \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m_0},$$

de donde se desprende

$$T_{\text{deg}} = \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{3km_0}. \quad (26.17)$$

Por ejemplo, para el helio con una concentración  $n \approx 10^{26} \text{ m}^{-3}$ , tenemos

$$T_{\text{deg}} \approx \frac{10^{-68} \cdot 10^{30/3}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 0,7 \cdot 10^{-26}} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ K}.$$

Como vemos, la temperatura de degeneración de un gas molecular es muy baja, de forma que está justificada la utilización del modelo del gas ideal clásico, aún a temperaturas muy bajas. Para el helio líquido ( $n \approx 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ) la temperatura de degeneración

$$T_{\text{deg}}^{\text{liq}} \approx 10^2 T_{\text{deg}}^{\text{gas}} \approx 0,2 \text{ K}.$$

Sin embargo, el gas electrónico en los metales resulta degenerado a cualesquiera temperaturas, incluso a muy altas

(§ 75.5) y sus propiedades difieren notablemente de las del gas ideal corriente.

3. Así, pues, a temperaturas cercanas al cero absoluto, la energía cinética media de las moléculas ya no es proporcional a la temperatura absoluta, sino que es expresada por una función mucho más complicada. Por esta razón, es de principio errónea la afirmación, con la que a veces se tropieza en la literatura de popularización científica, de que al alcanzar el cero absoluto cesa el movimiento de las moléculas. Como en la actualidad ha sido demostrado, incluso a cero absoluto el movimiento molecular no cesa, es decir, las moléculas realizan las llamadas *vibraciones nulas*, a las que corresponde la *energía nula*, es decir, la energía mínima que pueden poseer las moléculas de la sustancia dada y que no puede ser extraída del cuerpo cualquiera que sea el enfriamiento, incluso hasta el cero absoluto (§ 70.5). La presencia de vibraciones nulas se detecta por la dispersión de la luz en la materia a temperaturas próximas al cero absoluto.

Con el cero absoluto pierde su sentido la noción de gas ideal. Por esta causa, es errónea la afirmación, con la que a veces se tropieza, de que a cero absoluto la presión de un gas ideal es igual a cero. Semejante extrapolación de la fórmula (26.10) no es válida y sólo tiene sentido a temperaturas lejanas del cero absoluto y, precisamente, a temperaturas mucho mayores que la temperatura de degeneración.

### § 26.9. Constantes de Avogadro y Boltzmann

1. De la expresión (26.10) podemos obtener una serie de interesantes corolarios. Ante todo se desprende que a iguales condiciones (o sea, a las mismas presiones y temperaturas) la concentración de las moléculas es igual en diferentes gases. Con otras palabras, *la unidad de volumen de distintos gases a condiciones iguales, contiene un número igual de moléculas (ley de Avogadro)*.

Para calcular la concentración de las moléculas hay que conocer la constante de Boltzmann. Existen una serie de métodos para medir dicha magnitud (véase, por ejemplo, el § 28.12). En la actualidad ha sido medida con una precisión hasta del 0,0032%.

$$k = (1,380622 \pm 0,000044) \cdot 10^{-23} \text{ J/K.}$$

Conociendo la constante de Boltzmann, podemos calcular el número de moléculas en  $1 \text{ m}^3$  de gas a condiciones normales ( $T_0 = 273,15 \text{ K}$ ,  $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$ ):

$$N_L = n_0 = \frac{p_0}{kT_0} = \frac{101325}{1,38062 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} = 2,68675 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

Esta magnitud denominase *constante de Loschmidt*.

2. Conociendo la densidad del gas a condiciones normales, podemos calcular la masa de una de sus moléculas, teniendo en cuenta que la densidad es el producto de la masa de una molécula por la concentración de éstas. Así, pues,

$$m_0 = \frac{\rho_0}{n_0} = \frac{\rho_0}{2,687 \cdot 10^{25}}.$$

Así, la densidad del hidrógeno a condiciones normales  $\rho_0 = 0,0899 \text{ kg/m}^3$ , del oxígeno  $1,4291 \text{ kg/m}^3$ , del helio  $0,1785 \text{ kg/m}^3$ . Entonces la masa de una molécula de hidrógeno es igual  $3,345 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , de oxígeno  $53,145 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  y la masa de un átomo de helio  $6,643 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

3. Por resolución de la XIV Conferencia general de medidas y pesos, que se celebró en octubre de 1971 en París, en el SI de unidades fue introducida una magnitud fundamental más: *cantidad de materia*. Por cantidad de materia se debe entender el número de elementos estructurales específicos (moléculas, átomos, iones, etc.) de los que consta la materia.

Como las masas de los elementos estructurales por separado (por ejemplo, las moléculas) se diferencian entre sí, iguales cantidades de materia tienen distinta masa. Por ejemplo,  $10^{25}$  moléculas de hidrógeno y  $10^{25}$  moléculas de oxígeno se consideran iguales cantidades de materia, aunque tienen diferentes masas que son iguales a 33,45 y 531,45 g, respectivamente. De esta manera, la resolución de XIV Conferencia General aclara por completo la cuestión acerca de que *la masa no es la medida de cantidad de materia*.

Fue establecido que la unidad de cantidad de materia es *el mol* (mol), es decir, la cantidad de materia de un sistema que contiene tantos elementos estructurales específicos (moléculas, átomos, iones, etc.), como átomos hay en una masa de 0,012 kg del isótopo de carbono  $^{12}\text{C}$  (§ 80.1).

Además del mol, se permite el uso de las unidades múltiples y fraccionarias de éste, en particular *el kilomol*:  $1 \text{ kmol} =$



$= 10^3$  mol. Más adelante haremos los cálculos, principalmente, para 1 kmol.

4. El número de elementos estructurales, que contiene un mol (o kilomol) de materia denomínase *constante de Avogadro*:

$$N_A = (6,022045 \pm 0,000031) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = \\ = 6,022045 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}.$$

Conociendo las constantes de Avogadro y de Loschmidt, podemos hallar el volumen de un mol (*volumen molar*) a condiciones normales:

$$V_m = N_A/N_L = 22,41383 \pm 0,00070 \text{ m}^3/\text{kmol}.$$

Aquí y más adelante, el índice "m" por abajo significa que la magnitud dada está calculada para un mol o kilomol.

La masa de un mol (*masa molar*)

$$M = \rho_0 V_m = m_0 N_A,$$

donde  $\rho_0$  es la densidad de la materia a condiciones normales,  $m_0$ , la masa de la unidad estructural (molécula, átomo, ion, etc.).

Se introducen dos magnitudes adimensionales más: *la masa atómica relativa del elemento  $A_r$*  y *la masa molecular relativa de la materia  $M_r$* , que se definen como la razón entre la masa media del átomo (o molécula) de una mezcla natural de los isótopos de la materia y  $1/12$  de la masa del átomo del isótopo  $^{12}\text{C}$  (§ 80.1):

$$M_r = \frac{m_0}{1,6603 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}.$$

Notemos, que la masa molecular relativa es numéricamente igual a la masa de un kilomol.

5. El producto de la constante de Avogadro por la constante de Boltzmann recibe el nombre de *constante de los gases molar o universal*:

$$R = N_A k = (8,31441 \pm 0,00026) \cdot 10^3 \text{ J}/(\text{kmol} \cdot \text{K}).$$

Por medio de esta magnitud, la ecuación de estado de los gases (26.10) se transforma del modo siguiente:

$$p = nkT = \frac{n}{N_A} N_A kT = \frac{nm_0}{N_A m_0} RT = \frac{\rho RT}{M}.$$

Así, pues, la ecuación de estado de los gases toma el aspecto

$$p = \frac{\rho RT}{M}. \quad (26.18)$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por el volumen del gas y teniendo en cuenta que  $m = \rho V$  es la masa del gas, obtenemos la ecuación de Clapeyron—Mendeléiev:

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (26.19)$$

### § 26.10. Distribución de las moléculas en un campo de fuerzas

1. Supongamos que un gas, ubicado en cierto recipiente, se halla en un campo de fuerzas, por ejemplo, en el campo gravitatorio (fig. 26.7). Aclaremos cómo influye la presencia de la fuerza de gravedad en el carácter de la distribución de las moléculas del gas.

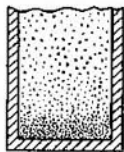


Fig. 26.7.

Si el campo de la fuerza de gravedad no existiera, con el tiempo, las moléculas se distribuirían en el recipiente de forma absolutamente uniforme. La concentración de las moléculas  $n$  sería igual en todos los puntos y, por consiguiente, la densidad del gas  $\rho = m_0 n$  y la presión  $p = knT$  también serían iguales en todos los puntos del espacio.

Por lo contrario, si actuara sólo el campo de la fuerza de gravedad, pero no hubiera movimiento térmico de las moléculas, éstas se encontrarían presionadas por las fuerzas de gravedad al fondo (inferior) del recipiente, con otras palabras, hallaríanse en el estado con la energía potencial mínima. Esto es el corolario de una ley general: todo sistema de partículas siempre llega al estado con la energía potencial mínima.

2. Vemos que el movimiento térmico de las moléculas tiende a lanzarlas de la forma más caótica de manera que ellas, en la medida de lo posible, del modo más uniforme rellenen todo el espacio que para ellas es accesible. Y a la inversa, el campo de fuerzas tiende, en lo posible, a ordenar la distribución de las moléculas, de manera que éstas ocupen el nivel con el valor mínimo de la energía potencial.

A causa de la acción de estos dos factores las moléculas del gas se distribuyen por todo el recipiente, pero su concentración en diferentes puntos es distinta: la mayor concentración de moléculas será allí, donde su energía potencial es la mínima; la concentración más pequeña de las moléculas se observará en aquellos sectores donde la energía potencial es grande.

3. Como ejemplo podemos examinar el carácter de la variación de la concentración de las moléculas en la atmósfera de la Tierra (y otros planetas). Como nos muestra la experiencia, a medida que nos elevamos sobre la superficie terrestre, la presión atmosférica y la densidad del aire disminuyen (tabla 26.4).

Tabla 26.4

Altitud sobre el nivel del mar, m	Presión, Pa	Densidad, kg/m <sup>3</sup>	Temperatura, °C	Altitud sobre el nivel del mar, m	Presión, Pa	Densidad, kg/m <sup>3</sup>	Temperatura, °C
0	101 325	1,2250	15,0	8 000	35 000	0,52717	-37,0
1000	86 874	1,1117	8,5	10 000	26 436	0,41271	-50,0
2000	79 495	1,0065	2,0	12 000	19 330	0,31083	-56,5
3000	70 108	0,90913	-4,5	14 000	14 102	0,22675	-56,5
4000	61 640	0,81914	-11,0	16 000	10 287	0,16542	-56,5
5000	54 020	0,73612	-17,5	18 000	7504,8	0,12068	-56,5
6000	47 181	0,65970	-24,0	20 000	5474,9	0,08804	-56,5
7000	41 061	0,58950	-30,0				

Señalemos que al investigar la atmósfera hay que introducir una corrección a la variación de la temperatura del gas con la altura, lo que complica en cierto grado los cálculos.

## § 26.11. Distribución barométrica

1. Deduzcamos la expresión de la ley de distribución de las moléculas en el campo de fuerzas. Para simplificar los razonamientos, consideraremos la temperatura del gas constante en todos los puntos.

Para el cálculo introduzcamos el concepto de *probabilidad* de que las moléculas se hallen en el punto dado del campo de fuerzas, donde la energía potencial de la molécula es igual a  $U$ . La probabilidad  $w$  es igual a la razón entre la concentración de las moléculas en el punto dado del campo  $n$  y la concen-

tración de las moléculas  $n_0$  en el punto del campo donde la energía potencial es igual a cero:

$$w = n/n_0. \quad (26.20)$$

2. El análisis del carácter del influjo del campo de fuerzas y del movimiento térmico de las moléculas, realizado en el párrafo anterior, muestra que la probabilidad de que la molécula se halle en el punto dado del recipiente, depende de su energía potencial en dicho punto y de la temperatura del gas. Mientras mayor sea la energía potencial  $U$  menor será la probabilidad de que la molécula se halle en dicho punto. Cuanto más alta sea la temperatura, más probable será que las moléculas se distribuyan más uniformemente, es decir, mayor será la probabilidad de hallar la molécula en el punto dado del recipiente.

Introduzcamos una variable auxiliar  $x$ , igual a la razón entre la energía potencial de la molécula  $U$  y la energía media de su movimiento térmico  $\varepsilon \approx kT$ , es decir,  $x = U/kT$ . Resulta, que la probabilidad de hallar la molécula con la energía dada es cierta función de dicha variable:

$$w = f(x). \quad (26.21)$$

La energía potencial de la molécula a cierta altura  $h = h_1 + h_2$  es igual a la suma de las energías:  $U = U_1 + U_2$ . La variable  $x = \frac{U}{kT} = \frac{U_1}{kT} + \frac{U_2}{kT} = x_1 + x_2$ . La probabilidad  $f(x) = f(x_1 + x_2)$ . Como se demuestra en la teoría de las probabilidades, la probabilidad de un acontecimiento complicado, compuesto de dos eventos independientes, es igual al producto de las probabilidades de cada uno de los eventos por separado:  $w = w_1 w_2$ , o bien

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2). \quad (26.22)$$

Se puede mostrar que la única función que satisface esta ecuación es la función exponencial de la forma

$$f(x) = a^{-\alpha x}. \quad (26.23)$$

Hagamos uso, para la comprobación, de una propiedad de la función exponencial: al multiplicar los exponentes con iguales bases, los exponentes se suman, es decir

$$a^{-\alpha(x_1+x_2)} = a^{-\alpha x_1} \cdot a^{-\alpha x_2}. \quad (26.24)$$

La base  $a > 1$  puede ser elegida al azar. Esto sólo se reflejará en el valor numérico del coeficiente  $\alpha$ . Por regla, se elige la base de los logaritmos naturales, el número irracional  $e = 2,71828\dots$  Para  $a = e$  el coeficiente  $\alpha = 1$ .

3. Así, pues, la probabilidad de hallar la molécula en el punto del campo donde su energía potencial es igual a  $U$ , se expresará

$$w = e^{-\frac{U}{kT}}. \quad (26.25)$$

El signo menos en el exponente aparece por las siguientes consideraciones. Como ya hemos indicado, mientras mayor sea la energía potencial de la molécula en el punto dado, menor será la probabilidad de que dicha molécula se encuentre allí. Por lo tanto, la probabilidad que buscamos es una función decreciente. Con la base  $a > 1$ , la función exponencial decrece si su exponente es un número negativo.

4. Comparando (26.20) y (26.25), obtenemos la expresión para la concentración de las moléculas:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}. \quad (26.26)$$

Correspondientemente, obtenemos para la densidad del gas

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{U}{kT}} \quad (26.27)$$

y para la presión

$$p = p_0 e^{-\frac{U}{kT}}. \quad (26.28)$$

5. Si examinamos la distribución de las moléculas en el campo gravitacional de la Tierra (o de otro planeta), para  $h \ll R$ , donde  $R$  es el radio del planeta, podemos suponer que de acuerdo con (18.21),  $U = m_0gh$ , donde  $m_0$  es la masa de la molécula,  $g$ , la aceleración de caída libre y  $h$ , la altura sobre la superficie del planeta. Para la presión obtendremos la expresión

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0gh}{kT}}. \quad (26.29)$$

La gráfica de esta dependencia nos la ofrece la fig. 26.8. Recibe el nombre de *distribución barométrica*. Este resultado concuerda bien con los datos del experimento en la atmósfera terrestre.

Con la distribución barométrica se explica, precisamente, la carencia de atmósfera en la Luna y el extremo grado de enrarecimiento en la de Marte. A causa de la pequeña masa de dichos cuerpos celestes, éstos tienen un campo gravitacional relativamente débil: en la Luna la fuerza de la gravedad es 6 veces menor que en la Tierra, en Marte, 2,6 veces.

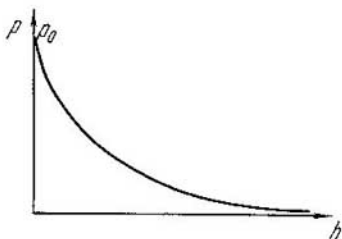


Fig. 26.8.

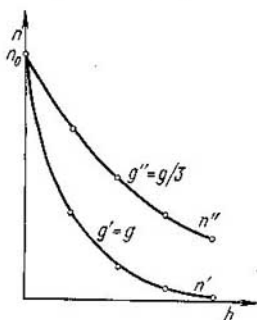


Fig. 26.9.

Pero como se desprende de (26.29), para  $g$  pequeña crece bruscamente la probabilidad de que las moléculas se encuentren a grandes alturas (fig. 26.9), donde el campo gravitacional es mucho más débil que junto a la superficie del planeta. La velocidad de las moléculas puede resultar aquí igual a la segunda cósmica y el gas se disemina por el espacio sideral.

### Capítulo 27

## GAS IDEAL Y PRIMER PRINCIPIO DE TERMODINÁMICA

### § 27.1. Energía interna de un gas ideal monoatómico

1. El gas ideal monoatómico es el sistema termodinámico más sencillo, por lo que su energía interna puede ser calculada con facilidad.

Recordemos que examinamos las moléculas de un gas ideal monoatómico como puntos materiales, entre las que la interacción es tan pequeña que podemos despreciarla. La carencia de fuerzas de interacción significa que la energía potencial de interacción molecular es constante (§ 19.5). La suma de las energías en reposo de las propias moléculas también es constante, ya que durante los procesos térmicos, las propias moléculas no varían. Haciendo en (20.2)  $\mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} = \text{const}$ , obtenemos que la energía interna de un gas ideal monoatómico es la suma de las energías cinéticas del movimiento de traslación de las moléculas más cierta magnitud constante.

En termodinámica ha sido adoptado designar la energía interna con el símbolo  $U$  y no con  $\mathcal{E}_0$ , como lo hacíamos en el cap. 20. Así, pues,

$$U = K_1 + K_2 + \dots + K_N + \text{const}, \quad (27.1)$$

donde  $K_1, K_2, \dots, K_N$  son las energías cinéticas del movimiento de traslación de moléculas aisladas. Tomando en consideración que la energía cinética media de una molécula  $\bar{\varepsilon}_k = (K_1 + K_2 + \dots + K_N)/N$ , y que de acuerdo con (26.8)  $\varepsilon_k = 3/2 kT$ , obtenemos

$$U = N\bar{\varepsilon}_k + \text{const} = \frac{3}{2} NkT + \text{const}, \quad (27.2)$$

donde  $N$  es el número total de moléculas en el gas. El sumando constante en la expresión (27.2) con frecuencia se omite, ya que en los cálculos posteriores no desempeña papel alguno.

2. De (27.2) sigue que la energía interna de un gas ideal se define plenamente por su temperatura absoluta. Dicha energía no depende del proceso, mediante el cual alcanzó el estado con semejante temperatura.

Del mismo modo, la variación de la energía interna de un gas ideal al pasar del estado a la temperatura  $T_1$  al estado a la temperatura  $T_2$ , también se define sólo por los estados inicial y final, pero no depende del carácter del proceso con el que el gas pasa del primer estado al segundo:

$$U_2 - U_1 = \frac{3}{2} Nk(T_2 - T_1). \quad (27.3)$$

## § 27.2. Trabajo al dilatarse un gas ideal

1. Sea que un gas ideal rellena cierto cilindro, cerrado con un émbolo móvil (fig. 27.1). Al desplazarse el émbolo a una distancia infinitamente pequeña  $\Delta x$ , se realiza el trabajo elemental  $\Delta A = F\Delta x$ . De la definición de la presión sigue:  $F = pS$ ; como  $S\Delta x = \Delta V$  es la variación infinitésima del volumen del gas, el trabajo elemental

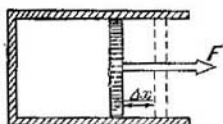


Fig. 27.1.

$$\Delta A = p \Delta V. \quad (27.4)$$

Durante su expansión, el gas realiza trabajo *positivo* contra las fuerzas externas ( $\Delta V > 0$ ). Y a la inversa, al comprimirse, el trabajo del gas es *negativo*, ya que  $\Delta V < 0$ ; este

es realizado por las fuerzas externas que comprimen el gas.

2. El trabajo que se realiza al variar el volumen de un gas en la magnitud finita  $V_2 - V_1$ , se halla de acuerdo con la regla general para calcular el trabajo de una fuerza variable (§ 18.1):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} F dx = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (27.5)$$

El trabajo se representa gráficamente por el área de un trapecio curvilíneo, limitado por abajo con el eje de abscisas,

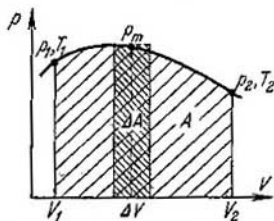


Fig. 27.2.

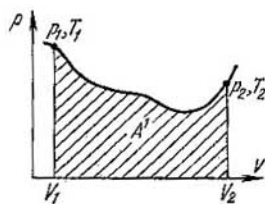


Fig. 27.3.

por arriba, con la gráfica de la presión y, por la izquierda y la derecha, con las ordenadas extremas (fig. 27.2).

3. Hay que prestar atención al hecho, de que el trabajo que se realiza al variar el volumen del gas, no sólo se deter-



mina por los estados inicial ( $p_1V_1T_1$ ) y final ( $p_2V_2T_2$ ) de este, sino que también por el carácter de proceso, con el que el gas pasa del estado inicial a final. Para demostrarlo vamos a comparar las figs. 27.2 y 27.3. En ellas, los estados inicial y final del gas son iguales, pero a pesar de esto el trabajo  $A'$  y  $A$  no son iguales:  $A' < A$ , ya que en los dos procesos divergen los estados intermedios.

Esto quiere decir, que la fuerza de presión del gas no es conservativa y no se puede considerar el trabajo de dicha fuerza como la diferencia de las energías potenciales (§ 18.6).

### § 27.3. Primer principio de termodinámica y capacidad calorífica de un gas

1. La variación de la energía total de un gas inmóvil se reduce al cambio de su energía interna:  $\Delta\mathcal{E} = \Delta U = U_2 - U_1$ . Poniendo esta igualdad en (21.9), obtenemos

$$Q = U_2 - U_1 + A. \quad (27.6)$$

Para un gas monoatómico, tomando en consideración (27.3), esta expresión adquiere el siguiente aspecto para el primer principio de termodinámica

$$Q = \frac{3}{2} Nk(T_2 - T_1) + A. \quad (27.7)$$

2. La cantidad de calor que recibe el gas, consta de dos sumandos. Uno de ellos, o sea, la variación de la energía interna, sólo se determina por los estados inicial y final del sistema y no depende del carácter del proceso que lo hace pasar del estado inicial al final; el segundo sumando, es decir, el trabajo, es función del carácter del proceso que transcurre en el gas. Es natural, que también la cantidad de calor no sólo depende de los estados inicial y final, sino que, además, del carácter de proceso que examinamos.

Así, pues, la cantidad de calor y el trabajo no son características cuantitativas del estado del sistema, sino que del proceso que con éste se realiza. Del mismo modo que no podemos hablar de la "reserva de trabajo" en el sistema, no lo podemos hacer sobre la "reserva de calor". La cantidad de calor y el trabajo son características cuantitativas de dos diferentes formas de variación de la energía del sistema y no ciertos tipos especiales de energía. Precisamente por

esta causa no tiene sentido físico el término "energía térmica" con el que, frecuentemente, se tropieza en la literatura.

3. Recibe el nombre de *calor específico* la razón entre la cantidad de calor, recibida por el sistema y su masa y la variación de su temperatura:

$$c = \frac{Q}{m(T_2 - T_1)}, \quad (27.8)$$

donde  $m$  es la masa del sistema,  $T_1$ , la temperatura inicial y  $T_2$ , la final.

En el SI sirve de unidad de calor específico un  $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ .

Es lógico, que la capacidad calorífica, lo mismo que la cantidad de calor, no sólo depende de los estados inicial y final del sistema, sino que también del proceso, con ayuda del cual dicho sistema pasa del estado inicial al final. Por esta razón, al indicar el valor de la capacidad calorífica, es necesario indicar el carácter del proceso, con el que fue obtenido dicho valor (es decir, medido o calculado).

Más adelante serán calculadas las capacidades caloríficas de los gases ideales con ciertos procesos.

#### § 27.4. Transformación isócara

1. Denomínase *isócara* la transformación que transcurre con volumen constante del gas. De la ecuación de estado de un gas (26.11), para  $V = \text{const}$ , se desprende que *con la transformación isócara, la presión de un gas ideal es razón directa de su temperatura absoluta (ley de Charles)*:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (27.9)$$

2. Es evidente, que con la transformación isócara el gas no efectúa trabajo, ya que para  $\Delta V = 0$  el trabajo  $A = 0$ . De aquí se deduce que *durante la transformación isócara la cantidad de calor, recibida por el gas, se dirige por completo a la variación de su energía interna*. De acuerdo con (27.7), obtenemos

$$Q_V = U_2 - U_1 = \frac{3}{2} Nk(T_2 - T_1). \quad (27.10)$$

En esta igualdad hemos hecho uso de las designaciones aceptadas en termodinámica: si un parámetro queda invariable en la transformación dada, éste sirve de índice para

la magnitud que nos interesa. Por ejemplo, la designación  $Q_V$  se lee del siguiente modo: cantidad de calor que recibe el sistema con volumen constante;  $c_V$ , calor específico con volumen constante (capacidad calorífica isócara), etc.

3. El calor específico isócara se define de acuerdo con (27.8) y (27.10):

$$c_V = \frac{Q_V}{m(T_2 - T_1)} = \frac{3}{2} \frac{Nk}{m} = \frac{3}{2} \frac{k}{m_0}, \quad (27.11)$$

ya que el cociente de la división de la masa del gas  $m$  entre el número de moléculas  $N$  nos da la masa de una molécula:  $m_0 = m/N$ .

Empleando la expresión (27.11), podemos calcular el calor específico de cualquier gas monoatómico, es decir, de tal gas cuya molécula consta de un sólo átomo. Entre ellos se encuentran los gases inertes (helio, neón, argón, etc.), los vapores de metales, etc.

4. En vez del calor específico, en muchos casos es más cómodo hacer uso de la capacidad calorífica molar  $C_m$ :

$$C_{mV} = M c_V, \quad (27.12)$$

donde  $M$  es la masa molar del gas. La masa de un kilomol es igual al producto de la masa de una molécula por el número de moléculas en el kilomol, es decir, por la constante de Avogadro:

$$M = m_0 N_A \quad (27.13)$$

Si sustituimos en (27.12) los valores de  $c_V$  y  $M$  de (27.11) y (27.13), obtendremos

$$C_{mV} = \frac{3}{2} N_A k = \frac{3}{2} R. \quad (27.14)$$

El valor de la capacidad calorífica molar de los gases monoatómicos obtenido de (27.14) coincide con perfección con los datos experimentales en una amplia gama de temperaturas.

## § 27.5. Transformación isobárica

1. Recibe el nombre de *isobárica* la transformación que transcurre a presión constante. De la ecuación de estado de un gas (26.11), siendo  $p = \text{const}$ , se deduce que *durante la transformación isobárica el volumen de un gas ideal es razón*

directa de su temperatura absoluta (ley de Gay-Lussac):

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (27.15)$$

2. De forma absolutamente elemental se calcula el trabajo durante la dilatación isobárica de un gas. En efecto, como  $p = \text{const}$

$$A_p = p (V_2 - V_1), \quad (27.16)$$

donde  $V_1$  es el volumen inicial y  $V_2$ , final. En la gráfica este trabajo se expresa por el área de un rectángulo.

También puede expresarse este trabajo mediante la variación de la temperatura del gas. Haciendo uso de (26.11), tenemos

$$pV_2 = NkT_2, \quad pV_1 = NkT_1,$$

por consiguiente,

$$A_p = Nk (T_2 - T_1). \quad (27.17)$$

3. La cantidad de calor que recibe un gas ideal tanto se emplea para el aumento de la energía interna del gas, como para el trabajo de expansión. De acuerdo con (27.7), para un gas monoatómico, tenemos

$$\begin{aligned} Q_p = U_2 - U_1 + A_p &= \frac{3}{2} Nk (T_2 - T_1) + Nk (T_2 - T_1) = \\ &= \frac{5}{2} Nk (T_2 - T_1). \end{aligned} \quad (27.18)$$

Vemos que para el calentamiento isobárico de un gas es precisa mayor cantidad de calor que para su calentamiento isócoro en el mismo intervalo de temperaturas. Esto es natural, ya que la energía interna del gas en los dos casos varía en una misma magnitud, pero con la transformación isobárica el gas realiza, además, trabajo de expansión, mientras que con la transformación isócora no se efectúa trabajo.

4. Está claro, que la capacidad calorífica isobárica es mayor que la isócora; para un gas monoatómico

$$c_p = \frac{Q_p}{m(T_2 - T_1)} = \frac{5}{2} \frac{k}{m_0}, \quad (27.19)$$

mientras que  $c_v = \frac{3}{2} \frac{k}{m_0}$  (véase (27.11)). Por lo tanto, la capacidad calorífica molar isobárica de semejante gas

$$C_{mp} = \frac{5}{2}R = \frac{3}{2}R + R = C_{mv} + R. \quad (27.20)$$

5. La razón entre el calor específico isobárico e isócoro denomínase *coeficiente de Poisson*:

$$\gamma = c_p/c_v. \quad (27.21)$$

Comparando (27.11) y (27.19), obtendremos un importante resultado: para todos los gases monoatómicos el coeficiente de Poisson tiene el mismo valor,

$$\gamma = 5/3 = 1,67. \quad (27.22)$$

Un experimento realizado en una amplia gama de temperaturas, en el cual el gas monoatómico puede considerarse perfecto, ha confirmado brillantemente el resultado de estos cálculos.

### § 27.6. Transformación isotérmica

1. Como ya dijimos en el § 26.1, llámase isotérmica una transformación que transcurre a temperatura invariable del gas. En dicho párrafo fue también mostrado que la correlación entre la presión y el volumen de un gas con la transformación isotérmica es expresada por la ley de Boyle—Mariotte (26.4) y confeccionadas las gráficas de la isoterma en los ejes  $p - V$  y  $p - \rho$ .

El trabajo que se realiza con la transformación isotérmica representase por el área de un trapecio curvilíneo, es decir, con una integral (§ 27.2).

Recomendamos que el lector efectúe el cálculo por su cuenta. Los resultados obtenidos pueden ser comprobados por la fórmula, que aducimos sin su demostración:

$$A_T = 2,3p_1V_1 \lg(V_2/V_1) = 2,3NkT \lg(V_2/V_1).$$

2. Durante la transformación isotérmica, la energía interna del gas no varía, lo que sigue en directo de (27.3), ya que  $T_2 = T_1 = T$ . De aquí, en ciertas ocasiones, llegan a una conclusión errónea: ya que con la transformación que tratamos la temperatura no varía, parece como si al gas no fuera necesario comunicarle calor. ¡Falso razonamiento! Del primer principio de termodinámica (27.6) se desprende:

$$Q_T = A_T, \quad (27.23)$$

es decir, *durante la transformación isotérmica hay que transmitir al gas una cantidad de calor, exactamente igual al trabajo que el gas realiza.*

3. Como con la transformación isotérmica al gas se le comunica calor, quedando con ello su temperatura invariable, el concepto de capacidad calorífica isotérmica, no tiene sentido: en el denominador de la fracción (27.8) hay que poner  $T_2 - T_1 = 0$ . Como sabemos, al dividir por cero, el cociente es infinito.

Si, por lo contrario, la transformación es casi isotérmica, es decir, transcurre a temperatura casi invariable, el calor específico del gas se expresa por un número muy grande, puesto que si el denominador de la fracción tiende a cero, la propia fracción crece ilimitadamente. Precisamente en este sentido, suele decirse que con la transformación isotérmica el calor específico del gas es infinitamente grande.

### § 27.7. Transformación adiabática

1. Ya hemos dicho en el § 21.5 que recibe el nombre de adiabática la transformación que transcurre en un sistema cuando entre éste y el medio ambiente no hay intercambio de calor. De acuerdo con esta definición  $\Delta Q_{ad} = 0$ . De aquí se deduce (véase (27.8)) que el calor específico adiabático del gas es igual a cero  $c_{ad} = 0$ .

Para que una transformación que transcurre en el gas pueda ser considerada adiabática, el gas debe estar térmicamente aislado, es decir, introducido en una cubierta adiabática (del tipo de la vasija de Dewar). No obstante, hay otra posibilidad: la transformación puede realizarse con tal rapidez, que no se produzca el intercambio de calor entre el gas y el medio ambiente. Esto es posible, ya que la transmisión de calor se produce con mucha mayor lentitud que la compresión o expansión del gas.

2. Durante la expansión adiabática, el gas realiza trabajo a cuenta de la disminución de su energía interna (ya que no hay intercambio de calor con el medio ambiente). En correspondencia, durante la transformación adiabática, la compresión del gas su energía interna crece a causa de la acción de las fuerzas exteriores. Pero como la energía de un gas ideal se determina completamente por su temperatura, queda claro que *durante la compresión adiabática de un gas ideal su temperatura crece, mientras que durante la expansión, decrece.*

Este fenómeno utilízase con amplitud en la práctica. Por ejemplo, si abrimos el grifo de una bombona que contenga

dióxido de carbono (a una presión de no más de 4 MPa), la expansión de éste será adiabática. Con esto, su temperatura descende hasta  $-80^{\circ}\text{C}$  y parte del gas se transformará en una masa cristalina que se parece a la nieve. Si esta masa se prensa, obtenemos el "hielo seco".

En los motores de combustión interna tipo "Diesel", durante la rápida compresión adiabática del aire su temperatura asciende hasta  $500-600^{\circ}\text{C}$ , lo que produce la autoinflamación del combustible líquido que es inyectado al cilindro al final de la compresión.

3. Como la transformación adiabática transcurre sin transmisión de calor con el medio ambiente, para calcular el trabajo hay que hacer  $Q_{\text{ad}}=0$  en la expresión (27.6). De acuerdo con (27.7) para un gas monoatómico, obtendremos

$$A_{\text{ad}} = \frac{3}{2}Nk(T_1 - T_2), \quad (27.24)$$

donde  $T_1$  es la temperatura al comenzar la transformación y  $T_2$ , la temperatura al final de ésta. Aplicando la ecuación de estado de un gas (26.11), tendremos

$$A_{\text{ad}} = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1} = \frac{3}{2}(p_1V_1 - p_2V_2), \quad (27.25)$$

ya que de acuerdo con (27.22)

$$\gamma - 1 = 5/3 - 1 = 2/3.$$

4. Aclaremos como varía la presión de un gas ideal durante el cambio adiabático de su volumen y confeccionemos la gráfica de la adiabática en los ejes  $p - V$  (fig. 27.4).

Sea que el estado del gas esté caracterizado por el volumen  $V_0$ , la presión  $p_0$  y la temperatura  $T_0$ . Hagamos que el gas se dilate, hasta el volumen  $V_1$ . Si la expansión es isotérmica, la presión  $p_1^{\text{isot}} = p_0V_0/V_1$ . Por lo contrario, si la expansión se lleva a cabo adiabáticamente, la presión disminuirá de forma más brusca, ya que durante la transformación adiabática no sólo crece el volumen, sino que también la temperatura descende. De la ecuación de estado de un

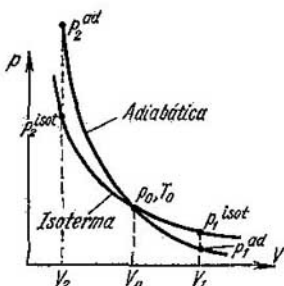


Fig. 27.4.

gas  $p_0V_0/T_0 = p_1V_1/T_1$ , obtenemos

$$p_1^{\text{ad}} = \frac{p_0V_0}{V_1} \frac{T_1}{T_0} = p_1^{\text{isot}} \frac{T_1}{T_0}.$$

Pero como durante la expansión adiabática  $T_1 < T_0$ , entonces  $p_1^{\text{ad}} < p_1^{\text{isot}}$ . Por esta causa, la gráfica de la adiabática en esta región está trazada en la fig. 27.4 por debajo de la gráfica de la isoterma.

Si el lector realiza razonamientos análogos para el caso, cuando el gas se comprime del estado con parámetros  $p_0$ ,

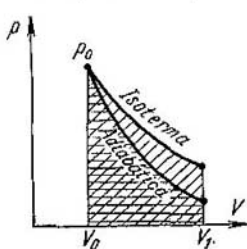


Fig. 27.5.

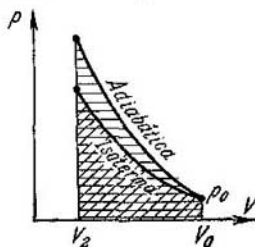


Fig. 27.6.

$V_0, T_0$  al estado  $p_2, V_2, T_2$ , podrá cerciorarse de que entonces, gracias a la elevación de la temperatura  $p_2^{\text{ad}} > p_2^{\text{isot}}$  y, por lo tanto, la gráfica de la adiabática pasará sobre la gráfica de la isoterma.

En la fig. 27.5 vemos que con la expansión adiabática, el gas realiza un trabajo menor que con la dilatación isotérmica. Durante la compresión adiabática, por lo contrario, las fuerzas externas realizan un trabajo mayor que con la isotérmica (fig. 27.6).

5. La ligazón entre la presión y el volumen de un gas ideal durante la transformación adiabática se expresa con la ecuación de Poisson, que aducimos sin demostración

$$p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma. \quad (27.26)$$

## § 27.8. Capacidad calorífica de un gas biatómico

1. La experiencia muestra que la capacidad calorífica de los gases biatómicos (hidrógeno, oxígeno, nitrógeno, etc.), así como de los gases multiatómicos (dióxido de carbono,



metano, etc.) es mucho mayor que la de los gases monoatómicos. Además, las capacidades caloríficas de dichos gases son diferentes a diversas temperaturas, mientras que las de los gases monoatómicos no dependen de la temperatura. Ya que no tenemos la posibilidad de exponer en el presente manual la teoría de las capacidades caloríficas de los gases multiatómicos, con el ejemplo del hidrógeno y el oxígeno aclararemos el carácter de la dependencia entre la capacidad calorífica de los gases biatómicos y la temperatura y, a continuación, enumeraremos las ideas fundamentales de la teoría cuántica de este fenómeno.

2. El punto de ebullición del hidrógeno a presión normal, es igual a 20,45 K. Es evidente, que cerca de dicha temperatura el hidrógeno no puede ser considerado gas ideal. Sin embargo, a temperaturas más altas, desde, aproximadamente, 30 K, este gas, a presión normal, se comporta ya como un gas ideal.

En una gama de temperaturas del orden de 30 . . . 80 K, la capacidad calorífica del hidrógeno no se diferencia de la de un gas monoatómico. Al aumentar la temperatura, la capacidad calorífica de modo uniforme crece, mientras que el coeficiente de Poisson disminuye. Los correspondientes datos se dan en la tabla 27.1.

Tabla 27.1

$T, K$	$\gamma$	$\frac{C_{mP}}{R}$	$\frac{C_{mV}}{R}$	$\frac{C_{mP} - C_{mV}}{R}$
50	1,66	2,51	1,51	1,00
100	1,57	2,76	1,76	1,00
273	1,41	3,46	2,46	1,00
773	1,39	3,56	2,56	1,00
1273	1,36	3,76	2,77	0,99

3. El punto de ebullición del oxígeno a presión normal es igual a 90,25 K. A partir de la temperatura de un orden de 100 K, el oxígeno, a presión normal, compórtase como un gas ideal, cuya capacidad calorífica molar isobárica es igual, aproximadamente, a  $C_{mP} \approx 7/2R$ , y el coeficiente de Poisson  $\gamma \approx 1,4$ . Al crecer la temperatura, la capacidad calorífica aumenta (tabla 27.2).

Tabla 27.2

$T, K$	$\gamma$	$\frac{C_{mP}}{R}$	$\frac{C_{mV}}{R}$	$\frac{C_{mP} - C_{mV}}{R}$
150	1,40	3,50	2,50	1,00
273	1,39	3,53	2,53	1,00
773	1,33	4,04	3,05	0,99
1273	1,29	4,32	3,34	0,98

En la fig. 27.7 esta representada la dependencia entre las capacidades caloríficas isócoras del hidrógeno y oxígeno y la temperatura. Para su comparación, también se muestra la capacidad calorífica de un gas monoatómico.

4. Como para un gas monoatómico, la capacidad calorífica isócora caracteriza la cantidad de calor, dirigida a la

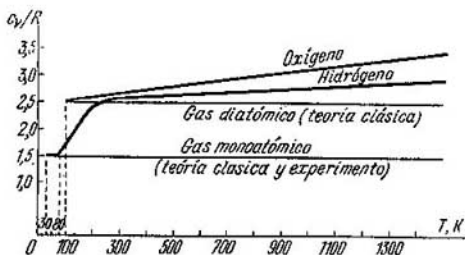


Fig. 27.7.

variación de la energía interna del gas. Pero a una misma temperatura, las energías cinéticas medias del movimiento de traslación de las moléculas mono y multiatómicas, coinciden. Por consiguiente, la energía interna de los gases multiatómicos es la suma de las energías no sólo del movimiento de traslación de las moléculas, sino que también de otros tipos de movimiento: la rotación de las moléculas y las oscilaciones de los átomos en el interior de aquellas.

En la teoría molecular clásica se suponía que la molécula de un gas biatómico era de por sí un sistema rígido, compuesto por dos bolitas, entre las que la distancia es invariable

(algo así como una pesa, para ejercicios gimnásticos). La molécula puede estar en movimiento de avance a lo largo de tres ejes arbitrarios de coordenadas y girar alrededor de dos de ellos, por ejemplo,  $Oy$  y  $Oz$  (fig. 27.8). El giro alrededor del eje  $Ox$  no introduce aportación alguna en la energía de la molécula, a causa del pequeño valor del momento de inercia de ésta respecto de dicho eje. Por lo tanto, la energía de la molécula se compone de la energía cinética de tres movimientos de avance y la de dos rotaciones:

$$\epsilon_k = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2} + \frac{J\omega_y^2}{2} + \frac{J\omega_z^2}{2}. \quad (27.27)$$

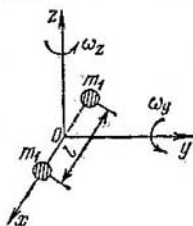


Fig. 27.8.

En la teoría molecular clásica se demuestra que a cada uno de estos movimientos le corresponde, en promedio, la misma cantidad de energía, igual a  $kT/2$ :

$$\frac{mv_x^2}{2} = \frac{mv_y^2}{2} = \frac{mv_z^2}{2} = \frac{J\omega_y^2}{2} = \frac{J\omega_z^2}{2} = \frac{1}{2} kT.$$

Poniendo esta última expresión en (27.27), obtenemos que la energía media de la molécula de un gas biatómico

$$\bar{\epsilon}_k = 5/2 kT. \quad (27.28)$$

De aquí se desprende que la energía interna de un kilomol de gas biatómico

$$U_m = 5/2 N_A kT + \text{const} = 5/2 RT + \text{const}. \quad (27.29)$$

La capacidad calorífica molar isócara

$$C_{mV} = 5/2 R. \quad (27.30)$$

5. Comparemos este último resultado con los datos del experimento (véase la fig. 27.7). Veremos que los valores numéricos de las capacidades caloríficas de los gases biatómicos concuerdan mal con el valor teórico (27.30). Así, la divergencia constituye para el oxígeno un 20 . . . 30%. No obstante, la teoría clásica tiene insuficiencias más notables, ya que dicha teoría no puede explicar los siguientes hechos:

1. ¿Por qué las capacidades caloríficas de los gases biatómicos (y en general, multiatómicos) crecen al aumentar la temperatura?

2. ¿Por qué a bajas temperaturas la capacidad calorífica del hidrógeno coincide con la de los gases monoatómicos (es decir,  $C_{mV} = \frac{3}{2}R$  y no  $\frac{5}{2}R$ , como a temperaturas más altas)?

3. ¿Por qué este efecto se manifiesta en el hidrógeno, mientras que en el oxígeno, no?

4. ¿Por qué las moléculas biatómicas se comportan como sistemas rígidos? ¿Por qué durante los choques no se excitan oscilaciones de los átomos en las moléculas?

A estas preguntas sólo se ha conseguido dar respuesta, empleando la teoría cuántica de la capacidad calorífica.

### § 27.9. Concepto de la teoría cuántica de la capacidad calorífica de los gases

1. La energía de una molécula de un gas biatómico puede ser representada como la suma de las energías cinemáticas de sus movimientos de avance y rotativo, más la energía de las oscilaciones de los átomos en el interior de las moléculas:

$$\varepsilon = \varepsilon_{av}^k + \varepsilon_{rot}^k + \varepsilon_{osc} = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{L^2}{2J} + \varepsilon_{osc}, \quad (27.31)$$

donde  $p$  es la cantidad de movimiento de la molécula,  $L$ , el momento de la cantidad de movimiento,  $m_0$ , la masa de la molécula,  $J$ , el momento de inercia. La variación de la energía interna del gas se reduce al cambio de la energía del movimiento de avance y rotativo de las moléculas y la energía de las oscilaciones. Sin embargo, según la teoría cuántica, estos tres componentes de la energía de la molécula reaccionan de diferente modo a la variación de la temperatura del gas.

2. La variación de la energía cinética del movimiento de traslación se reduce al cambio de la cantidad de movimiento de la molécula. Es natural, que la variación de la cantidad de movimiento no debe ser menor que la incertidumbre de la cantidad de movimiento, que puede ser calculada mediante la correlación (14.5). Haciendo en (14.5) la incertidumbre de la coordenada, por el orden de su magnitud, igual a la longitud del recorrido libre de la molécula,  $\Delta l \approx$

$\approx \lambda \approx 10^{-7}$  m (§ 25.3), obtenemos la incertidumbre de la cantidad de movimiento

$$\Delta p \approx \hbar/\Delta l \approx 10^{-34}/10^{-7} = 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

La incertidumbre de la cantidad de movimiento corresponde a la incertidumbre en el valor de la energía cinética de la molécula:

$$\Delta \varepsilon_{\text{tras}} = \frac{(p + \Delta p)^2}{2m_0} - \frac{p^2}{2m_0} = \frac{2p \Delta p + \Delta p^2}{2m_0} \geq \frac{3p^2}{2m_0}.$$

La incertidumbre de la energía corresponde a la incertidumbre de la temperatura  $\Delta T_{\text{tras}}$ , que puede ser hallada de la correlación

$$\Delta \varepsilon_{\text{tras}} = \frac{3}{2} k \Delta T_{\text{tras}}.$$

De aquí sigue, que

$$\Delta T_{\text{tras}} = \frac{\Delta p^2}{\frac{1}{2} m_0 k}. \quad (27.32)$$

La masa de la molécula de hidrógeno  $m_0 = \frac{2 \text{ kg}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 3,32 \cdot 10^{-27}$  kg. Por lo tanto,

$$\Delta T_{\text{tras}} \approx \frac{10^{-54}}{3,32 \cdot 10^{-27} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}.$$

De hecho esto significa que *la energía del movimiento de translación puede variar con cualquier cambio de la temperatura*. Por esta causa, la teoría cuántica nos proporciona, en este caso, un mismo resultado que la estadística clásica.

3. La variación de la energía cinética del movimiento rotativo de una molécula se reduce al cambio de su cantidad de movimiento. En la teoría cuántica se demuestra que la variación del momento de la cantidad de movimiento no puede ser cualquiera, sino que es múltiple a la constante de Planck. De esto sigue, que el momento de la cantidad de movimiento de una molécula puede tomar una serie de valores (§ 72.2):

$$L_1 = \hbar, L_2 = 2\hbar, \dots, L_n = n\hbar.$$

Del mismo modo, la energía cinética del movimiento rotativo de una molécula puede tomar los valores

$$\varepsilon_{\text{rot}}^{(1)} = \frac{L_1^2}{2J} = \frac{\hbar^2}{2J}, \quad \varepsilon_{\text{rot}}^{(2)} = \frac{L_2^2}{2J} = \frac{4\hbar^2}{2J}, \text{ etc.}$$

La variación mínima de la energía cinética de movimiento rotativo de una molécula  $\Delta e_{\text{rot}}^k \approx e_{\text{rot}}^{(2)} - e_{\text{rot}}^{(1)} = 3\hbar^2/2J$ . A esta variación de la energía corresponde un cambio de la temperatura, que se desprende de la igualdad  $\frac{3}{2} k\Delta T_{\text{rot}} = \frac{3\hbar^2}{2J}$ , de donde

$$\Delta T_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{Jk}. \quad (27.33)$$

4. El momento de inercia de la molécula de hidrógeno puede ser hallado partiendo de las siguientes consideraciones. Imaginémonos dicha molécula como una pesa para ejercicios gimnásticos (véase la fig. 27.8): la distancia entre los centros de los átomos  $l \approx 0,74 \cdot 10^{-10}$  m; la masa del átomo de hidrógeno es dos veces menor que la de la molécula y es igual a  $m_1 = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg. En tal caso,

$$J_{H_2} = 2m_1 r^2 \approx 5 \cdot 10^{-48} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

( $r = l/2$ ). Poniendo este valor en (27.33) obtenemos que para la variación de la energía cinética de movimiento rotativo de la molécula de hidrógeno, la temperatura del gas deberá cambiar

$$\Delta t_{\text{rot}} = \frac{10^{-68}}{5 \cdot 10^{-48} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 140 \text{ K}.$$

Así, pues, a temperaturas de un orden de 200 K, al chocar las moléculas, éstas pueden hacer variar la energía de su movimiento rotativo, por lo que  $C_{mV} \approx \frac{5}{2} R$ .

A temperaturas cerca de 100 K, sólo una pequeña parte de las moléculas, cuyas energías, según la distribución de Maxwell (§ 25.2), son mayores que la media pueden variar la energía de su rotación durante las colisiones. Por este motivo, a estas temperaturas  $\frac{3}{2}R < C_{mV} < \frac{5}{2}R$ . A temperaturas menores que 80 K, el porcentaje de moléculas que durante los choques son capaces de variar la energía de rotación es tan pequeño que, en realidad, al cambiar la temperatura varía sólo la energía del movimiento de avance de las moléculas. Como es natural, a semejantes temperaturas la capacidad calorífica isócara del hidrógeno es la misma que la de un gas monoatómico.

5. De forma completamente diferente hemos de tratar la capacidad calorífica del oxígeno. Aquí la masa del átomo es 16 veces mayor que la del átomo de hidrógeno, y la distancia entre los centros de los átomos  $l \approx 1,2 \cdot 10^{-10}$  m; por

consiguiente, el momento de inercia de la molécula de oxígeno es, aproximadamente, 40 veces mayor que el de la molécula de hidrógeno. En correspondencia con (27.33), la variación de la temperatura del gas, que se acompaña con el cambio de la energía de rotación, será para el oxígeno  $\Delta T_{\text{rot}} \approx 3$  K. Como, además, el punto de ebullición del oxígeno es igual a 90 K a presión normal, en las condiciones, cuando podemos considerar que el oxígeno es un gas ideal, durante los choques crecerán en él las energías cinéticas tanto del movimiento de traslación, como del rotativo de las moléculas, lo que corresponde a la teoría clásica de las capacidades caloríficas de los gases biatómicos.

6. En los anteriores razonamientos no hemos tenido en cuenta la energía del movimiento oscilatorio de las moléculas, suponiendo en silencio, que a las temperaturas que examinábamos dicho movimiento era una magnitud constante. La causa de semejante situación, también puede ser bien explicada en la mecánica cuántica, donde se demuestra que, con la primera aproximación, la energía de las oscilaciones

$$\varepsilon_{\text{osc}} = \hbar\omega (n + 1/2).$$

Aquí  $\omega$  es la frecuencia propia de las oscilaciones de los átomos en la molécula,  $n$ , un número entero:  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . De esto sigue, que la variación mínima de la energía de las oscilaciones  $\Delta\varepsilon_{\text{osc}} = \hbar\omega$ .

Las frecuencias propias de las moléculas se determinan con ayuda de métodos ópticos. Para el hidrógeno  $\omega_{\text{H}_2} = 7,86 \cdot 10^{14}$  rad/s; para el oxígeno  $\omega_{\text{O}_2} = 2,94 \cdot 10^{14}$  rad/s.

Calculemos la temperatura con la que, a cuenta de las colisiones entre las moléculas, crece la energía de las oscilaciones. Obtendremos  $3/2 k \Delta T = \Delta\varepsilon_{\text{osc}} = \hbar\omega$ , de donde

$$\Delta T_{\text{osc}} = \frac{2\hbar\omega}{3k}. \quad (27.34)$$

Para el hidrógeno

$$\Delta T_{\text{osc}} \approx \frac{2 \cdot 10^{-34} \cdot 7,86 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 3800 \text{ K};$$

para el oxígeno

$$\Delta T_{\text{osc}} = \frac{2 \cdot 10^{-34} \cdot 2,94 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 1400 \text{ K}.$$

Es lógico que en una gama de temperaturas del orden de 1300 . . . 1500 K la energía de las oscilaciones en la molécula de hidrógeno varía débilmente y la capacidad calorífica de

dicho gas crece con menor rapidez que la del oxígeno (véase la fig. 27.8).

En la molécula de oxígeno, la energía de las oscilaciones aumenta a temperaturas mucho mayores. Ya a temperaturas de un orden de 700 . . . 900 K, cerca de la mitad de las moléculas resultan ser capaces de incrementar la energía de las oscilaciones, por esto  $C_{mv} \approx 3R$ , lo que es mayor que el valor clásico para los gases biatómicos, igual a  $2,5R$ . A temperaturas de un orden de 1400 . . . 1500 K, todas las moléculas, durante los choques, deberán variar la energía de las oscilaciones.

Puede ser calculado el límite a que tiende, en semejante caso, la capacidad calorífica isócara del oxígeno haciendo uso de la misma regla que en el § 27.8. aplicamos para tener en cuenta la energía cinética de los movimientos de traslación y rotativo. Durante las oscilaciones varía tanto la energía cinética, como potencial de las moléculas. Resulta que sus variaciones son idénticas e iguales a  $kT/2$ . En vez de (27.28), hallamos la expresión:

$$\bar{\varepsilon}_k = 7/2 kT. \quad (27.35)$$

De aquí sigue, que

$$C_{mv} = 7/2 R, \quad C_{mp} = 9/2 R \quad \text{y} \quad \gamma = 9/7 = 1,29.$$

Comparando este resultado con la tabla 27.2, vemos que el resultado que hemos obtenido corresponde al experimento.

7. Así, pues, nos hemos cerciorado de que sobre la base de las representaciones cuánticas, pueden ser explicadas las particularidades características de la conducta de las capacidades caloríficas de los gases biatómicos. Por su parte, la estadística clásica no puede explicar todos estos fenómenos, aunque nos permite, en ciertos casos, obtener los valores límites de las magnitudes que nos interesan.

## Capítulo 28

### SEGUNDO PRINCIPIO DE TERMODINÁMICA

#### § 28.1. Transformaciones casiestáticas

1. En los anteriores capítulos, al examinar diversos procesos, que transcurren en los gases ideales, hablábamos de su temperatura, densidad, presión. Con esto, suponíamos



tácitamente que en todos los puntos del volumen dado del gas su presión, densidad y temperatura eran iguales. Estas magnitudes reciben el nombre de *parámetros termodinámicos de estado*.

En rigor, la igualdad de los parámetros termodinámicos en todos los puntos del sistema, sólo es posible a condición de que éste se encuentre en estado de equilibrio. Si en el sistema transcurren cualesquiera transformaciones (procesos), dicha condición se viola.

Por ejemplo, si desplazamos ligeramente el émbolo en un cilindro, en las cercanías del émbolo el gas se comprimirá un poco y, por lo tanto, en dicho entorno su presión, densidad y temperatura aumentarán. En lo que se refiere a otros sectores, los parámetros del gas no pueden cambiar de inmediato. Después de pasar cierto tiempo  $\tau$ , llamado *tiempo de relajación*, el equilibrio violado se restablecerá. Con ello, los parámetros termodinámicos del gas tomarán en todo punto valores nuevos, pero iguales por todo el volumen.

Supongamos que la compresión transcurre tan lentamente, que el tiempo de su transcurso sea mucho mayor que el de relajación. Entonces, toda la transformación puede ser representada como la suma de una gran cantidad de muy pequeñas compresiones, de forma que la duración de cada microcompresión resulte ser, a pesar de todo, mayor que el tiempo de relajación. En tal caso, durante cada una de las microcompresiones habrá tiempo suficiente para que se establezca el equilibrio y toda la transformación será de por sí un conjunto de transiciones por una gran cantidad de estados de equilibrio.

Las transformaciones con las que el sistema pasa por una serie de posiciones de equilibrio, reciben el nombre de *casiestáticas*.

2. La velocidad de las transformaciones isócara, isobárica o isotérmica con nada se limita, de forma que estas transformaciones pueden realizarse con la lentitud que se quiera. Por esta razón, en un recipiente de pequeñas dimensiones, cuyas paredes poseen elevada conductividad térmica, cualquiera de estas transformaciones puede aproximarse a la casiestacionaria con la precisión prefijada de antemano.

Es mucho más difícil llevar a cabo la transformación adiabática casiestacionaria. Por un lado, ésta debe transcurrir con tal rapidez que el intercambio de calor con el medio ambiente no sea notorio. Por otro lado, el tiempo de su

transcurso, debe ser mucho mayor que el de relajación. Como estas dos condiciones son contradictorias, satisfacerlas simultáneamente no es fácil y las transformaciones que transcurren en la práctica, son adiabáticas y al mismo tiempo casi estacionarias, sólo con cierta aproximación.

3. Las gráficas sólo nos ofrecen transformaciones casi estacionarias, ya que cada punto en la gráfica caracteriza cierto estado intermedio de equilibrio. Aquí no será considerado el problema acerca de la metodología de representación de las transformaciones reales, no casi estacionarias.

## § 28.2. Transformaciones reversibles

1. Recibe el nombre de *reversible*, la transformación que responde a las condiciones siguientes:

a) puede ser realizada con facilidad en dos direcciones opuestas;

b) en cada uno de estos casos, el sistema pasa por iguales estados intermedios;

c) después de realizar la transformación directa e inversa, el sistema y los cuerpos que lo rodean retornan al estado inicial.

Toda transformación que no satisfaga, aunque no sea más que a una de dichas condiciones, es *irreversible*.

2. *Son reversibles aquellos procesos que transcurren en sistemas sobre los que están aplicadas fuerzas conservativas (§ 18.5).*

En efecto, sea que una bola perfectamente elástica cae en el vacío sobre una plancha absolutamente elástica. Empleando las leyes del choque elástico (§ 17.3), es fácil mostrar que cuando la bola cae sobre la plancha, después de reflejarse volverá al punto inicial, pasando en dirección contraria todos aquellos estados intermedios que pasó al caer. Después de que el proceso termine, la bola y todos los cuerpos que la rodean volverán a su estado inicial, pudiéndose esto repetir cuantas veces se quiera.

También es fácil cerciorarse de que las oscilaciones de un péndulo en el vacío o de un cuerpo sobre un resorte perfectamente elástico son también de por sí transformaciones reversibles.

3. Nos convenceremos fácilmente de que *todas las transformaciones térmicas casi estáticas son asimismo reversibles.*

Como ejemplo examinemos una transformación isotérmica casiestática.

Sea que un gas se dilata de forma casiestática y, al mismo tiempo, isotérmica y que su volumen aumenta en una pequeña magnitud  $\Delta V$ . Como con la transformación dada, el sistema pasa constantemente por estados de equilibrio, queda claro que en cualquier momento puede ser dirigida en dirección opuesta, es decir, comprimir el sistema hasta la misma magnitud  $\Delta V$ . Con esto, todo el sistema pasará de nuevo por los mismos estados intermedios que pasó durante la expansión.

Como sabemos del § 27.6, durante la expansión isotérmica, el gas realiza trabajo, recibiendo del medio circundante, por medio del intercambio térmico, cierta cantidad de calor:  $Q_T = A_T$ . Supongamos que dicho trabajo está destinado a aumentar la energía potencial de cierto cuerpo de masa  $m$  que se eleva a una altura  $h$ . Entonces, de la ley de la conservación de la energía sigue que  $Q_T = A_{\text{exp}} = mgh$ . Durante el proceso inverso el cuerpo baja a la misma altura  $h$ ; la energía potencial de la carga se empleará para realizar el trabajo necesario para la compresión del gas; al mismo tiempo, el gas cederá al medio ambiente, mediante el intercambio térmico, la misma cantidad de calor que recibió durante la expansión.

Así, pues, después de realizarse el proceso de expansión y seguidamente, la compresión del gas, éste y todos los cuerpos que lo rodean retornarán a las condiciones iniciales. Esto quiere decir que la transformación isotérmica casiestática es reversible.

Razonamientos análogos nos permiten demostrar la reversibilidad de cualesquiera otros procesos casiestáticos, ya que en las anteriores consideraciones era importante no el carácter de la transmisión de calor del sistema al medio ambiente, sino que el procedimiento equilibrado de transición del sistema por todos los estados intermedios, es decir, el carácter casiestático de la transformación.

### § 28.3. Irreversibilidad de las transformaciones térmicas reales

1. Los ejemplos de transformaciones reversibles que hemos examinado son una idealización de fenómenos naturales reales. Pero en verdad, en la naturaleza no hay siste-

mas que sean en rigor conservativos; por ejemplo, en todo sistema real están presentes las fuerzas de rozamiento. Tampoco hay en la naturaleza procesos rigurosamente casiestáticos, ya que todas las transformaciones térmicas transcurren no con infinita lentitud, sino que a velocidad finita. De aquí se desprende que *todos los procesos reales en la naturaleza son irreversibles*.

Sin embargo, no debemos pensar que el concepto de proceso reversible casiestático es insubstancial y, por lo tanto, superfluo. Por analogía a tales idealizaciones como punto material, carga puntual, sistema conservativo, etc., la noción de proceso reversible es una cómoda idealización de los procesos reales, que en una serie de casos permite simplificar la solución de uno u otro problema concreto. Sólo es necesario, comprobar primeramente con minuciosidad, hasta qué grado la aplicación de esta idealización es lícita, en qué grado los resultados del cálculo idealizado se aproximan a los del experimento.

Examinemos varios ejemplos que ilustran la irreversibilidad de las transformaciones térmicas reales.

2. La experiencia muestra que durante la difusión la nivelación de las concentraciones transcurre espontáneamente, sin influjos externos. Por lo contrario, el proceso inverso nunca transcurrirá por sí mismo: podemos esperar cuanto tiempo queramos, pero nunca resultará, por ejemplo, que una mezcla de gases se divida en sus componentes iniciales o que la sustancia diluida en un líquido (sal, azúcar, pintura, etc.) se desprenda por sí sola de dicho líquido.

Claro está, que una mezcla puede ser dividida en los componentes iniciales. Pero, primero, en este caso el sistema no pasa por aquellos estados intermedios que pasó durante la difusión. Segundo, el retorno del sistema a su estado inicial provoca la notoria variación de las propiedades de los cuerpos circundantes. Por ejemplo, dividiendo una mezcla gaseosa, creada con ayuda de la difusión en sus componentes iniciales (§ 25.6), debemos consumir energía para el funcionamiento de las bombas; del mismo modo, al sacar, por ejemplo, la sal de una disolución acuosa mediante la destilación, consumimos energía para la evaporación del agua, lo que está ligado con la variación del estado de los cuerpos que rodean el sistema dado de cuerpos.

Así, pues, la difusión es un proceso unilateral, o sea, irreversible.

3. La práctica muestra que la transmisión de calor, lo mismo que la difusión, es un proceso que transcurre en una sola dirección. Como resultado de la transmisión de calor, la energía se comunica, por sí sola, desde el cuerpo a temperatura más alta al cuerpo a temperatura más baja. Por esta causa, el intercambio de calor se ve siempre acompañado de la nivelación de las temperaturas. El proceso inverso de transmisión de la energía en forma de calor de los cuerpos fríos a los calientes no puede transcurrir de forma espontánea.

También transcurre en dirección unilateral el proceso de transformación de la energía mecánica en interna durante el choque inelástico o el rozamiento. La energía mecánica de los cuerpos en contacto se convierte en interna, a causa de lo cual su temperatura aumenta. No obstante, por mucho tiempo que esperemos, no se producirá el proceso inverso de transformación espontánea de la energía interna en mecánica.

#### § 28.4. Irreversibilidad y estadística

1. A primera vista, la irreversibilidad de los procesos térmicos parece ser paradójica. En efecto, todas las transformaciones térmicas se reducen, en fin de cuentas, a procesos mecánicos, es decir, al movimiento e interacción de las moléculas. Pero los procesos mecánicos son reversibles; ¿qué es lo que provoca la irreversibilidad de los fenómenos térmicos? Esta aparente contradicción puede ser resuelta con ayuda de la estadística molecular, en la que los métodos de la teoría de las probabilidades se aplican para estudiar los procesos que transcurren en un sistema, constituido por una enorme cantidad de partículas. Vamos a considerar, primeramente, la esencia de su idea en el sencillo ejemplo del modelo de un recipiente en el que hay dos clases de bolas.

2. Supongamos que en el fondo de un recipiente se encuentran dos capas de bolas de igual tamaño y masa, pero de dos colores (fig. 28.1). Al sacudir el recipiente las bolas se mezclan (fig. 28.2). Seguidamente, podemos sacudir el recipiente cuanto queramos, pero, prácticamente, nunca se restablecerá el estado inicial. Así, pues, *el proceso de mezcla de las bolas es irreversible*, o sea al sacudir el cajón la disposición ordenada pasa de forma espontánea a la desordenada, mientras que el proceso inverso nunca transcurrirá por sí solo.

¿En dónde reside la causa de la irreversibilidad de este proceso? ¿Cómo «saben» las bolas que deben disponerse de

forma precisamente desordenada? Será posible responder a esta pregunta si conseguimos calcular qué cantidad total de combinaciones existen para la distribución de diez bolas negras y diez blancas en dos capas.

3. Para facilitar el cálculo designemos las bolas de alguna forma, por ejemplo, todas las blancas con las letras mayúsculas del alfabeto, todas las negras con minúsculas:

Blancas	A B C D E F G H I J
Negras	a b c d e f g h i j

Supongamos que en la fila superior se encuentran tres bolas blancas y siete negras (fig. 28.2). Como es lógico, en

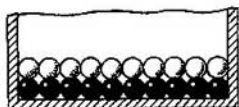


Fig. 28.1.

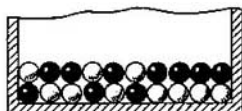


Fig. 28.2.

la capa inferior su contenido será a la inversa, es decir, siete blancas y tres negras, de forma que la elección de cualquier distribución de las bolas en la fila superior determina de forma automática su distribución en la inferior. Calculemos cuántas combinaciones de las bolas corresponden a la distribución dada. De las diez bolas blancas podemos elegir tres bolas por diferentes procedimientos *ABC*, *ABG*, *EFJ*, etc. Su número es igual al número de combinaciones que pueden ser formadas de 10 elementos de tres en tres. Se designa por  $C_{10}^3$  y es igual a

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

De manera análoga se calcula el número de procedimientos, mediante los cuales pueden ser elegidas siete bolas negras de las diez:

$$C_{10}^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = C_{10}^3 = 120^*).$$

\* Señalemos que siempre  $C_m^n = C_m^{m-n}$ . Recomendamos que esta propiedad de combinaciones sea comprobada con ejemplos. La demostración general se aduce en el curso de matemáticas.

Como las bolas negras pueden ser elegidas independientemente de las blancas (con tal de que su número sea igual a 10), el número total de combinaciones, por medio de las cuales puede realizarse una distribución de tres bolas blancas y siete negras en la fila superior, es igual al producto del número de combinaciones de bolas blancas y negras, o sea, a  $C_{10}^3 \cdot C_{10}^7 = 120^2 = 14\,400$ .

De modo análogo es posible calcular el número de combinaciones que corresponden a la distribución de dos bolas blancas y ocho negras, de cuatro blancas y seis negras, etc. Los resultados de los cálculos se aducen en la tabla 28.1.

Tabla 28.1

Número del estado	Disposición de las bolas en la fila superior		Número de combinaciones correspondientes al estado dado	En %
	blancas	negras		
1	10	0	$C_{10}^{10}C_{10}^0 = 1$	0,00054
2	9	1	$C_{10}^9C_{10}^1 = (C_{10}^1)^2 = 10^2 = 100$	0,05446
3	8	2	$C_{10}^8C_{10}^2 = (C_{10}^2)^2 = \left(\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}\right)^2 = 2\,025$	1,096
4	7	3	$C_{10}^7C_{10}^3 = (C_{10}^3)^2 = \left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)^2 = 14\,400$	7,794
5	6	4	$C_{10}^6C_{10}^4 = (C_{10}^4)^2 = \left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right)^2 = 44\,100$	23,87
6	5	5	$C_{10}^5C_{10}^5 = \left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\right)^2 = 63\,504$	34,37
7	4	6	$C_{10}^4C_{10}^6 = (C_{10}^4)^2 = 44\,100$	23,87
8	3	7	$C_{10}^3C_{10}^7 = (C_{10}^3)^2 = 14\,400$	7,794
9	2	8	$C_{10}^2C_{10}^8 = (C_{10}^2)^2 = 2\,025$	1,096
10	1	9	$C_{10}^1C_{10}^9 = (C_{10}^1)^2 = 100$	0,05446
11	0	10	$C_{10}^0C_{10}^{10} = 1$	0,00054
En total			184 756	100

4. Vamos a sacudir el recipiente y cada vez fotografiaremos la distribución de las bolas que ha surgido. Si hacemos una gran cantidad de fotografías, por ejemplo un millón, de

ellas, aproximadamente, 5—6 fotografías corresponderán a la distribución con la que todas las bolas blancas estarán abajo y las negras, arriba; una misma cantidad de fotos nos ofrecerán el cuadro inverso; la cantidad de fotos que corresponderán a la distribución cuando en cada fila habrá cinco bolas blancas y cinco negras, ¡será alrededor de 344 000!

Así, pues, el sistema de diez bolas blancas y diez negras, puede encontrarse en 11 estados diferentes. Sin embargo, cada uno de estos estados puede ser realizado con diferente número de combinaciones de las bolas.

Recibe el nombre de *probabilidad termodinámica del estado dado de cierto sistema de cuerpos, el número de combinaciones de los elementos por separado del sistema mediante los cuales se realiza dicho estado.*

En la tabla 28.1 vemos que la mayor probabilidad termodinámica corresponde a la distribución uniforme de las bolas negras y blancas en las dos filas (estado N° 6) y a los estados N° 5 y 7, próximos al uniforme. En lo que se refiere a la probabilidad termodinámica menor, ésta corresponde a la distribución por completo ordenada de las bolas (estados N° 1 y 11), así como a los estados N° 2 y 10, próximos a la distribución totalmente ordenada.

5. Es posible mostrar que *el tiempo en el que cierto sistema se encuentra en uno u otro estado es proporcional a la probabilidad termodinámica de dicho estado.* Por esto, queda clara la causa de la irreversibilidad del proceso de mezcla de las bolas. Al sacudir el recipiente las bolas se disponen al azar y, en principio, puede surgir cualquier combinación. No obstante, con la mayor frecuencia se realiza el estado para el que la probabilidad termodinámica es mayor. Por ejemplo, si sacudimos el recipiente con las bolas en el transcurso de 24 horas, en el estado N° 6 el sistema se encontrará cerca de 8 h, en el estado N° 5 ó 7, cerca de 6 h, mientras que en el estado N° 1 ó 11, ¡sólo cerca de 0,5 s!

Así, pues, *la irreversibilidad del proceso de mezcla de las bolas se determina por la probabilidad termodinámica de aquellos estados en los que puede encontrarse dicho sistema.* De modo espontáneo transcurre el proceso de paso de un estado con pequeña probabilidad termodinámica a otro más probable.

En lo que se refiere al proceso inverso de paso de la distribución desordenada (y por lo tanto, la más uniforme) de los elementos del sistema (bolas) al estado ordenado por



sí solo, prácticamente, no transcurre a causa de que la probabilidad de semejante proceso es pequeñísima.

Obtendremos un resultado análogo al analizar los fenómenos que se producen en cualquier sistema, constituido por una gran cantidad de elementos homogéneos, por ejemplo, en un sistema formado por múltiples moléculas en movimiento caótico.

### § 28.5. Difusión y probabilidad termodinámica

1. El fenómeno de la difusión se parece mucho al proceso de mezcla de las bolas, que examinamos en el párrafo anterior. Por esta razón, para explicar las causas de la irreversibilidad de la difusión vamos a hacer uso de ese mismo método. Imaginémonos un recipiente dividido por la mitad por un tabique impermeable; las mitades del recipiente están rellenas de un mismo número de moléculas de diferentes gases, por ejemplo, hidrógeno y oxígeno. Si quitamos el tabique, como resultado de la difusión, se creará espontáneamente una mezcla homogénea de los gases. Sin embargo, podemos esperar el tiempo que queramos y la mezcla, por sí misma, no se dividirá en los componentes iniciales.

Comparemos la probabilidad del «desorden molecular» que corresponde a la mezcla homogénea de los gases, con la probabilidad del «orden molecular», correspondiente a la distribución inicial de los dos gases en las dos mitades del recipiente.

2. La distribución inicial puede realizarse por medio de un sólo procedimiento, por consiguiente, su probabilidad termodinámica es igual a la unidad. En lo que se refiere a la mezcla homogénea, ésta se obtiene mediante un enorme número de procedimientos: éste es igual al producto del número de combinaciones de  $N$  moléculas de hidrógeno con  $N/2$  moléculas en cada mitad del recipiente por el mismo número de combinaciones de  $N$  moléculas de oxígeno con  $N/2$  moléculas en cada mitad. Así, pues, la probabilidad termodinámica de tal estado

$$W_{\text{homog}} = (C_N^{N/2})^2. \quad (28.1)$$

3. En condiciones corrientes, incluso pequeños volúmenes de gas contienen una cantidad colosal de moléculas, por ejemplo, en un milímetro cúbico cerca de  $10^{16}$ . Para  $N \approx 10^{16}$ , la probabilidad termodinámica del estado que

corresponde a una mezcla homogénea de gases se expresa por un enorme número:

$$W_{\text{homog}} \approx 10^{10^{15}}.$$

De aquí se desprende la causa de la irreversibilidad del fenómeno de difusión. La probabilidad termodinámica del estado de una mezcla homogénea es incomparablemente mayor que la probabilidad del estado, con el cual los dos componentes están divididos. Por esta razón, el sistema de forma espontánea, a cuenta del movimiento caótico de las moléculas, pasa al estado más probable, que corresponde a la mezcla homogénea de los gases. Por lo contrario, el proceso inverso de división de la mezcla en los componentes iniciales es tan poco probable que, en la práctica, nunca tiene lugar.

### § 28.6. Probabilidad termodinámica y otras transformaciones térmicas

1. Es posible aplicar el concepto de probabilidad termodinámica para explicar la causa de la irreversibilidad del proceso de transformación de la energía mecánica en interna durante el choque inelástico. Sin embargo, a diferencia de la difusión, aquí es muy difícil calcular la probabilidad termodinámica y en este caso, nos limitaremos a la apreciación cuantitativa de esta magnitud.

Sea que un cuerpo en movimiento a la velocidad  $v$  choca de modo inelástico contra la pared. En este estado, todas las moléculas del cuerpo, al mismo tiempo que toman parte en el movimiento térmico caótico, se mueven en una misma dirección a igual velocidad  $v$ . Después del choque inelástico el cuerpo se para, pero su energía cinética no desaparece, sino que se consume para el aumento de la energía interna del cuerpo y la pared:

$$K = U_2 - U_1 + Q, \quad (28.2)$$

donde  $K$  es la energía cinética del cuerpo antes del choque,  $U_2 - U_1$ , la variación de la energía interna del cuerpo,  $Q$ , la cantidad de calor transmitida a la pared, al aire, etc.

2. La energía cinética del cuerpo es la medida del proceso mecánico, es decir, precisamente del proceso de transporte ordenado de todas las moléculas en una misma dirección, a velocidad igual. Semejante estado puede ser realizado mediante un solo procedimiento y, por consiguiente, su probabilidad termodinámica es igual a la unidad.

El paso de la energía cinética del cuerpo a la interna corresponde a la transmisión del movimiento ordenado al desordenado. De forma elemental no podemos calcular el número de combinaciones que corresponden a diversas distribuciones de las moléculas por todas las posibles magnitudes y direcciones de las velocidades que caracterizan el movimiento térmico caótico. Pero con seguridad es posible decir que con el gigantesco número de moléculas, la cantidad de dichas combinaciones es exclusivamente grande. Por lo tanto, la probabilidad termodinámica de semejante estado es expresada por un número enorme.

3. Así, pues, el proceso de transformación de la energía mecánica en interna es una transición de un estado con pequeña probabilidad termodinámica a un estado más probable. Con un gigantesco número de moléculas esta transformación transcurre de forma espontánea. El proceso inverso de paso de la energía interna a la mecánica, significaría la transición de un estado más probable a otro, menos probable. Con un gran número de moléculas, semejante transformación es tan poco probable, que prácticamente nunca transcurrirá. Es precisamente por esto, por lo que el proceso de conversión de la energía mecánica en interna resulta ser irreversible.

4. El lector puede cerciorarse con facilidad, de modo independiente, que todos los razonamientos aplicados al analizar el fenómeno de un choque inelástico, son aplicables al considerar el proceso de transformación de la energía durante el rozamiento, al calentarse los conductores con la corriente eléctrica, etc.

Razonamientos análogos permiten aclarar la causa de la irreversibilidad de la transmisión de calor. Sin embargo, aquí no examinaremos este problema, sino que lo haremos mediante un procedimiento más sencillo en el § 28.8.

## § 28.7. Probabilidad termodinámica y entropía

1. *La probabilidad termodinámica sirve de característica de la dirección de las transformaciones térmicas.* Comparando la probabilidad de dos estados de un sistema termodinámico, establecemos de inmediato la dirección de la transformación posible en el sistema dado: ésta será el paso del estado menos probable al estado más probable. No obstante, el cálculo de la probabilidad termodinámica es un problema muy complicado, ya que de hecho es enormemente difícil calcular

el número de distintas combinaciones de las moléculas que corresponden a uno u otro estado del sistema. Por esta causa, para los cálculos termodinámicos se hace uso de una magnitud física, introducida por Clausius y a la que éste dio el nombre de *entropía*.

Como la probabilidad termodinámica, *la entropía es una magnitud física que caracteriza la dirección de los procesos en la naturaleza*. Estas dos magnitudes pueden servir de medida del desorden en un sistema constituido por muchas partículas.

2. Boltzmann estableció que *la entropía es proporcional al logaritmo de la probabilidad termodinámica*, mientras que Planck mostró que la constante de Boltzmann sirve de coeficiente de proporcionalidad entre la entropía y el logaritmo natural de la probabilidad termodinámica:

$$S = k \ln W. \quad (28.3)$$

Si el sistema pasa de un estado a otro, con la variación de la probabilidad termodinámica, cambia también la entropía:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln W_2 - k \ln W_1 = k \ln (W_2/W_1), \quad (28.4)$$

donde el índice 1 se refiere al primer estado y el 2, al segundo.

Aclaremos las propiedades principales de la entropía, que desempeña un importante papel en termodinámica.

3. Ante todo, *la entropía de un sistema se determina por completo por el estado en que se encuentra el sistema*: no depende de la transformación, mediante la cual el sistema llegó a dicho estado. En este sentido, la entropía es análoga a la energía y se distingue del trabajo o de la cantidad de calor. La causa radica en que cada estado del sistema es determinado por cierta cantidad de combinaciones de las moléculas. Por lo tanto, a dicha cantidad le corresponde determinada probabilidad termodinámica y, según (28.3) a cada valor de la probabilidad corresponde un valor determinado de entropía.

4. Además, *la entropía de un sistema formado por dos (o varias) partes independientes, es igual a la suma de las entropías de dichas partes*. Por este lado, la entropía se parece a la energía, ya que si no hay interacción entre las dos partes del sistema, su energía es igual a la suma de las energías de estas partes.

Para la demostración, calculemos primeramente la probabilidad termodinámica. Sea que el estado de la primera parte del sistema se realiza mediante  $W^{(1)}$  combinaciones de las moléculas, en la segunda parte, con  $W^{(2)}$  combinaciones. Como ambas partes son independientes, a cada combinación de moléculas en la primera parte del sistema pueden ser puestas en correspondencia  $W^{(2)}$  combinaciones en la segunda parte. Entonces, el número de combinaciones de moléculas, por medio de las cuales se realiza el estado de todo el sistema es igual a  $W^{(1)} \cdot W^{(2)}$ . Pero esto es precisamente su probabilidad termodinámica. Así, pues,

$$W = W^{(1)}W^{(2)}. \quad (28.5)$$

Efectuando la logaritmicación de la expresión (28.5) y multiplicando la igualdad obtenida por la constante de Boltzmann, obtenemos

$$k \ln W = k \ln W^{(1)} + k \ln W^{(2)}$$

o bien, de acuerdo con (28.3)

$$S = S^{(1)} + S^{(2)}. \quad (28.6)$$

5. Es, por fin, evidente que durante *los procesos irreversibles*, tales como la difusión o la transformación de la energía mecánica en interna, *la entropía crece*. En efecto como mostramos más arriba, con estos procesos, crece la probabilidad termodinámica y, entonces, según (28.4) crece la entropía: si  $W_2 > W_1$ , en semejante caso  $S_2 > S_1$ .

## § 28.8. Entropía y transmisión de calor

1. Supongamos que isotérmicamente un cuerpo gana o pierde cierta cantidad de calor  $Q$ ; con esto su entropía cambia. Como mostró Clausius, la variación de la entropía será en este caso

$$\Delta S = S_2 - S_1 = Q/T, \quad (28.7)$$

donde  $S_1$  es la entropía del estado inicial,  $S_2$ , la entropía del estado final,  $T$ , la temperatura con la que transcurre la transmisión de calor,  $Q$ , la cantidad de calor perdida o ganada. Con ello, de acuerdo con la definición del concepto «cantidad de calor» (§ 21.3), es válida la siguiente regla de

signos:  $Q > 0$  si el cuerpo gana energía durante la transmisión de calor;  $Q < 0$ , si durante el intercambio de calor el cuerpo pierde energía, cediéndosela a otro cuerpo.

2. Calculemos la variación de la entropía de un sistema de dos cuerpos, si entre ellos se produce transmisión de calor. Para simplificar el cálculo, supongamos que este sistema está cubierto de una capa adiabática, de forma que la transmisión de calor con el medio ambiente está excluida (fig. 28.3).

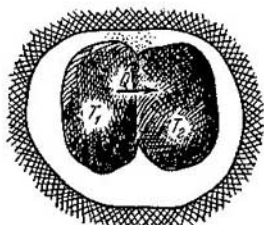


Fig. 28.3.

Según (28.6), tenemos

$$\Delta S = \Delta S^{(1)} + \Delta S^{(2)}, \quad (28.8)$$

donde  $\Delta S^{(1)}$  es la variación de la entropía del primer cuerpo y  $\Delta S^{(2)}$ , la del segundo.

Sea la temperatura del primer cuerpo antes del intercambio de calor igual a  $T_1$ , la del segundo,  $T_2$ , con la particularidad de que  $T_2 < T_1$ . Como de la práctica sabemos que durante la transmisión de calor, la energía (en forma de calor), siempre se transmite del cuerpo caliente al frío; entonces, en correspondencia con la regla de signos para la cantidad de calor,  $Q^{(1)} = -Q$ ,  $Q^{(2)} = Q$ , ya que el primer cuerpo cede energía, mientras que el segundo, la gana. Como resultado de la transmisión de calor, las temperaturas de los cuerpos variarán y serán: la del primero  $T_1 - \Delta T_1 = T_{\text{med}}^{(1)}$ , la del segundo  $T_2 + \Delta T_2 = T_{\text{med}}^{(2)}$ . La variación de la entropía de todo el sistema, según (28.7) y (28.8), es igual a

$$\Delta S = \frac{Q^{(1)}}{T_{\text{med}}^{(1)}} + \frac{Q^{(2)}}{T_{\text{med}}^{(2)}} = -\frac{Q}{T_{\text{med}}^{(1)}} + \frac{Q}{T_{\text{med}}^{(2)}} = \frac{Q(T_{\text{med}}^{(1)} - T_{\text{med}}^{(2)})}{T_{\text{med}}^{(1)} T_{\text{med}}^{(2)}}. \quad (28.9)$$

Pero las temperaturas absolutas  $T_{\text{med}}^{(1)}$  y  $T_{\text{med}}^{(2)}$  son magnitudes positivas; de acuerdo con las condiciones de transmisión de calor  $T_{\text{med}}^{(1)} - T_{\text{med}}^{(2)} > 0$  y  $Q > 0$ . Así, pues, en la expresión (28.9) el segundo miembro es un número positivo. De aquí se desprende que  $\Delta S > 0$ , es decir, *en un sistema cerrado y aislado adiabáticamente, a causa de la transmisión de calor entre sus partes componentes, la entropía crece.*

3. Señalemos que el proceso de transmisión de calor que examinamos es *irreversible*: la energía (en forma de calor) pasa por sí sola del cuerpo caliente al frío, lo que provoca la nivelación de las temperaturas en todas las partes de este sistema. En lo que se trata del proceso inverso de transmisión de calor del cuerpo frío al caliente, por sí solo no puede transcurrir.

Así, pues, vemos que *durante las transformaciones irreversibles, en un sistema cerrado y adiabáticamente aislado la entropía crece,*

$$\Delta S_{\text{irr}} > 0. \quad (28.10)$$

4. Vamos a mostrar, por fin, que durante las transformaciones reversibles la entropía no varía. Con este objeto, investigaremos, como ejemplo, las transformaciones casiestáticas isotérmica y adiabática de expansión o de compresión de un gas.

Sea que un gas se dilata de forma isotérmica casiestática. En tal caso, el gas realiza trabajo para elevar una carga y recibe cierta cantidad de calor del medio ambiente. La variación de la entropía de todo el sistema

$$\Delta S = \Delta S_m + \Delta S_g + \Delta S_{\text{mec}}, \quad (28.11)$$

donde los índices "m", "g" y "mec" se refieren al medio, gas y sistema mecánico (respectivamente). Pero  $\Delta S_m = -Q/T$  y  $\Delta S_g = Q/T$ , ya que el medio cede energía (en forma de calor) y el gas recibe esa misma cantidad de energía. En lo que se refiere a la variación de la entropía del sistema mecánico, ésta es igual a cero, ya que en los sistemas conservativos, durante toda transformación, la probabilidad termodinámica y, por lo tanto, la entropía no varían:  $\Delta S_{\text{mec}} = 0$ . Sustituyendo en (28.11), obtenemos

$$\Delta S = -\frac{Q}{T} + \frac{Q}{T} = 0.$$

También está claro, que con la transformación casiestática adiabática la entropía del sistema no varía: de la condición de la transformación adiabática  $Q = 0$ , según (28.7), se desprende que también  $\Delta S = 0$ .

5. Pero *las transformaciones casiestáticas* (tanto isotérmica, como adiabática) son *reversibles*. Por lo tanto, con los anteriores ejemplos hemos mostrado que

$$\Delta S_{\text{rev}} = 0. \quad (28.12)$$

Así, pues, hemos obtenido un importante resultado: *durante cualquier transformación, en un sistema cerrado y aislado adiabáticamente la entropía no disminuye,*

$$\Delta S \geq 0. \quad (28.13)$$

Aquí, el signo de igualdad se refiere a las transformaciones reversibles, el signo de desigualdad, a las irreversibles.

### § 28.9. Segundo principio de termodinámica

1. Al examinar las transformaciones térmicas reales, nos hemos cerciorado de que de ellas es propia una determinada dirección. De modo espontáneo todas ellas transcurren de tal modo que su resultado es de por sí *la nivelación de los parámetros termodinámicos*: la presión, temperatura, densidad, composición química, etc. Pero de las leyes fundamentales de la naturaleza, es decir, las leyes de la conservación de la cantidad de movimiento, del momento de la cantidad de movimiento y de la energía (en la forma del primer principio de termodinámica), la dirección y, por consiguiente, la irreversibilidad de las transformaciones térmicas no se deduce de ningún modo.

En realidad, el primer principio de termodinámica no prohíbe la transformación con la que cierta cantidad de calor fuera comunicada del cuerpo frío al caliente. El primer principio exige sólo una cosa: que la cantidad de calor cedido por un cuerpo, sea exactamente igual a la cantidad de calor que recibe el otro cuerpo, con otras palabras, que la energía total de un sistema cerrado y adiabáticamente aislado no varíe. En lo que se refiere a la cuestión de qué cuerpo a qué cuerpo pasa la energía durante el intercambio de calor, del caliente al frío o viceversa, ésta queda en suspenso: el primer principio de termodinámica no nos da respuesta a dicha cuestión.

Del mismo modo, partiendo del primer principio no se puede explicar la irreversibilidad del proceso de transformación de la energía mecánica en interna durante el choque inelástico, rozamiento, etc. El primer principio, sólo exige que la suma de las energías mecánica e interior no varíe en un sistema cerrado y aislado adiabáticamente. Pero también aquí, la ley de la conservación de la energía permite, en igual grado, la posibilidad de transformación tanto de la energía mecánica en interna, como de la interna en mecá-



nica. La dirección real de la transformación no puede ser predicha basándose en el primer principio de termodinámica.

2. De este modo, hemos llegado a la conclusión de que la dirección y, por lo tanto, la irreversibilidad de las transformaciones reales térmicas no es definida por las leyes de la conservación, sino que por alguna otra ley de la naturaleza. Esta recibe el nombre de *segundo principio de termodinámica*.

Existen diversas enunciaciones del segundo principio de termodinámica, que son entre sí equivalentes. La más general es la siguiente:

*Durante toda transformación, que transcurre en un sistema macroscópico cerrado y aislado adiabáticamente, su entropía no decrece, es decir,  $\Delta S \geq 0$ .*

3. Del segundo principio de termodinámica sigue el principio de imposibilidad formulado por Clausius: *una transformación cuyo único resultado fuese la transmisión de energía en forma de calor del cuerpo frío al caliente, es imposible* (véase también el § 29.5).

En efecto, si semejante proceso fuera posible, sería acompañado por la disminución de la entropía (§ 28.8), y esto contradice al segundo principio de termodinámica formulado más arriba.

4. Hay que prestar atención al sentido de las palabras "único resultado". Esto quiere decir que la transmisión de energía en forma de calor del cuerpo frío al caliente es imposible en el caso, cuando en la naturaleza no transcurre ninguna otra transformación. Si, por lo contrario, junto con la transmisión de calor se produce una transformación más (llamada *compensadora*, véase el § 29.4), la prohibición que implica el segundo principio de termodinámica, se retira y resulta ser posible la transmisión de energía en forma de calor del cuerpo a baja temperatura al cuerpo a temperatura más alta. Las condiciones a las que transcurre semejante transformación se estudiarán en el § 29.7.

#### § 28.10. Sentido estadístico del segundo principio de termodinámica. Fluctuaciones

1. Las leyes de la conservación tienen un dominio ilimitado de aplicación. Del mismo modo son válidas para las micropartículas, como para los sistemas macroscópicos.

El segundo principio de termodinámica sólo es aplicable a sistemas macroscópicos, constituidos de una enorme cantidad de moléculas.

Como hemos visto, el aumento de la entropía es consecuencia del crecimiento de la probabilidad termodinámica. Pero la estadística molecular no excluye la posibilidad de principio de una transformación, con la que la probabilidad termodinámica de cierto sistema decrece, aunque semejantes transformaciones, al haber gran cantidad de moléculas en el sistema, transcurren muy rara vez. Por lo tanto, no podemos, incluso de principio, excluir la posibilidad de transformaciones, con las que la entropía decrece, cuan pequeña fuese la probabilidad de su realización en la práctica.

2. De aquí sigue la necesidad de precisar la enunciación del segundo principio de termodinámica. Tomando en consideración las ideas de la estadística molecular, puede ser formulado así:

*En un sistema macroscópico cerrado y aislado adiabáticamente, la transformación más probable es aquella que va acompañada por el aumento de la entropía.*

Para los sistemas macroscópicos, constituidos por enorme número de moléculas, el segundo principio de termodinámica nos ofrece aquí resultados tan seguros, como las leyes de la conservación. En lo que se refiere a los sistemas microscópicos, formados por número relativamente pequeño de moléculas, en ellos son en absoluto posibles discrepancias entre los valores reales de las magnitudes físicas y sus valores medios, lo que recibe el nombre de *fluctuaciones*.

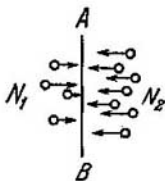


Fig. 28.4.

### § 28.11. Movimiento browniano y fluctuaciones

1. El resultado de las fluctuaciones es el movimiento browniano (§ 25.3). Haciendo uso de las leyes de dinámica, no puede ser explicado por qué causa el movimiento browniano se observa en las partículas, cuyas dimensiones

constituyen unos  $0,5 \dots 1 \mu\text{m}$ , mientras que las partículas mayores que  $5 \mu\text{m}$  ya no toman parte en dicho movimiento.

Para simplificar el cálculo, supongamos que la partícula browniana tiene la forma de un largo y delgado hilo  $AB$  (fig. 28.4).

Calculemos cuál es la probabilidad de la fluctuación que nos interesa con diversas dimensiones del hilo. Aceptamos que la longitud del hilo es igual a  $0,5 \mu\text{m}$ , mientras que la distancia entre las moléculas

de gas, cerca de  $0,001 \mu\text{m}$ . Entonces, por los dos lados del hilo se dispondrán, aproximadamente, 1000 moléculas.

Si el número de moléculas a la derecha y a la izquierda es igual, digamos  $N_1 = N_2 = 500$ , la partícula se encuentra en equilibrio. Si a la izquierda resulta haber  $N_1 = 470$ , mientras que a la derecha  $N_2 = 530$  moléculas, la presión a la derecha será  $530/470 = 1,13$  veces mayor, con otras palabras, crecerá el 13%. Comparemos la probabilidad de semejante fluctuación con la probabilidad del estado de equilibrio.

La probabilidad termodinámica del estado de equilibrio es igual al número de combinaciones que se puede constituir de 1000 moléculas, con 500 por cada lado del hilo:

$$W_{\text{equiv}} = C_{1000}^{500} = \frac{1000 \cdot 999 \cdot 998 \dots 503 \cdot 502 \cdot 501}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 498 \cdot 499 \cdot 500}.$$

La probabilidad termodinámica de la fluctuación de la presión que consideramos

$$W_{\text{fluc}} = C_{1000}^{470} = \frac{1000 \cdot 999 \dots 533 \cdot 532 \cdot 531}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 468 \cdot 469 \cdot 470}.$$

Su razón:

$$w = \frac{W_{\text{fluc}}}{W_{\text{equiv}}} = \frac{C_{1000}^{470}}{C_{1000}^{500}} = \frac{(1000 \cdot 999 \dots 532 \cdot 531) (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 469 \cdot 470 \cdot 471 \dots 500)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 469 \cdot 470) (1000 \cdot 999 \dots 531 \cdot 530 \dots 501)}.$$

Reduciendo los factores iguales, obtenemos

$$w = \frac{471 \cdot 472 \cdot 473 \dots 498 \cdot 499 \cdot 500}{501 \cdot 502 \cdot 503 \dots 528 \cdot 529 \cdot 530}.$$

2. Calcular esta magnitud por métodos elementales es muy difícil, pero podemos determinar sus límites. Para esto tengamos en cuenta que  $471/501 = 0,9401$  y  $500/530 = 0,9434$ .

Así, pues,

$$0,9401^{30} < w < 0,9434^{30},$$

de donde se desprende que:

$$0,157 < w < 0,174.$$

Un cálculo más preciso nos ofrece, que

$$w = 0,1654 \approx 17\%.$$

De forma que hemos obtenido un importante resultado: para una partícula browniana de cerca de  $0,5 \mu\text{m}$  de tamaño, la probabilidad de la fluctuación de la presión en un 13%, constituye  $0,1654 \approx 17\%$  de la probabilidad del estado de equilibrio. Por consiguiente, si semejante partícula estuviera en reposo en el transcurso de una hora (estado de equilibrio), cerca de 10 min actuarán sobre ella fuerzas considerables que pondrán a la partícula en movimiento. Suponiendo que la duración del «salto» constituye cerca de un segundo, obtenemos que durante una hora la partícula realizará cerca de 600 «saltos».

Recomendamos que el lector muestre por su cuenta, que una partícula dos veces mayor sólo realizará 100 «saltos» por hora.

3. Para que una partícula browniana de 5  $\mu\text{m}$  de tamaño realice semejante «salto», si ella está rodeada, a las mismas condiciones, de 10 000 moléculas, es preciso que a la izquierda se encuentren 4700 moléculas y a la derecha, 5300. La fluctuación de la presión de nuevo resulta ser igual al 13%. Para la probabilidad de fluctuación, obtenemos

$$w = \frac{W_{\text{fluc}}}{W_{\text{equiv}}} = \frac{C_{10000}^{4700}}{C_{10000}^{5300}} = 2,2 \cdot 10^{-8}.$$

O sea, que la probabilidad de fluctuación para esta partícula, es tan pequeña que puede hacerse igual a cero. Para notar un solo «salto», que dure cerca de un segundo, habría que observar la partícula  $4,5 \cdot 10^7$  s o como 1 año =  $3,16 \cdot 10^7$  s, ¡cerca de año y medio! Está completamente claro por qué las partículas de tamaños análogos o mayores no toman parte en el movimiento browniano.

Señalemos que nuestros cálculos son muy simplificados. Pero el orden de las magnitudes que hemos obtenido más arriba es muy próximo a la realidad.

### § 28.12. Movimiento browniano y constante de Boltzmann

1. Tratemos de apreciar, a donde se desplazará una partícula browniana durante el tiempo de observación  $t$ , que es mucho mayor que el tiempo  $\tau$  de la carrera libre de la molécula. Con este objeto, dividamos el tiempo de observación en una gran cantidad de iguales intervalos  $\Delta t = t/N$ , de forma que éstos sean también mucho mayores que el tiempo del recorrido libre. A continuación apreciaremos el valor de dicho intervalo.

Durante el tiempo  $\Delta t$  la partícula se desplaza a una distancia  $L$ , que llamaremos «paso» de la partícula. En el transcurso de este recorrido, la partícula sufre una enorme cantidad de choques ( $\Delta t/\tau \approx 10^{11}$ ) por parte de las moléculas que la rodean. Esto significa, que cada siguiente «paso» de la partícula browniana, no depende en absoluto de la dirección del «paso» anterior y el ángulo entre ellos varía por completo al azar.

Así, pues, no podemos de ningún modo predecir donde se encontrará la partícula browniana en cualquier momento de tiempo. *El movimiento de una partícula browniana es absolutamente caótico.*

2. Encontrándose en movimiento caótico, la partícula bien se aleja, o bien se aproxima a su posición inicial (fig. 28.5). Pero como su movimiento en todos los sentidos es igualmente probable, puede parecer que la partícula todo

el tiempo gira alrededor de su posición inicial. Sin embargo, la experiencia muestra que esto no es así. Por ejemplo, una gota de tinta en el agua se difunde por ella de forma gradual. Las partículas de pintura son, precisamente, las brownianas. Esto significa, que durante un intervalo de tiempo suficientemente grande, éstas se alejan uniformemente de su posición inicial. La distancia media a la que la partícula browniana se aleja de su posición inicial en un intervalo de tiempo, mucho mayor que el tiempo necesario para el recorrido medio de la molécula, recibe el nombre de *recorrido medio cuadrático de la partícula*. El método de cálculo de esta magnitud fue propuesto en 1904—1907 por A. Einstein y M. Smolujovski.

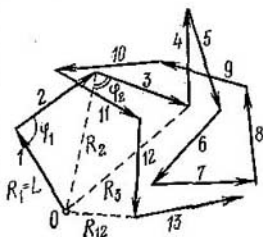


Fig. 28.5.

3. Para resolver este problema, nos dirigimos a la fig. 28.5. Aquí,  $L$  es el "paso" de la partícula; la distancia desde la partícula hasta su posición inicial, en los siguientes intervalos de tiempo, que transcurren uno tras otro,  $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots, \Delta t_N$ , son designados, respectivamente, por  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_N$  (en la figura sólo están designados  $R_1 = L, R_2, R_3$  y  $R_{12}$ ). Los ángulos que caracterizan las direcciones de los posteriores recorridos, están designados por  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{N-1}$ .

Sobre la base del teorema de los cosenos, constituimos un sistema de igualdades:

$$\begin{aligned}
 R_2^2 &= R_1^2 + L^2 - 2R_1L \cos \varphi_1, \\
 R_3^2 &= R_2^2 + L^2 - 2R_2L \cos \varphi_2, \\
 &\dots \dots \dots \\
 R_N^2 &= R_{N-1}^2 + L^2 - 2R_{N-1} \cos \varphi_{N-1}.
 \end{aligned}$$

Notamos fácilmente que al sumar los miembros primeros y segundos, los cuadrados de los desplazamientos intermedios se eliminan; quedan sólo  $R_N^2$  y  $R_1^2 = L^2$ . Así, pues,

$$R_N^2 = NL^2 - 2L (R_1 \cos \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_2 + \dots + R_{N-1} \cos \varphi_{N-1}).$$

Todos los sumandos entre paréntesis son magnitudes arbitrarias, que pueden tomar, con igual probabilidad, cualesquiera valores positivos y negativos. Por lo tanto, con un gran

número de observaciones, el valor medio de la suma entre paréntesis es igual a cero. De aquí sigue la expresión para el cuadrado del recorrido medio cuadrático:

$$\Delta^2 = \overline{R^2} = \langle R^2 \rangle = NL^2. \quad (28.14)$$

4. Como mostraron Einstein y Smolujovski, esta magnitud puede ser expresada mediante el tiempo de observación, las propiedades del líquido y el tamaño de la partícula. Efectuemos un cálculo aproximado, pero bastante sencillo. Para ello, apreciemos, primeramente, el intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

Una partícula browniana de masa  $m \approx 10^{-14}$  kg y radio  $r \approx 10^{-6}$  m es al mismo tiempo un objeto macroscópico y microscópico. Desde el punto de vista energético, semejante partícula es microscópica, ya que ella toma parte en el movimiento térmico y su energía cinética es igual a la energía media del movimiento térmico de las moléculas, es decir,  $^{3/2}kT$ . Pero desde el punto de vista de la cantidad de movimiento, es un objeto macroscópico: la cantidad de movimiento de una partícula browniana  $p = \sqrt{2mK} = \sqrt{2m \cdot ^{3/2}kT}$  es mucho mayor que la cantidad de movimiento de la molécula  $p_0 = \sqrt{2m_0 \cdot ^{3/2}kT}$ . La razón de las cantidades de movimiento

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{\frac{m}{m_0}} \approx \sqrt{\frac{10^{-14}}{10^{-28}}} = 10^6.$$

Es natural, que el choque de una molécula con una partícula browniana se parece al choque perfectamente elástico de una partícula contra la pared (§ 17.3): la molécula se separa de la partícula a una velocidad prácticamente igual, pero en sentido opuesto, mientras que la cantidad de movimiento de la partícula browniana varía en una pequeña magnitud  $\Delta p \approx 2p_0$ . Será precisa una enorme cantidad de choques entre las moléculas y la partícula browniana, para que ésta se "olvide" de la dirección inicial de su movimiento y comience a moverse en otra dirección. El número de estos choques puede ser apreciado del modo siguiente:

$$N_0 \approx p/p_0 \approx 10^6.$$

Esto permite valorar el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , durante el cual la partícula realiza un "paso":

$$\Delta t = N_0 \tau \approx 10^6 \cdot 10^{-10} \approx 10^{-4} \text{ s.}$$

Es natural, que durante el tiempo de observación de un orden de  $t \approx 1$  h, el número de "pasos" constituirá

$$N = t/\Delta t \approx 10^3/10^{-4} = 10^7. \quad (28.15)$$

5. Como desde el punto de vista de acción de la fuerza, la partícula browniana puede ser considerada como un objeto macroscópico, la acción sumaria de las moléculas que chocan con ella es posible igualarla a la fuerza del rozamiento viscoso  $F = 6\pi r\eta v$  (§ 11.8). No obstante, si el influjo de la fuerza del rozamiento viscoso sobre un objeto macroscópico se reduce al frenado, en el caso de una partícula browniana esta fuerza, en la longitud del «paso», primero frenará la partícula y, a continuación, de nuevo la acelerará hasta su anterior velocidad de movimiento, pero en otra dirección.

Así, pues, el trabajo de la fuerza media del rozamiento viscoso por la longitud del «paso», es igual, aproximadamente, al valor doble de la energía cinética media del movimiento térmico:  $F_m L \approx 2\bar{\epsilon}_k$ .

Poniendo los valores medios de las magnitudes, tenemos

$$\frac{1}{2} \cdot 6\pi r\eta v L \approx 2 \cdot \frac{3}{2} kT.$$

Multipliquemos los dos miembros de la desigualdad por el tiempo de observación y tomemos en consideración, que  $vt \approx NL$ ; obtenemos  $\pi r\eta NL^2 \approx kTt$ .

Así, pues,

$$\Delta^2 = NL^2 = \frac{kT}{\pi r\eta} t.$$

Hemos obtenido la fórmula de Einstein, con ayuda de la que es posible determinar, mediante los resultados de la observación de la conducta de la partícula browniana, la constante de Boltzmann, y después la constante de Avogadro (§ 26.9). Semejantes experimentos fueron realizados en 1908—1913 por Perrin, que para el número de Avogadro obtuvo un valor seguro:

$$6 \cdot 10^{26} < N_A < 7 \cdot 10^{26}.$$

Estas obras clásicas jugaron un gran papel en la fundamentación de la física estadística.

## MAQUINAS TÉRMICAS

### § 29.1. Máquinas térmicas y el desarrollo de la técnica

El progreso de la humanidad está ligado del modo más estrecho con el desarrollo de la energética. La posesión de una nueva fuente de energía, el descubrimiento de nuevas vías de su transformación y utilización, este proceso es, por regla, toda una época en la historia de la cultura material.

Por ejemplo, el potente auge de la industria en el siglo XIX, estuvo relacionado con la invención del primer motor térmico, la máquina de vapor. La creación del motor de combustión interna fue la base para el desarrollo del transporte automóvil y la construcción de aviones. La turbina de gas literalmente ha provocado en las tres últimas décadas una revolución en la aviación, es decir, la sustitución de los aviones de poca velocidad con motores de pistón por las naves de retropropulsión y turbohélices, la velocidad de las cuales se aproximaba a la del sonido y en los últimos tiempos, a la supersónica. Con ayuda de motores térmicos de retropropulsión, se ha hecho realidad el sueño secular de la humanidad: la salida al espacio sideral.

La parte fundamental de la energía eléctrica se produce por centrales termoeléctricas, cuyos generadores se accionan por turbinas de vapor. En las centrales nucleares, la energía que se desprende durante las reacciones nucleares, también se transforma, primeramente, en energía del vapor que pone en movimiento la turbina de gas, accionando esta última el rotor del generador que produce la corriente eléctrica.

En el presente capítulo haremos uso de los principios de termodinámica para estudiar las propiedades generales de todas las máquinas térmicas y la destinación de sus conjuntos principales, así como para aclarar los parámetros que determinan su rendimiento y las vías de su aumento.

### § 29.2. Motor térmico

1. Todos los motores térmicos, independientemente de sus particularidades estructurales, resuelven un mismo problema, *la transformación de la energía interna en mecánica*. Con este objeto, la energía que se desprende al quemarse el combustible o bien en las reacciones nucleares, por medio de la transmisión de calor se comunica a cierto gas. Durante la expansión del gas, éste realiza trabajo contra las fuerzas externas, accionando un mecanismo cualquiera.

2. Es evidente que en el motor térmico el gas no puede expandirse de forma ilimitada, ya que la máquina tiene dimensiones finitas. Por lo tanto, después de la expansión



el gas tiene que ser, a continuación, comprimido, de manera que el propio gas y todas las piezas de la máquina retornen a su estado inicial. Después de esto, puede ser realizada la siguiente expansión, etc. Así, pues, hemos llegado a la conclusión de que *el motor térmico debe funcionar de modo cíclico*; en el transcurso del ciclo, tras el proceso de expansión del gas debe producirse su compresión hasta el estado inicial.

Los motores térmicos reales, funcionan, por regla, de acuerdo con el llamado *ciclo abierto*, cuando después de la expansión el gas se expulsa y se comprime una nueva cantidad de gas. No obstante, esto no influye notoriamente sobre la termodinámica de la transformación y más adelante consideraremos *un ciclo cerrado* cuando se realiza la expansión y compresión de una misma porción de gas.

3. Para que el motor efectúe durante el ciclo trabajo útil, es necesario que el trabajo de expansión sea mayor que el de compresión. En semejante caso, los cuerpos externos que rodean al motor, recibirán más energía mecánica que la que ceden durante la compresión. Mostremos que con este objeto, la temperatura del gas al comprimirse debe ser menor que al dilatarse. Para demostrar esto, retornemos de nuevo a las figs. 27.2 y 27.3 (pág. 311). Los estados inicial y final del gas durante la expansión y la compresión coinciden; por consiguiente, el trabajo de compresión será menor que el de expansión sólo cuando en todos los estados intermedios la presión en el proceso de compresión sea menor que en el proceso de expansión, lo que es sólo posible en el caso, cuando en todos los puntos intermedios la temperatura del gas con la compresión es más baja que con la expansión.

Examinemos la fig. 29.1. Aquí el trabajo de expansión es numéricamente igual al área del trapecio curvilíneo, limitado por arriba por la gráfica de dependencia entre la presión y el volumen en el proceso de expansión, es decir, por *la curva de expansión*. El trabajo de compresión es el área del trapecio curvilíneo limitado por arriba por *la curva de compresión*. Para acabar, el trabajo útil se repre-

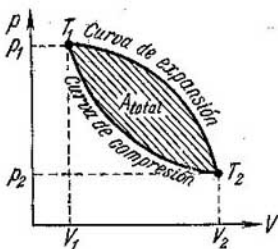


Fig. 29.1.

senta por el área que en la figura está rayado; este área se encuentra limitada por la gráfica del ciclo, o sea, por las curvas de expansión y compresión.

### § 29.3. Estructura esquemática y balance energético de motor térmico

1. Basándonos en los anteriores razonamientos podemos examinar el esquema de todo motor térmico, independientemente de sus particularidades estructurales y de las transformaciones energéticas que son en él características.

Cualquier motor térmico consta de tres partes fundamentales: sustancia de trabajo, calentador y refrigerador (fig. 29.2). Como sustancia de trabajo se hace uso de cualquier gas (o vapor), a cuenta de la expansión del cual realizase el trabajo. La sustancia de trabajo recibe cierta cantidad de calor  $Q_1$  del calentador, que es un cuerpo en el que se mantiene alta temperatura  $T_1$  constante por medio del quemado del combustible o bien por las reacciones nucleares. Por fin, durante su compresión el gas cede cierta cantidad de calor  $Q_2$  al refrigerador, que es un cuerpo cuya temperatura  $T_2$  siempre es constante e inferior a la temperatura de calentador. Por esta razón, la presión del gas al comprimirse es más baja que al dilatarse, lo que, como fue mostrado en el párrafo anterior, es condición obligatoria para el funcionamiento exitoso del motor.

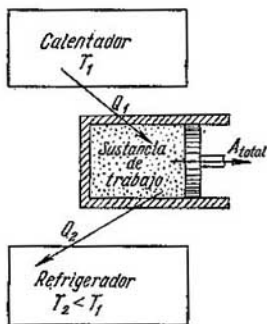


Fig. 29.2.

Notemos, que como refrigerador puede ser utilizado el medio ambiente, como sucede en los motores de combustión interna y en los de retroimpulsión.

2. Obtenemos el balance de energía por ciclo basándonos en el primer principio de termodinámica (27.6). Como al finalizar el ciclo la sustancia de trabajo retorna a su estado inicial, su energía interna no varía:  $\Delta U = U_2 - U_1 = 0$ . De aquí

$$Q_1 = Q_2 + A_{\text{total}} + Q_{\text{pér}}, \quad (29.1)$$

donde  $Q_{\text{pér}}$  es la energía que se pierde durante el ciclo por el intercambio de calor con el medio ambiente, por el rozamiento, etc. De aquí se desprende que al trabajo útil que realiza el motor por ciclo,

$$A_{\text{total}} \leq Q_1 - Q_2, \quad (29.2)$$

donde la desigualdad caracteriza las máquinas reales, mientras que la igualdad, las perfectas (ideales), ya que en ellas no hay pérdidas.

3. Recibe el nombre de *rendimiento de un motor*  $\eta$  la razón entre el trabajo útil y la energía que la sustancia de trabajo recibe del calentador, es decir, la cantidad de calor  $Q_1$ :

$$\eta = \frac{A_{\text{total}}}{Q_1} \leq \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (29.3)$$

De (29.3) se desprende que incluso para un motor térmico perfecto, que funciona sin pérdidas, el rendimiento, en principio, es menor que el 100%. Pudiera ser igual al 100% sólo en el caso de que en el transcurso del ciclo no se cediera energía al refrigerador, es decir, si  $Q_2$  pudiese ser igual a cero. Pero ya hemos dicho que esto es imposible, ya que en el proceso de compresión es preciso el enfriamiento del gas, para lo que se necesita transmitir al refrigerador una cantidad de calor  $Q_2 \neq 0$ .

#### § 29.4. Motor térmico y segundo principio de termodinámica

1. Basándose en el análisis del principio de trabajo del motor térmico, Thomson y Planck llegaron a una conclusión que se formula como el principio de imposibilidad:

*Es imposible conseguir un proceso, cuyo único resultado fuese el enfriamiento del calentador y la transformación íntegra de la cantidad de calor recibido en trabajo.*

Se puede mostrar que el principio de imposibilidad de Thomson—Planck es un corolario del segundo principio de termodinámica. En efecto, la transformación de la energía interna en mecánica es un proceso de transición del sistema de un estado con movimiento desordenado de las moléculas a otro estado con su movimiento ordenado. Pero

con semejante transformación la entropía del sistema debe menguar, lo que contradice al segundo principio de termodinámica. Por esta causa, la transformación de la energía interna en mecánica no puede ser un proceso *único*. Junto con él debe transcurrir otro proceso que provoque el crecimiento de la entropía y *que compense la disminución de ésta* al transformarse la energía interna en mecánica.

2. Aunque con la expansión isotérmica de un gas perfecto, el trabajo de un gas coincide íntegramente con la cantidad de calor recibida (§ 27.6), este fenómeno no provoca la disminución de la entropía del sistema. La cuestión reside en que el propio proceso de expansión del gas es acompañado por el aumento de la entropía. Este proceso de compensación liquida la imposibilidad impuesta por el segundo principio.

Esto también es aplicable al funcionamiento del motor térmico. En efecto, en el transcurso del ciclo no sólo se enfría el calentador (foco caliente) y se realiza trabajo, sino que además, una parte de la energía se transmite al refrigerador (foco frío). Precisamente este proceso de compensación elimina la imposibilidad impuesta por el segundo principio de termodinámica al fenómeno de transformación de la energía interna en mecánica.

3. El principio de imposibilidad de Clausius (§ 28.9), el principio de imposibilidad de Thomson—Planck y el principio de crecimiento de la entropía son tres enunciaciones equivalentes del segundo principio de termodinámica.

Con frecuencia, los principios primero y segundo de termodinámica se enuncian como leyes que prohíben la creación de los móviles perpetuos.

*Primer principio:* es imposible el móvil perpetuo de primera especie (perpetuum mobile I), es decir, una máquina que realizase trabajo periódico sin recibir energía de otras fuentes.

*Segundo principio:* es imposible el móvil perpetuo de segunda especie (perpetuum mobile II), es decir, una máquina que realizase trabajo periódico sólo a cuenta del enfriamiento de un foco de calor, por ejemplo, la corteza terrestre o el océano que tienen una colosal reserva de energía interna, sin transmitir calor al cuerpo más frío.

## § 29.5. Ciclo de Carnot

1. Para simplificar el análisis del principio de funcionamiento del motor térmico, así como para calcular su rendimiento, examinemos un experimento mental puesto por Carnot.

En la máquina idealizada de Carnot, la sustancia de trabajo era un gas ideal. Al comenzar el ciclo, la sustancia de trabajo tiene igual temperatura  $T_1$  que el calentador. Este estado se representa en la gráfica por el punto 1 (fig. 29.3)

Como el gas está en contacto con el calentador, éste se expande de modo isotérmico, recibe una cantidad de calor  $Q_1$  y pasa al estado 2. A continuación, su expansión transcurre adiabáticamente hasta el estado 3. Su temperatura disminuye y toma el valor  $T_2$ , que es la temperatura del refrigerador. Tras la expansión sigue la compresión del gas. Hallándose en contacto con el refrigerador, por la acción de las fuerzas externas, el gas se comprime isotérmicamente del estado 3 al 4, cediendo al refrigerador la cantidad de calor  $Q_2$ . Más adelante, por medio de la compresión adiabática, la temperatura del gas aumenta hasta la inicial. El ciclo se cierra y la sustancia de trabajo vuelve al estado inicial.

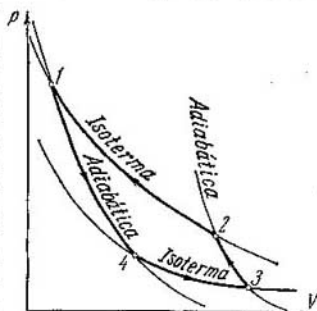


Fig. 29.3.

2. El ciclo de Carnot es de por sí la idealización del ciclo de una máquina térmica real. Se supone que aquí no hay pérdidas de energía para el intercambio de calor con el medio ambiente, que en la máquina no hay rozamiento y que los procesos de expansión y compresión del gas transcurren de modo casiestático y, por lo tanto, el ciclo es reversible. De aquí sigue, que durante el ciclo la variación general de la entropía de todo el sistema es igual a cero.

Veamos cómo varía la entropía de las partes aisladas del sistema.

Es natural que la entropía de la sustancia de trabajo no

cambia, puesto que retorna al estado inicial. La entropía de los cuerpos circundantes tampoco varía, ya que no toman parte en el intercambio de calor y los procesos mecánicos no provocan el cambio de la entropía. La del calentador, según (28.7), decrece en la magnitud  $\Delta S_{\text{cal}} = -Q_1/T_1$ , mientras que la entropía del refrigerador crece en la magnitud  $\Delta S_{\text{ref}} = Q_2/T_2$ . Pero como la variación de la entropía de todo el sistema  $\Delta S = 0$ ,

$$\Delta S = \Delta S_{\text{cal}} + \Delta S_{\text{ref}} = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (29.4)$$

De aquí se deduce que  $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$ , o bien

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (29.5)$$

3. De acuerdo con (29.3) y (29.5), para una máquina perfecta que funciona según el ciclo reversible de Carnot,

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (29.6)$$

Hemos obtenido un resultado de importancia fundamental: *el rendimiento de una máquina perfecta que trabaja según el ciclo reversible de Carnot, es definido sólo por las temperaturas del calentador y el refrigerador.*

### § 29.6. Rendimiento de un motor real

1. En todo motor real hay pérdidas. Además, los procesos que en él transcurren son irreversibles. Es natural, que la entropía crece en el transcurso del ciclo:  $\Delta S > 0$ . La expresión (29.4) se transforma en una desigualdad:

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} > 0. \quad (29.7)$$

De esto se desprende que para un motor térmico que trabaja por un ciclo irreversible

$$\frac{Q_2}{Q_1} > \frac{T_2}{T_1}. \quad (29.8)$$

2. De acuerdo con (29.3), el rendimiento de una máquina real es expresada por la desigualdad  $\eta < 1 - Q_2/Q_1$ . Si en esta expresión sustituimos el sustraendo, es decir,  $Q_2/Q_1$  por la fracción menor  $T_2/T_1$ , la desigualdad crecerá. Así,

pues,

$$\eta < 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (29.9)$$

Vemos que el rendimiento de un motor térmico real siempre es menor que el de la máquina de Carnot que funciona en el mismo intervalo de temperaturas, o sea,

$$\eta < \eta_{\text{Carnot}}. \quad (29.10)$$

3. Debemos prestar atención a la diferencia en principio entre los motores térmicos y las máquinas mecánicas o eléctricas. Perfeccionando estas últimas aproximamos su rendimiento al valor teórico límite del 100%. Aunque en condiciones reales este límite es inaccesible, podemos aproximarnos a él disminuyendo las pérdidas. Mediante el perfeccionamiento de los motores térmicos, acercamos su rendimiento no al 100%, sino que al rendimiento de la máquina de Carnot que trabaja en el mismo intervalo de temperaturas. De aquí se desprende, que el factor decisivo en el proceso de elevación del rendimiento de un motor térmico es el aumento de la temperatura del calentador y la disminución de la del refrigerador.

Es lógico, que la reducción de toda especie de pérdidas también lleva al aumento del rendimiento del motor térmico, pero el método más eficaz es el incremento de la diferencia de temperaturas del calentador y refrigerador.

### § 29.7. Ciclo inverso de Carnot

1. El ciclo de Carnot es reversible, por lo tanto, puede transcurrir en sentido inverso. Estudiemos qué efecto energético obtenemos en semejante caso.

Supongamos que la sustancia de trabajo, cuyo estado está representado en la fig. 29.4 por el punto 1, se expande adiabáticamente hasta el estado que representa el punto 4. Con ello, la temperatura del gas disminuye hasta la de la cámara refrigeradora  $T_2$ . Seguidamente, la sustancia de trabajo dilátase isotérmicamente hasta el estado 3, realizando trabajo de expansión y absorbiendo de la cámara refrigeradora una cantidad de calor  $Q_2$ . El gas, pasa del estado 3 al estado 2 por compresión adiabática y su temperatura aumenta hasta la del calentador  $T_1$ . Por fin, la sustancia de trabajo pasa del estado 2 al estado 1 mediante su compre-

sión isotérmica a cuenta del trabajo que realizan las fuerzas exteriores. Con esto, la sustancia de trabajo comunica al calentador cierta cantidad del calor  $Q_1$ .

El esquema general de la transformación de la energía está representada en la fig. 29.5.

2. Como en el ciclo inverso la compresión de la sustancia de trabajo transcurre a temperatura más alta, que la

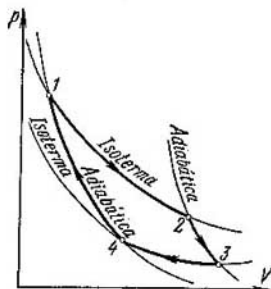


Fig. 29.4.

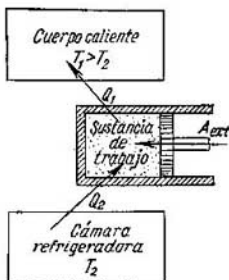


Fig. 29.5.

expansión, el trabajo de compresión es mayor que el de expansión. Por lo tanto, durante el ciclo las fuerzas exteriores realizan trabajo positivo:

$$A_{ext} = A_{com} - A_{exl} > 0. \quad (29.11)$$

De acuerdo con (27.23)  $Q_1 = A_{comp}$ ,  $Q_2 = A_{ext}$ . Poniendo en la anterior expresión estos valores, obtenemos que  $A_{ext} = Q_1 - Q_2$ , o bien

$$Q_1 = Q_2 + A_{exp}. \quad (29.12)$$

3. Así, pues, como resultado del ciclo dado, cierta cantidad de calor pasa del foco frío al foco con temperatura más alta. Puede parecer que esto contradice al segundo principio de termodinámica (§ 28.9). Sin embargo, es fácil cerciorarse de que no es así. El paso de la energía en forma de calor del foco frío al caliente es un proceso que provoca la disminución de la entropía. El segundo principio de termodinámica, prohíbe semejante transformación si es *única*. Sin embargo, en el caso del ciclo inverso de Carnot que examinamos, transcurre un proceso más: la transformación de la energía mecá-



nica de los cuerpos circundantes en la energía interna del calentador, lo que se acompaña del aumento de la entropía.

Resulta que el proceso de crecimiento de la entropía a cuenta de la transformación de la energía mecánica en interna, compensa la disminución de la entropía al transferir el calor del refrigerador al calentador. El proceso de compensación elimina la imposibilidad que impone el segundo principio de termodinámica y hace posible el transcurso del ciclo inverso de Carnot.

4. Como quiera que el ciclo de Carnot es reversible, la variación total de la entropía durante el ciclo de Carnot es nula. Por lo tanto, la correlación (29.5) queda también válida para el ciclo inverso de Carnot.

Si, por lo contrario, un ciclo inverso se realiza de modo irreversible, la expresión (29.7) en cierto grado cambiará. En lugar de (29.7), obtendremos

$$\Delta S = -\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} > 0, \quad (29.13)$$

de donde

$$\frac{Q_2}{Q_1} < \frac{T_2}{T_1}. \quad (29.14)$$

No obstante, también en este caso el rendimiento del ciclo real es inferior al del ciclo de Carnot.

## § 29.8. Instalación frigorífica y bomba térmica

1. Si la máquina de Carnot es una idealización del motor térmico, el ciclo inverso de Carnot es de por sí la idealización del ciclo de otras dos máquinas térmicas, a saber: la instalación frigorífica y la bomba térmica.

La *instalación frigorífica* sirve para mantener en la cámara refrigerante una temperatura inferior a la del medio ambiente. Esto resulta posible si la sustancia de trabajo de la máquina térmica se hace pasar por un ciclo inverso, análogo al inverso de Carnot. La sustancia de trabajo de la instalación frigorífica suelen ser, por regla, los vapores de líquidos de fácil ebullición, amoníaco, freón, etc. A la máquina se le transmite la energía de la red eléctrica. A cuenta de dicha energía se realiza el proceso de «bombeo del calor» de la cámara refrigerante a los cuerpos más calientes, o sea, al medio ambiente. Para valorar la eficacia de la instalación frigorífica, halleemos la razón entre la

cantidad de calor, ganado de la cámara refrigerante en el transcurso del ciclo, y el trabajo de las fuerzas externas:

$$k = Q_2/A.$$

Haciendo uso de las correlaciones (29.12) y (29.14), nos cercioramos con facilidad que

$$k = \frac{Q_2}{A} \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \quad (29.15)$$

donde el signo de igualdad se refiere al ciclo reversible y el de desigualdad, al irreversible. Debemos indicar, que mientras menor es la diferencia de temperaturas entre la cámara refrigerante y el medio ambiente, tanto menos energía mecánica (o eléctrica) hay que consumir para «bombear el calor» del cuerpo frío al caliente. Hay que prestar atención al hecho de que  $k = Q_2/A$  puede ser mayor que el 100%. Esto no contradice de ningún modo al factor de que el rendimiento del motor térmico siempre es considerablemente menor que el 100%.

2. La instalación frigorífica puede ser utilizada como *bomba térmica* para la calefacción.

Si una habitación se calienta por electrocalentadores corrientes, la cantidad de calor desprendida de los elementos calentadores es con exactitud igual al consumo de energía eléctrica. Pero si esta energía se utiliza para poner en funcionamiento una instalación frigorífica en la que sirve de calentador el local que se calienta, mientras que la cámara refrigerante de la atmósfera exterior, el local que se calienta recibirá más calor que el que se desprendería al transformar directamente la energía eléctrica en interior de los calentadores del tipo de infiernillos eléctricos, calentadores eléctricos, etc. En efecto, cuando en la máquina no hay pérdidas, la cantidad de calor recibida por el local que se calienta  $Q_1 = Q_2 + A$ , donde  $A$  es el consumo de energía eléctrica,  $Q_2$ , la cantidad de calor que se transfiere de la atmósfera exterior al local. En una instalación real, gracias a las pérdidas,  $Q_1 < Q_2 + A$ . Pero a pesar de todo, aún habiendo pérdidas, con una buena estructura de la bomba térmica se puede obtener  $Q_1 > A$ .

3. La eficacia de la bomba térmica se determina por la razón entre la cantidad de calor que ha recibido el local que se calienta y el consumo de energía eléctrica. Recomendamos que el lector, haciendo uso de las correlaciones anteriores, muestre por su cuenta que

$$k = \frac{Q_1}{A} \leq \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (29.16)$$

Notemos, que con el ciclo inverso la eficacia del bombeo de calor siempre es superior al 100%.

4. Así, pues, el motor térmico, la instalación frigorífica y la bomba térmica, son tres tipos de máquinas térmicas, cuyo funcionamiento se define por los primero y segundo principio de termodinámica. En adelante, tropezaremos con una serie de fenómenos, para cuya explicación haremos uso de estas leyes fundamentales de la naturaleza.

## PRINCIPIOS DE DINÁMICA DE LOS GASES

## § 30.1. Parámetros termodinámicos de un gas en movimiento

En el presente capítulo las leyes fundamentales de termodinámica serán aplicadas para el estudio de los fenómenos que transcurren en los gases en movimiento.

El estado de un gas en movimiento se determina no sólo por su presión, densidad y temperatura, sino que también por la velocidad de su movimiento. Por consiguiente, la

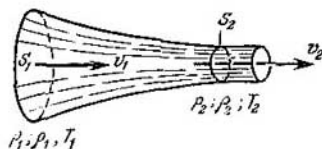


Fig. 30.1

velocidad  $v$ , la presión  $p$ , la densidad  $\rho$  y la temperatura  $T$ , son los cuatro parámetros termodinámicos cuya variación define todos los procesos que tienen lugar en el gas.

Sea que un gas fluye por cierto tubo de sección variable (fig. 30.1). En semejante caso, los parámetros termodinámicos serán diferentes en cada sección.

Si en toda sección del tubo los parámetros termodinámicos del gas no dependen del tiempo, semejante movimiento recibe el nombre de *estacionario* o *estable*. Por lo contrario, si los parámetros cambian con el tiempo, se dice que ese movimiento es *no estacionario*.

Más adelante examinaremos sólo la corriente estacionaria de un gas a velocidades mucho menores que la de la luz ( $v \ll c$ ).

## § 30.2. Ecuación de continuidad

1. Recibe el nombre de *consumo* de un líquido o gas la masa de materia que pasa por la sección transversal del tubo en el transcurso de la unidad de tiempo:

$$\mu = dm/dt. \quad (30.1)$$

Si en cierta sección de área  $S$  la velocidad de la corriente es igual a  $v$ , durante el tiempo  $dt$  por dicha sección pasará un volumen de gas  $dV = Sv dt$ . La masa de dicho gas será  $dm = \rho Sv dt$ . Poniendo este valor de  $dm$  en (30.1), para el consumo obtenemos la siguiente expresión:

$$\mu = \rho Sv. \quad (30.2)$$

2. De la ley de la conservación de la masa se desprende que *para la corriente estacionaria, el consumo en cualquier sección del tubo es una magnitud constante*. En efecto, si, por ejemplo, por la sección  $S_1$  en la figura 30.1 entrara por segundo más gas del que sale por la sección  $S_2$ , su masa dentro de dicho volumen crecería con el tiempo. Esto provocaría el aumento de la densidad y la presión del gas y, en fin de cuentas, la variación de la velocidad de la corriente, lo que significaría la violación del carácter estacionario del flujo.

Así pues, para las corrientes estacionarias (uniformes) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2. \quad (30.3)$$

Esta ecuación expresa la ley de la conservación de la masa de la materia: denominase *ecuación de continuidad de la corriente*.

3. En la dinámica de los líquidos (hidrodinámica) y de los gases ha sido aceptada la siguiente terminología. La sustancia que fluye por el tubo se llama *fluido* independientemente del estado de agregación en que se encuentre: líquido o gaseoso. Distinguimos *los fluidos compresibles* (por regla, estos son los gases) e *incompresibles*, es decir, los llamados líquidos en gotas, así como los gases en aquellos casos cuando su compresibilidad puede ser despreciada (§ 30.6).

4. Para un líquido incompresible  $\rho_1 = \rho_2 = \text{const}$ , de donde se deduce que

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (30.4)$$

### § 30.3. Ecuación de la cantidad de movimiento

1. Con la corriente estacionaria, la cantidad de movimiento de cierta masa de gas en la sección dada es una magnitud constante. Al pasar a otra sección, la cantidad de movimiento varía a cuenta de la acción de las fuerzas de la presión y de las del rozamiento interno (viscosidad).

De por sí, es un problema de exclusiva dificultad la determinación de las fuerzas del rozamiento interior. Ciertas indicaciones a este respecto haremos al final del capítulo § 30.16). Aquí, vamos a desprestigiar la viscosidad del gas (y sólo tomaremos en consideración las fuerzas de la presión. El líquido en el que no se tiene en cuenta las fuerzas del rozamiento interno reciben el nombre de *ideal* o *perfecto*.

2. De acuerdo con la ecuación fundamental de dinámica (7.2) la variación de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo es igual a fuerza que actúa; recordando que la velocidad del fluido en la sección dada es constante, tenemos

$$F_1 - F_2 = \frac{dm \cdot v_2 - dm \cdot v_1}{dt}, \quad (30.5)$$

donde  $F_1 = p_1 S_1$  y  $F_2 = p_2 S_2$  son las fuerzas de la presión en las secciones  $S_1$  y  $S_2$ . Pero según (30.1) y (30.2)  $dm/dt = \rho S v$ . Poniendo en (30.5), se obtiene

$$p_1 S_1 - p_2 S_2 = \rho_2 S_2 v_2^2 - \rho_1 S_1 v_1^2,$$

o bien

$$S_1 (p_1 + \rho_1 v_1^2) = S_2 (p_2 + \rho_2 v_2^2). \quad (30.6)$$

La fórmula (30.6) recibe el nombre de *ecuación de la cantidad de movimiento para un líquido ideal compresible*.

### § 30.4. Ecuación de Bernoulli

1. Apliquemos al flujo de gas la ley de la conservación de la energía, es decir, el primer principio de termodinámica (21.9). Considerando el gas como un líquido ideal compresible, no vamos a tomar en cuenta las fuerzas del rozamiento interno. Las transformaciones que transcurren en el gas las consideraremos adiabáticas.

En la sección  $S_1$  (véase la fig. 30.1) la masa del gas  $dm$  tiene energía cinética  $K_1 = dm \cdot v_1^2/2$  y energía interna  $U_1 = dm \cdot c_v T_1$ ; la sección  $S_2$  tiene, respectivamente,  $K_2 = dm \cdot v_2^2/2$  y  $U_2 = dm \cdot c_v T_2$ . Entonces, la variación de la energía total del gas al pasar de la sección  $S_1$  a  $S_2$ , será expresada:

$$\Delta \mathcal{E} = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = \frac{dm \cdot v_2^2}{2} + dm \cdot c_v T_2 - \frac{dm \cdot v_1^2}{2} - dm \cdot c_v T_1.$$

El trabajo elemental realizado por el gas,

$$\Delta A = p_2 dV_2 - p_1 dV_1,$$

donde  $dV_1$  y  $dV_2$  son los volúmenes de las masas dadas de gas en las secciones  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente. Sustituyendo en (21.9) y teniendo en cuenta que durante la transformación adiabática no hay intercambio de calor, es decir,  $Q = 0$ , tenemos

$$\frac{dm \cdot v_2^2}{2} - \frac{dm \cdot v_1^2}{2} + dm \cdot c_V T_2 - dm \cdot c_V T_1 + p_2 dV_2 - p_1 dV_1 = 0.$$

Dividamos ambos miembros de la igualdad por  $dm$  y tomemos en consideración que  $dm/dV = \rho$  es la densidad del gas. Pasando todos los términos con el índice 1 a uno de los miembros de la igualdad y con el índice 2, a otro, obtenemos

$$\frac{v_1^2}{2} + c_V T_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + c_V T_2 + \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (30.7)$$

Esta fórmula es la ecuación de la energía (o de Bernoulli) para el flujo de un gas ideal, es decir, para un líquido perfecto compresible.

2. Poniendo en (30.7) el valor de la presión  $p = R\rho T/M$  (véase (26.18)) y considerando que  $c_p = c_V + (R/M)$ , obtendremos

$$\frac{v_1^2}{2} + c_p T_1 = \frac{v_2^2}{2} + c_p T_2. \quad (30.8)$$

Haciendo uso del valor (26.18), nos dará

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{M c_p}{R} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{M c_p}{R} \frac{p_2}{\rho_2}.$$

Pero  $\frac{M c_p}{R} = \frac{c_p}{c_p - c_V} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ , ya que  $\frac{c_p}{c_V} = \gamma$ . Así pues,

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (30.9)$$

Esta expresión para la ecuación de Bernoulli nos será necesaria más adelante.

3. Cuando un líquido ideal incompresible está en movimiento, su densidad y temperatura quedan invariables. Haciendo en la igualdad (30.7)  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  y  $T_1 = T_2$ , tendremos

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2. \quad (30.10)$$

Esta es la ecuación de Bernoulli para un líquido ideal incompresible.

### § 30.5. Velocidad de propagación de perturbaciones elásticas

1. Imaginémonos que en cierta capa de un gas inmóvil la presión creció inesperadamente a causa de la rápida compresión o calentamiento. A cuenta del exceso de presión, esta capa comenzará a expandirse, transmitiendo el impulso de presión a las demás capas. La compresión de estas capas se transmitirá más adelante y en el gas surgirá una *onda de perturbaciones elásticas*.

Semejante fenómeno puede ser observado si tiramos una piedra al agua. Aquí la perturbación se transmite de capa

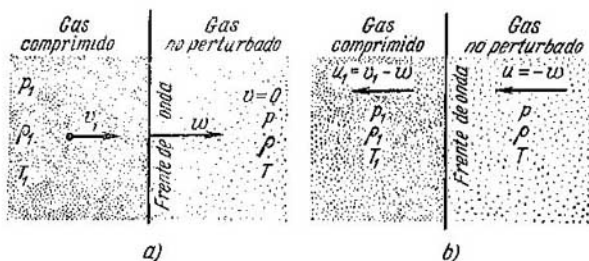


Fig. 30.2.

en capa y por el agua corre una onda superficial (circular).

Recibe el nombre de *frente de onda* una superficie en la que por todos los puntos los parámetros termodinámicos (velocidad, densidad, presión y temperatura) del gas tienen iguales valores. *Velocidad de desplazamiento del frente de onda (velocidad de onda)  $w$*  se denomina la velocidad de transmisión de la perturbación elástica de capa a capa (fig. 30.2, a)

2. Para calcular la velocidad de onda es cómodo pasar a un sistema de referencia que se mueva junto con el frente de onda (fig. 30.2, b).

En efecto, en el sistema de referencia ligado al gas no perturbado, el proceso de propagación de la onda es no estacionario, ya que los parámetros de gas cambian con el tiempo. En lo que se refiere al sistema de referencia en movimiento junto con el frente de onda, el proceso es estacionario y a él puede ser aplicada la ecuación de continuidad, de

cantidad de movimiento y de energía, que hemos estudiado en los párrafos anteriores.

En el sistema de referencia relacionado con el frente de onda el gas no perturbado alcanza el frente de onda a una velocidad  $u = -w$ , el gas comprimido se retarda respecto del frente de onda y se desplaza a una velocidad  $u_1 = v_1 - w$  (fig. 30.2, b). Aplicando al flujo la ecuación de continuidad (30.3) y de la cantidad de movimiento (30.6), obtenemos

$$\rho u = \rho_1 u_1, \quad p + \rho u^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2. \quad (30.11)$$

Expresando en la primera igualdad  $u_1 = \rho u / \rho_1$  y poniéndola en la segunda, para la velocidad de propagación del frente de onda obtenemos la siguiente expresión

$$w = |u| = \sqrt{\frac{\rho_1 p_1 - p}{\rho \rho_1 - \rho}} = \sqrt{\frac{\rho_1 \Delta p}{\rho \Delta \rho}}. \quad (30.12)$$

3. En los gases son posibles ondas de dos tipos: de choque y sonoras.

La *onda de choque* se caracteriza por que en el frente de onda los parámetros termodinámicos varían a salto y la diferencia de presión  $p_1 - p$  y de densidad  $\rho_1 - \rho$  pueden ser muy considerables. Por esta causa, decimos que el frente de onda es un salto de compresión.

Las *ondas sonoras* son de por sí ondas de débil perturbación. Las diferencias de presiones y densidades son unas magnitudes muy pequeñas:  $dp \ll p$  y  $d\rho \ll \rho$ . Por esta razón, en la fórmula (30.12) podemos hacer  $\rho_1 = \rho + d\rho \approx \rho$ , con lo que para la velocidad de la onda sonora se obtiene la siguiente expresión:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (30.13)$$

4. Las ondas sonoras se propagan con bastante rapidez y al pasar el frente de onda por un gas, el proceso de su compresión debe ser considerado adiabático. Esto permite introducir una expresión más cómoda para calcular la velocidad de la onda sonora.

Ecuación de una adiabática:  $pV^\gamma = \text{const}$  (véase (27.27)). La derivación nos da

$$dp \cdot V^\gamma + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0,$$

de aquí se desprende, que

$$dp/p = -\gamma dV/V. \quad (30.14)$$

La densidad del gas  $\rho = m/V$ . Suponiendo que la masa del gas no varía, obtenemos  $d\rho = -m dV/V^2$ . Dividiendo los dos miembros de



esta igualdad por la densidad, tendremos

$$d\rho/\rho = -dV/V. \quad (30.15)$$

Poniendo esta expresión en (30.14), obtenemos

$$\gamma d\rho/\rho = dp/p. \quad (30.16)$$

La velocidad del sonido, de acuerdo con (30.13) y (30.16) se expresará del modo siguiente:

$$a = \sqrt{\gamma p/\rho}, \quad (30.17)$$

o bien, teniendo en cuenta la ecuación de estado de un gas  $p = R\rho T/M$  (véase (26.18)), obtendremos

$$a = \sqrt{\gamma RT/M}. \quad (30.18)$$

De este modo, la *velocidad del sonido en un gas ideal* se determina en absoluto por su temperatura.

Conociendo que para el aire  $\gamma = 7/5$  (gas biatómico) y  $M = 29 \text{ kg/kmol}$ , recomendamos al lector que muestre por su cuenta que en este caso la velocidad del sonido

$$a = 20 \sqrt{T} \text{ [m/c]}.$$

### § 30.6. Cómo tener en cuenta la compresibilidad de un gas. Número de Mach

1. Hemos dicho más arriba que en ciertos casos podemos despreciar la compresibilidad del gas y suponer que su densidad es una magnitud constante. Introduzcamos un criterio que nos permite apreciar aquellas condiciones, cuando semejante simplificación del problema es posible.

El mayor crecimiento de la presión de un gas resultará, por lo visto, cuando el gas se frena por completo. Sean antes de frenarlo su velocidad  $v$ , su presión  $p$  y su densidad  $\rho$ . Después del frenado la velocidad será  $v_1 = 0$ , la presión  $p_1 = p + \Delta p$  y la densidad  $\rho_1 = \rho + \Delta \rho$ . De acuerdo con la ecuación de Bernoulli (30.9)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{p+\Delta p}{\rho+\Delta \rho} \right).$$

O bien:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{p+\Delta p}{\rho+\Delta \rho} - \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\Delta p}{\rho+\Delta \rho} \left( \frac{\Delta p}{\Delta p} - \frac{p}{\rho} \right).$$

Pero según (30.13) y (30.17)  $\Delta p/\Delta \rho \approx a^2$ ,  $p/\rho = a^2/\gamma$ . Sustituyendo en la anterior igualdad y tomando en considera-

ción que  $\Delta\rho \ll \rho$ , tenemos

$$\frac{v^2}{2} \approx \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\Delta\rho}{\rho} \left( a^2 - \frac{a^2}{\gamma} \right) = a^2 \frac{\Delta\rho}{\rho}.$$

2. Así pues, la variación relativa de la densidad del gas con el frenado total del flujo

$$\Delta\rho/\rho \approx v^2/2a^2. \quad (30.19)$$

La razón entre la velocidad del flujo  $v$  y la velocidad de propagación del sonido  $a$  recibe el nombre de *número de Mach*:

$$M = \frac{v}{a}. \quad (30.20)$$

El número de Mach es el criterio de compresibilidad de un gas. Precisamente de (30.19) se deduce que si el número  $M$  es pequeño,  $\Delta\rho \ll \rho$  y la compresibilidad del gas puede ser despreciada; si el número  $M$  es grande, la densidad del gas varía de modo notable, es decir, no podemos despreciar la compresibilidad del gas.

### § 30.7. Cono de Mach

1. Cualquier cuerpo que se mueva en un gas es de por sí fuente de ondas sonoras. Este cuerpo penetrando en el gas inmóvil, crea ante sí una zona de alta presión, lo que causa el surgimiento de ondas de perturbaciones elásticas. La forma de esta onda depende en alto grado de la velocidad con la que el cuerpo se mueve.

Para simplificar, examinemos primero una fuente puntual: un cuerpo cuyas dimensiones pueden ser despreciadas en nuestro caso.

2. Sea la velocidad de movimiento de un cuerpo  $v$  menor que la del sonido  $M = v/a < 1$ . El frente de la onda sonora es una esfera, cuyo centro se encuentra en un punto en el que se hallaba la fuente en el momento cuando excitó la onda. Sea, también, que en el momento inicial el cuerpo estaba en el punto  $O_1$ , después de pasar un segundo, en el punto  $O_2$  y al pasar un segundo más, en el punto  $O_3$ , etc. (fig. 30.3). Al pasar 4 s el cuerpo estará en el punto  $O_4$ . El frente de onda que salió de punto  $O_1$  es una esfera de radio  $R_1 = 4a$ ; del punto  $O_2$ , una esfera de radio  $R_2 = 3a$ ; del punto  $O_3$ , una esfera con radio  $R_3 = 2a$ , etc. En la

fig. 30.3 vemos que en este caso, el cuerpo se mueve todo el tiempo dentro de una onda esférica que siempre lo adelanta. El recorrido que pasa el cuerpo en un intervalo de tiempo  $t$ , es igual a  $l = vt$ ; es menor que el radio de la onda sonora esférica  $R = at$ .

Tendremos un resultado absolutamente diferente, si la velocidad de la fuente puntiforme  $v$  es mayor que la velocidad del sonido ( $M > 1$ ). Entonces, el cuerpo adelanta la onda sonora: el recorrido que pasa el cuerpo durante el tiempo  $t$ , es decir,  $l = vt$ , es mayor

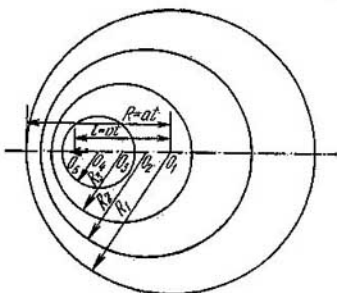


Fig. 30.3.

que el radio de la onda  $R=at$  (fig. 30.4). Pues bien, sea que el cuerpo, hallándose en el punto  $O_1$ , emite en el transcurso del primer segundo una onda

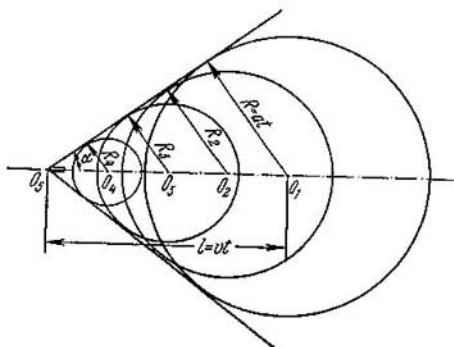


Fig. 30.4.

sonora; al pasar otro segundo, adelantando el frente de onda, se encontrará en el punto  $O_2$  y allí también emite una onda sonora, etc. Al pasar 4 segundos, el cuerpo estará en el punto

$O_5$ , adelantando a todas las ondas que el mismo emitió durante su movimiento. En tal caso, las ondas que emite el cuerpo al moverse forma una familia de esferas, que parece como si se hubiesen introducido en un cono, en cuyo vértice se halla la fuente puntual en movimiento. Este cono recibe el nombre de *cono de Mach* de perturbaciones débiles, en honor del científico que lo describió por primera vez. El ángulo de apertura de este cono (ángulo de Mach) como vemos en la figura 30.4, se define de la correlación

$$\text{sen } \alpha = R/l = a/v = 1/M. \quad (30.21)$$

### § 30.8. Onda de choque frontal

1. El caso de la fuente puntual, estudiada en el párrafo anterior, es de por sí una idealización muy simplificada de los fenómenos que surgen durante el movimiento en un gas

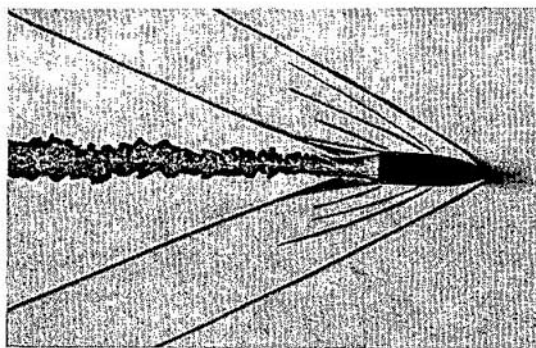


Fig. 30.5.

de un cuerpo a velocidad que supera la del sonido. Pero en realidad, delante del cuerpo de dimensiones finitas, surge una onda *de choque* frontal o salto de compresión, es decir, una capa muy fina de dimensiones del orden de la longitud del recorrido libre de las moléculas, en la cual a salto varían los parámetros termodinámicos del gas.

2. En el salto de compresión la densidad del gas varía bruscamente. Este fenómeno provoca el cambio considerable del coeficiente de refracción de los rayos luminosos, lo que mediante instalaciones especiales permite fotografiar la onda de choque frontal. En la fig. 30.5 está representada la foto de un salto oblicuo de compresión, que se forma delante de un campo cuniforme o cónico (para un número de Mach  $M \approx 2,5$ ).

### § 30.9. Resistencia de ondas

1. Como delante de un cuerpo que se mueve por un gas a velocidad supersónica surge un salto de compresión, el cuerpo sufre una resistencia mucho mayor que al moverse a una velocidad considerablemente menor que la del sonido. Una de las causas principales de la aparición de la resistencia es la diferencia de presiones en los bordes anterior y posterior del cuerpo aerodinámico (§ 11.8). Pero al crearse el salto de compresión, la presión en el borde delantero crece bruscamente, a consecuencia de lo cual aumenta también mucho la resistencia de presión. Ya que ésta se provoca por la onda de choque, recibe el nombre de resistencia *de onda* (de choque).

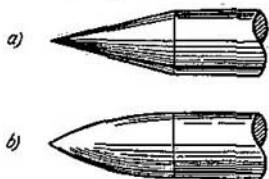


Fig. 30.6.

2. Para disminuir la resistencia de onda, al borde anterior del cuerpo que se mueve a velocidad supersónica se le

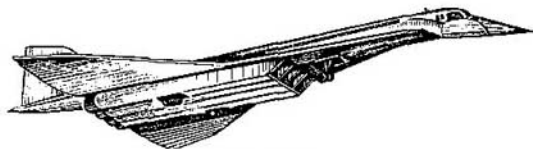


Fig. 30.7.

da la forma aguda, es decir, cónica (a) y ojival (b) (fig. 30.6), mientras que a los aviones de retropropulsión perfil flechado (fig. 30.7). El problema radica en que delante de un vértice obtuso surge un salto normal de compresión, en tanto en el

borde agudo se forma un salto oblicuo (fig. 30.5). Con el salto normal la velocidad varía de manera más intensa que con el salto oblicuo. De la ecuación de la cantidad de movimiento (30.6) sigue que mientras menor sea la variación de la velocidad del flujo, menor será también la diferencia de presiones. Precisamente por esta causa, la resistencia de onda (de choque) es mucho menor con el salto oblicuo de compresión que con el normal.

3. El surgimiento del salto de compresión se acompaña por el aumento de la entropía, con lo que la energía cinética del cuerpo en movimiento de modo irreversible se transforma en la energía interna del gas. Este fenómeno es utilizado para frenar las naves cósmicas en la atmósfera.

Precisamente este principio se utiliza durante el aterrizaje amortiguado de las naves cósmicas que, por ejemplo, retornan a la Tierra después de volar alrededor de la Luna. La alta precisión con la que se realiza el mando de la nave permite introducirla en la atmósfera terrestre bajo un determinado ángulo. Esto asegura el grado necesario de frenado y, al mismo tiempo, no provoca sobrecargas intolerables.

Durante el frenado de la nave cósmica, la atmósfera a su alrededor se calienta de forma considerable, hasta varias decenas de miles de grados. Por esta causa, la nave cósmica debe estar cubierta con una envoltura termoprotectora de materiales termorresistentes con conductividad térmica muy pequeña. Con este objeto se utilizan masas plásticas especiales.

### § 30.10. Tobera

1. Recibe el nombre de *tobera* un tubo en el que con la expansión del líquido se produce la transformación de su energía interior en energía cinética. A nosotros nos interesa a qué condiciones el flujo que sale por la tobera tiene la máxima velocidad. Para un líquido incompresible este problema se resuelve con facilidad: de (30.4) se deduce que la velocidad máxima será obtenida en el más estrecho sector del tubo. En lo que atañe a los gases, el resultado depende en alto grado de si el flujo es subsónico ( $M < 1$ ) o supersónico ( $M > 1$ ).

2. Si derivamos la ecuación de continuidad (30.2)  $\rho Sv = \text{const}$ , obtenemos

$$\rho v dS + Sv d\rho + \rho S dv = 0.$$

La división de la igualdad por  $\rho S v$ , nos da

$$\frac{dS}{S} + \frac{dp}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0. \quad (30.22)$$

Al derivar la ecuación de Bernoulli (30.9)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \text{const},$$

obtenemos

$$v dv + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho dp - p d\rho}{\rho^2} = 0,$$

pero de acuerdo con (30.13)  $dp = a^2 d\rho$  y según (30.17),  $p = \rho a^2 / \gamma$ .

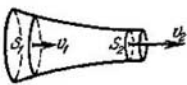
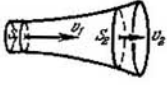
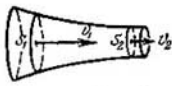
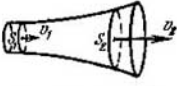
Sustituyendo en la fórmula anterior, después de una serie de reducciones, tendremos

$$d\rho/\rho = -v dv/a^2. \quad (30.23)$$

3. Haciendo uso de las igualdades (30.22) y (30.23), obtendremos una expresión que liga la variación de la velocidad del flujo al variar la sección de la tobera:

$$\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = 0$$

Tabla 30.1

	Tobera que se estrecha $S_2 < S_1, \Delta S < 0$	Tobera que se ensancha $S_2 > S_1, \Delta S > 0$
Flujo subsónico $M < 1$	 <p><math>v_2 &gt; v_1, \Delta v &gt; 0.</math> El flujo se acelera</p>	 <p><math>v_2 &lt; v_1, \Delta v &lt; 0.</math> El flujo se decelera</p>
Flujo supersónico $M > 1$	 <p><math>v_2 &lt; v_1, \Delta v &lt; 0.</math> El flujo se decelera</p>	 <p><math>v_2 &gt; v_1, \Delta v &gt; 0.</math> El flujo se acelera</p>

o bien

$$\frac{dv}{v} (1 - M^2) = - \frac{dS}{S}. \quad (30.24)$$

De esta expresión se desprende un importante corolario: si  $M < 1$ , el signo de  $dv$  es opuesto al de  $dS$ ; si  $M > 1$ , el signo de  $dv$  coincide con el de  $dS$ . Esto significa, que la velocidad del flujo subsónico crece al estrecharse la tobera y disminuye al ensancharse. Y viceversa, el flujo supersónico se acelera al ensancharse la tobera y decelera al estrecharse ésta (tabla 30.1).

La velocidad máxima en la parte más estrecha de la tobera no supera la velocidad local del sonido.

### § 30.11. Analogía entre la tobera y la máquina térmica

1. Supongamos que la tobera está unida a cierto recipiente (por ejemplo, a una caldera de vapor o a la cámara de combustión de una turbina de gas) en el que la presión  $p_0$ , la densidad  $\rho_0$  y la temperatura  $T_0$  de un gas ideal son constantes. Los parámetros correspondientes de la atmósfera circundante los designaremos por  $p_{at}$ ,  $\rho_{at}$  y  $T_{at}$ . El gas sale del recipiente y al fluir por la tobera se acelera. Designemos su velocidad al salir por la tobera con  $v$ . Esta velocidad puede ser hallada mediante la ecuación de Bernoulli (30.8), si tenemos en cuenta que la velocidad del gas en el recipiente  $v_0 = 0$ :

$$\frac{1}{2} v^2 + c_p T_{at} = c_p T_0,$$

de donde se desprende la expresión para la energía cinética de la masa unitaria del gas:

$$\frac{1}{2} v^2 = c_p (T_0 - T_{at}). \quad (30.25)$$

2. La velocidad máxima y correspondientemente el valor máximo de la energía cinética de la masa unitaria de gas, fueron obtenidas a condición de que  $T_{at} = 0$ , es decir, si el gas fluyera al vacío, donde la temperatura es igual al cero absoluto:

$$\frac{1}{2} v_{\text{máx}}^2 = c_p T_0. \quad (30.26)$$

En semejante caso, la energía interna del gas se convertiría por completo en cinética.

3. Hallemos la razón entre el valor de la energía cinética de la unidad de masa del gas y el valor máximo de dicha magnitud:

$$\eta = \frac{v^2}{v_{\text{máx}}^2} = \frac{T_0 - T_{at}}{T_0}. \quad (30.27)$$

La razón que hemos obtenido es igual al rendimiento del ciclo de Carnot para una máquina térmica que funciona en ese mismo intervalo de temperaturas. Expresa el coeficiente máximo de utilización de la energía interna de un gas que se encuentra en un recipiente.



## § 30.12. Tobera de Laval

1. Para que por una tobera salga un flujo supersónico, es preciso que ésta sea de forma conveniente perfilada. En realidad el gas sale del recipiente a pequeña velocidad, menor que la del sonido. Por consiguiente, para acelerar el flujo, de acuerdo con (30.24), es necesario que la tobera se estreche en el sector inicial. Con una diferencia suficientemente grande de presiones, la velocidad del flujo en el sector de la sección más estrecha, será igual a la velocidad local del sonido. Si, más adelante, la tobera se ensancha, según (30.24), el flujo continuará acelerándose.

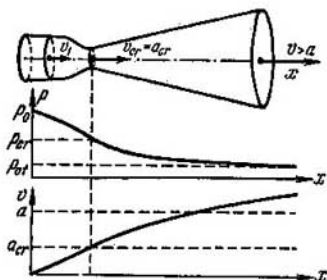


Fig. 30.8.

Recibe el nombre de *Laval* la tobera que trabaja en el régimen dado (fig. 30.8). Semejantes toberas son utilizadas en las turbinas de vapor y de gas, en los motores de retropropulsión y en los cohetes.

2. Cuando el gas fluye por la tobera de Laval, su presión, densidad y temperatura disminuyen de modo constante; de la correspondiente forma disminuye también su energía interna. A cuenta de esto, crece permanentemente la energía cinética del chorro y su velocidad puede superar en mucho la del sonido (fig. 30.8).

2. Cuando el gas fluye por la tobera de Laval, su presión, densidad y temperatura disminuyen de modo constante; de la correspondiente forma disminuye también su energía interna. A cuenta de esto, crece permanentemente la energía cinética del chorro y su velocidad puede superar en mucho la del sonido (fig. 30.8).

## § 30.13. Motor de retropropulsión

1. La tobera de Laval es el elemento fundamental de cualquier motor de retropropulsión. En efecto, para conseguir una gran fuerza reactiva de empuje es preciso que la velocidad de salida del chorro sea la máxima posible (véase (15.8)). Sólo mediante la tobera de Laval puede ser obtenida una gran velocidad supersónica de salida del gas.

Los motores de retropropulsión son de diferentes estructuras. Nosotros vamos a limitarnos al estudio del motor más sen-

cillo, es decir, el estatorreactor. En la fig. 30.9 está representado un motor del tipo que examinamos.

2. El estatorreactor funciona correctamente y ofrece suficiente empuje si se desplaza a velocidad supersónica. Para simplificar los razonamientos pasemos al sistema de re-

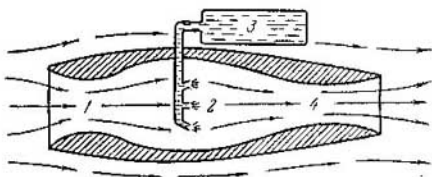


Fig. 30.9.

ferencia ligado con el motor. En dicho sistema de referencia el aire incide sobre la tobera de entrada a una velocidad que supera la del sonido. En la región 1 tras la tobera de entrada, se forma uno o varios saltos de compresión, por lo que la velocidad se hace menor que la del sonido. El flujo sub-

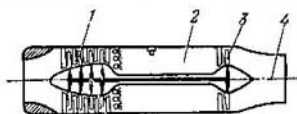


Fig. 30.10.

sónico, que se mueve a lo largo de un canal que se ensancha, es frenado más aún, su velocidad disminuye, mientras que la presión, densidad y temperatura crece. En la región 2, llamada cámara de combustión, al aire comprimido se pulveriza el combustible del depósito 3. La energía que se desprende durante su combustión va dirigida al aumento de la energía interior del gas. De la cámara de combustión el gas pasa a la tobera de Laval 4. Si en la cámara de combustión son bien elegidos los parámetros termodinámicos del gas en la región del estrechamiento máximo de la tobera la velocidad del chorro será igual a la velocidad local del sonido, mientras que de la tobera de salida saldrá un chorro supersónico.

Indiquemos que el estatorreactor es de muy sencilla estructura y altamente fiable. No obstante, puede funcionar sólo en el caso de que sea acelerado previamente hasta una velocidad supersónica. Con este objeto pueden ser utilizados cohetes de impulsión,

3. En la fig. 30.10 está representado el esquema de un turbocompresor de chorro de aire. Puede funcionar a toda clase de velocidades, entre ellas a pequeñas. Este se distingue del estatorreactor, ya que en él la compresión del aire se realiza mediante el compresor 1. La energía del chorro tras la cámara de combustión 2 se utiliza parcialmente en la turbina de gas 3, que pone en rotación el compresor y, a veces, la hélice. La parte restante de la energía se emplea para crear el empuje en la tobera 4, dispuesta detrás de la turbina.

### § 30.14. Ala de avión

1. Una placa, circundada por un líquido o gas y perfilada de forma que la fuerza de sustentación es mucho mayor que la resistencia, recibe el nombre de *ala*. En función de la velocidad de movimiento para la que está destinada el ala, la forma de ésta varía: en los aviones, cuya velocidad es menor que la del sonido, el perfil del ala tiene el aspecto mostrado en la fig. 30.11, *a* y *b*; en los aviones supersónicos, el borde delantero del ala está aguzado (fig. 30.11, *c*) con objeto de disminuir la resistencia de ondas (de choque) (§ 30.9).

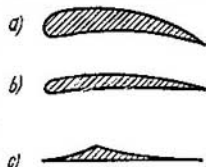


Fig. 30.11.

2. La causa del surgimiento de la fuerza de sustentación, puede ser explicada cualitativamente basándonos en la ecuación de Bernoulli. Al circundar el ala, el flujo de gas se ramifica. El ala tiene forma asimétrica: por arriba convexa, por abajo o ligeramente concava, o bien plana. Gracias a dicha asimetría, la velocidad del flujo sobre el ala  $v_1$  es mayor que la velocidad de la corriente debajo del ala  $v_2$ , mientras que la presión  $p_1$  es correspondientemente menor que  $p_2$  (fig. 30.12). Esta diferencia de presiones es la que crea la fuerza de sustentación.

Dicha fuerza puede ser aumentada por diferentes procedimientos.

3. Ante todo, hay que aumentar la convexidad del ala por arriba y la concavidad por abajo (fig. 30.11, *a*). En tal caso, la velocidad de la corriente bajo el ala disminuirá, mientras que sobre el ala aumentará. Al aumentar la diferencia de velocidades, crecerá también la diferencia de pre-

siones y, junto con ésta, la fuerza de sustentación. Pero un ala con semejante perfil crea también gran resistencia. Por esta razón, los perfiles de este tipo son propios de los aviones de poca velocidad.

4. Es posible crear cierto ángulo entre la cuerda del ala y la dirección del flujo incidente, llamado *ángulo de ataque*  $\alpha$  (en la fig. 30.13). Esto también provocará la moderación de la velocidad del flujo debajo del ala y, como resultado, el crecimiento de la fuerza de sustentación. Pero con el



Fig. 30.12.



Fig. 30.13.

aumento del ángulo de ataque, crece la fuerza de resistencia. Además, con grandes ángulos de ataque se produce la separación de la corriente del ala, lo que provoca la disminución de la fuerza de sustentación. Por este motivo, el ángulo de ataque en los aviones modernos no sobrepasa  $3-4^\circ$ .

5. Por fin, la fuerza de sustentación se puede aumentar elevando la velocidad de la corriente incidente. En efecto, la diferencia de velocidades sobre las superficies superior e inferior del ala con pequeños ángulos de ataque y poca convexidad del ala (fig. 30.11, b) no es grande. Por esta causa, la semisuma de estas velocidades poco se diferencia de la velocidad de la corriente incidente  $(v_1 + v_2)/2 \approx v$ . Esto permite reducir la fórmula (30.10) a la forma

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho (v_2 + v_1) (v_2 - v_1) \approx \rho v \Delta v.$$

Por consiguiente, a grandes velocidades de la corriente, la fuerza de sustentación será grande incluso en el caso, cuando el ala tiene pequeña curvatura y pequeñas dimensiones. Precisamente esta forma tienen las alas de los aviones modernos de gran velocidad. Esto permite de forma considerable reducir la fuerza de la resistencia frontal, lo que, sin duda alguna, es ventajoso.

## § 30.15. Presión en la corriente de un líquido

1. En este párrafo examinaremos el caso de una corriente subsónica ( $M < 1$ ), cuando podemos despreciar la compresibilidad de un gas. Aclaremos cómo se puede medir la presión en un líquido en movimiento con ayuda de un manómetro inmóvil y cómo se puede juzgar, por las mediciones de la presión, acerca de la velocidad de movimiento del líquido.

Ubiquemos en la corriente un pequeño tubo en cuya superficie lateral hay uno o varios agujeros (fig. 30.14). Un tubo de semejante forma no perturba, prácticamente, la corriente, a causa de lo cual su velocidad y, por lo tanto, su presión no varían considerablemente.

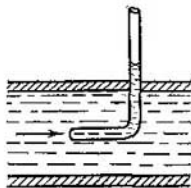


Fig. 30.14.

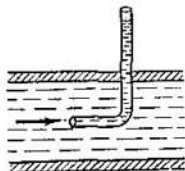


Fig. 30.15.

Gracias a las fuerzas elásticas, el líquido penetra en el tubo y asciende a cierta magnitud  $h$ , hasta que la presión hidrostática no equilibre la presión del líquido en la corriente. El valor de la presión puede ser calculado por la fórmula  $p = \rho gh$ . Si la presión del líquido es pequeña, el tubo manométrico se coloca inclinado, por lo que la presión se calcula por la fórmula (28.7):  $p = \rho gl \sin \alpha$ .

Para medir la presión en un gas, por medio de una manga el tubo se empalma a un manómetro corriente para gases: líquido o metálico.

2. Ubiquemos en ese mismo punto del flujo un tubo, cuyo agujero de entrada está dirigido hacia la corriente, es decir, el llamado *tubo de Pitot* (fig. 30.15). La columna de líquido en el tubo manométrico ascenderá más arriba que en el caso anterior, lo que certifica el aumento de la presión. Efectivamente, en el tubo de Pitot el líquido se detiene y la presión de la columna del líquido en el tubo manométrico se equilibra por la presión del líquido frenado y no por la corriente del líquido en movimiento, como tenía lugar en el experimento anterior. La presión del líquido frenado es determinada por la ecuación de Bernoulli (30.10), si en ella se hace  $v_2 = v_{\text{fren}} = 0$ ,  $p_2 = p_{\text{fren}}$ . Así, pues,

$$p_{\text{fren}} = p + \rho v^2/2. \quad (30.28)$$

Con frecuencia la presión del líquido frenado  $p_{\text{fren}}$  es llamada de modo erróneo presión *total*, la presión en el líquido no frenado  $p$ , *estática*, mientras que su diferencia  $p_{\text{fren}} - p = \rho v^2/2$ , presión *dinámica*.

3. La velocidad de la corriente en cierto punto es medida mediante el tubo de Pitot—Prandtl (fig. 30.16). Como la diferencia de presiones en los dos tubos manométricos es proporcional al cuadrado de la velocidad de la corriente, el manómetro puede ser graduado en unidades de velocidad.

Al medir la velocidad de un flujo de gas, el tubo de Pitot—Prandtl se une a un manómetro diferencial que registra la diferencia de presiones y, por lo tanto, de acuerdo con (30.28), la velocidad del flujo. La escala del manómetro diferencial se gradúa directamente en unidades de velocidad.

Como se desprende del principio de la relatividad, las indicaciones del instrumento dado no dependen de si el flujo incide sobre el tubo o, viceversa, el tubo se mueve por el líquido o gas inmóvil. En este principio se basa la aplicación del tubo de Pitot—Prandtl para definir la velocidad de movimiento de un avión respecto al aire o de un barco en relación con el agua.

### § 30.16. Definición de la viscosidad

1. Sea que un líquido fluye por una tubería de sección constante. Aplicando a este caso la ecuación de continuidad (30.3) y la ecuación de las cantidades de movimiento y teniendo en cuenta que  $\rho_1 = \rho_2$  y  $S_1 = S_2$ , veremos que las presiones también son iguales en todas

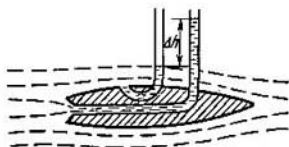


Fig. 30.16.

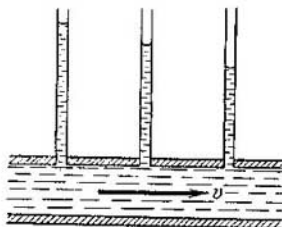


Fig. 30.17.

las secciones,  $p_1 = p_2$ . Obtendremos un resultado paradójico: parece como si el líquido pudiera fluir por la tubería sin ninguna caída de presión, por sí solo! Esto contradice por completo los resultados del experimento. Nos podemos cerciorar de esto con ayuda de una sencilla instalación, cuyo esquema se ofrece en la fig. 30.17. Cuando por la tubería fluye el líquido, los tubos manométricos registran la existencia de caída de las presiones. Resulta que la presión al comienzo de la tubería es mucho mayor que en su final.

Las causas de la divergencia entre la teoría y el experimento reside en que al deducir la ecuación (30.6), despreciamos las fuerzas de rozamiento interno, que en nuestro caso juegan un notorio papel.

2. La caída de presión, es decir, la diferencia de presiones en dos secciones, separadas una de otra a la distancia  $l$ , puede ser calculada por la fórmula

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}, \quad (30.29)$$

donde  $\lambda$  es el coeficiente de rozamiento hidráulico.

Para  $Re \leq 2320$  es válida la correlación  $\lambda = 64/Re$ . Para los tubos lisos (por ejemplo, de vidrio) siendo  $Re > 2320$ , es válida la fórmula empírica

$$\lambda = 0,316/\sqrt[4]{Re}.$$

## Cuarta parte

---

# FUERZAS MOLECULARES Y ESTADOS DE AGREGACIÓN DE LA MATERIA

### Capítulo 31

## FUERZAS MOLECULARES

### § 31.1. Densidad y compresibilidad de la materia

1. Como mostramos en el § 26.3, al comparar la densidad de la materia en estado sólido, líquido y gaseoso se puede juzgar acerca de las distancias entre las moléculas de dichas materias. Con esto, resulta que las distancias entre las moléculas en los estados líquido y sólido poco se diferencian, en un total de varios tantos por ciento, mientras que en los gases la distancia entre ellas (a presiones no muy grandes), es aproximadamente, 10 veces mayor. Por esta razón, dicen que en los estados líquido y sólido las partículas de la materia tienen empaquetamiento compacto. Este hecho lleva a que los líquidos y sólidos se comprimen en menor grado que los gases.

2. Supongamos que sobre un cuerpo se ejerce compresión o tracción multilateral. Como consecuencia varía su volumen y, por lo tanto, su densidad. Designemos por  $\epsilon$  la *variación relativa del volumen*:

$$\epsilon = - \Delta V/V = \Delta \rho/\rho; \quad (31.1)$$

en esta fórmula, el signo negativo se explica a causa de que al crecer el volumen del cuerpo su densidad, siendo la masa constante, disminuye.



La presión excesiva en comparación con la atmosférica recibe a veces el nombre de *tensión*:

$$\sigma = \Delta p. \quad (31.2)$$

La *compresibilidad de la materia*  $\beta$  es el cociente de la división de la variación relativa del volumen por la tensión:

$$\beta = \frac{e}{\sigma} = -\frac{\Delta V}{V \Delta p} = \frac{\Delta \rho}{\rho \Delta p}, \quad (31.3)$$

La magnitud inversa se denomina *módulo de compresión volumétrica*:

$$K = 1/\beta. \quad (31.4)$$

3. Como sigue de (30.16), la compresibilidad de un gas durante la transformación adiabática

$$\beta_{ad} = 1/(\gamma p). \quad (31.5)$$

Recomendamos al lector que haciendo uso por su cuenta de la ecuación de estado de un gas, muestre que con la transformación isotérmica

$$\beta_{is} = 1/p. \quad (31.6)$$

A la presión de un orden de 2 MPa la compresibilidad isotérmica de un gas  $\beta \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ Pa}^{-1}$ .

La compresibilidad de los líquidos y los sólidos es, aproximadamente,  $10^3 \dots 10^5$  veces menor que la de los gases. Esto puede verse en la tabla 31.1, donde se aducen las densidades y compresibilidades de ciertos líquidos y sólidos a iguales valores de la sobrepresión.

Tabla 31.1

Sustancia	Densidad $\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	Compresibilidad $\beta$ , 10 <sup>-11</sup> Pa <sup>-1</sup>	Sustancia	Densidad $\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	Compresibilidad $\beta$ , 10 <sup>-11</sup> Pa <sup>-1</sup>
Agua (0°C)	999,9	48,9	Cobre	8930	0,73
Hielo (0°C)	916,8	40	Aluminio	2690	1,37
Alcohol etílico (15°C)	790	76	Diamante	3514	0,23
Mercurio (20°C)	13 545,9	3,8	Grafito	2300	3,0

## § 31.2. Fuerzas moleculares

1. Del análisis de los datos acerca de la compresibilidad de los líquidos y sólidos, así como del análisis de una serie de fenómenos, estudiados en el curso elemental de física (adherencia de dos sólidos bien esmerilados, la mojadura de los sólidos por los líquidos, etc.), se desprende que entre las moléculas actúan fuerzas de considerable magnitud, llamadas *fuerzas moleculares*. Estas poseen una serie de interesantes particularidades.

Al separar las moléculas entre sí, la interacción molecular se manifiesta en forma de las fuerzas de atracción, al acercarlas a una distancia del orden de las dimensiones lineales de las propias moléculas, en forma de fuerzas de *repulsión*. Por lo tanto, hay cierta distancia  $d$  entre las moléculas, con la que las fuerzas de atracción y repulsión están en equilibrio y su resultante es igual a cero. Un sistema de moléculas situadas entre sí a una distancia  $d$ , se encuentra en estado de equilibrio estable, mientras que la energía de interacción entre las moléculas será en este caso la mínima (§§ 19.5, 19.6).

Las fuerzas moleculares sólo se manifiestan cuando las distancias entre las moléculas son muy pequeñas, de un orden de las dimensiones eficaces de las propias moléculas (§ 25.3). Al aumentar la distancia entre ellas varias veces, las fuerzas, prácticamente, se hacen igual a cero.

Precisamente por esto se explica el hecho de que al analizar los fenómenos en los gases, donde las distancias entre las moléculas son unas 10 veces mayores que en los sólidos y líquidos, en la mayoría de los casos puede ser despreciada la acción de las fuerzas moleculares.

2. La magnitud de las fuerzas moleculares no depende del número total de moléculas. Así, la densidad o propiedades elásticas de los líquidos y los sólidos no son función del modelo que investigamos; una gota de agua y el agua en el océano, a iguales temperatura y presión exterior, tienen densidad y compresibilidad por completo iguales, etc. Por esto, las fuerzas moleculares se distinguen en principio de las fuerzas de gravitación y de Coulomb, cuando la resultante es determinada por la acción de todos los cuerpos que constituyen el sistema. La causa por la que las fuerzas moleculares actúan sólo entre las moléculas vecinas, será aclarada en los párrafos siguientes.

### § 31.3. Origen eléctrico de las fuerzas moleculares

1. Minuciosas investigaciones, realizadas por una serie de científicos en la primera mitad del siglo XX, permitieron llegar a la conclusión de que *las fuerzas moleculares son de origen eléctrico*.

A primera vista, semejante resultado puede parecer raro, ya que es sabido que las moléculas son neutrales y la interacción eléctrica es característica sólo para los cuerpos cargados. No obstante, fue demostrado con anterioridad que la

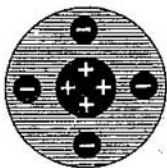


Fig. 31.1.

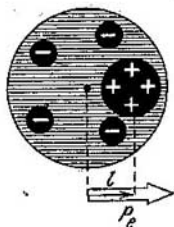


Fig. 31.2.

interacción eléctrica surge también entre los dipolos, partículas neutras con cargas iguales en magnitud y de signos opuestos, situadas de forma asimétrica (§ 10.4). Esto permite comprender la naturaleza eléctrica de la interacción entre las moléculas.

2. Las moléculas de una serie de sustancias tienen estructura simétrica, como se muestra esquemáticamente en la fig. 31.1. Aquí, la esfera que tiene carga positiva representa los núcleos de los átomos que entran en la molécula, mientras que la esfera con carga negativa, la nube electrónica de estos átomos.

Supongamos que la molécula fue deformada de la forma que se representa en la fig. 31.2. Semejante molécula deformada, con la primera aproximación, podemos considerarla como un dipolo eléctrico que posee cierto momento  $p_e = ql$ . En tal caso, la molécula crea fuera de sí un campo eléctrico, cuya intensidad (véase (10.10))

$$E \approx \frac{p_e}{\epsilon_0 r^3}.$$

3. El campo de esta molécula provocará la deformación de las moléculas vecinas. Sobre el núcleo positivo de la molécula actúa la fuerza de repulsión dirigida a lo largo del vector de intensidad, mientras que sobre la nube electrónica con carga negativa, fuerzas dirigidas en sentido opuesto (fig. 31.3). Estas son las fuerzas que deforman la molécula.

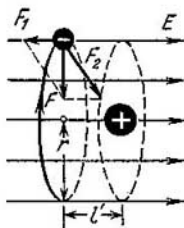


Fig. 31.3.

Así, pues, una molécula que tiene momento dipolar  $p_e$ , induce en las moléculas vecinas un momento dipolar  $p'_e$ .

Es fácil cerciorarse de que el momento dipolar inducido es proporcional a la intensidad del campo. En efecto, el momento dipolar  $p'_e = el'$ , donde  $l'$  es el brazo del dipolo inducido. La tensión del campo eléctrico externo  $E$  no sobrepasa  $10^4 \dots 10^6$  V/m. Por regla, es mucho más débil. La

intensidad del campo, creado en la órbita del núcleo positivo,  $E_{\text{nuc}} = e/(4\pi\epsilon_0 r^2) \approx 10^{11}$  V/m (el radio de un átomo  $r \approx 10^{-10}$  m). Por consiguiente, la fuerza  $F_1$ , que actúa sobre el electrón por el lado del campo externo, es mucho más pequeña que la fuerza  $F_2$ , con la que el núcleo actúa sobre el electrón. Por lo tanto, la desviación de la nube electrónica resulta ser menor que el radio de la órbita.

De la fig. 31.3, vemos que

$$\frac{l'}{r} = \frac{F_1}{F_2} \approx \frac{F_1}{F_2}.$$

Poniendo los valores  $F_1 = eE$  y  $F_2 = eE_{\text{nuc}} = e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ , obtenemos

$$l' \approx \frac{4\pi r^3}{e} \epsilon_0 E.$$

De aquí el momento dipolar inducido

$$p'_e = el' = 4\pi r^3 \epsilon_0 E = \alpha \epsilon_0 E. \quad (31.7)$$

La magnitud  $\alpha \approx 4\pi r^3$  recibe el nombre de *polarizabilidad de una molécula*.

En nuestro caso

$$p'_e \approx \frac{\epsilon_0 \alpha p_e}{e_0 r^3} = \frac{\alpha p_e}{r^3}. \quad (31.8)$$

4. Si dos moléculas con momentos dipolares orientados de igual modo  $p_e$  y  $p'_e$  no están lejos una de otra, ellas se atraen (véase (10.7)):

$$f = -\frac{6p_e p'_e}{4\pi\epsilon_0 r^4}.$$

Si en esta fórmula ponemos la expresión para el momento inducido del dipolo (31.8), definitivamente

$$f \approx -\frac{\alpha p_e^2}{\epsilon_0 r^7}. \quad (31.9)$$

Hemos obtenido un importante resultado: *si las moléculas inducen en sus más cercanas vecinas un momento dipolar, entre ellas surge una fuerza de atracción inversamente proporcional al séptimo grado de la distancia entre ellas.*

### § 31.4. Gráfica de las fuerzas moleculares

1. En el párrafo anterior estudiamos el caso más sencillo de atracción molecular, es decir, la interacción entre dipolos inducidos. Pero en la realidad, entre las moléculas pueden surgir fuerzas de atracción por una serie de otras causas, que aquí no podemos examinar, ya que sólo basándose en la mecánica cuántica puede ser creada una rigurosa teoría de las fuerzas moleculares. Resulta, que en todos los casos, la fuerza de atracción molecular es razón inversa del séptimo grado de la distancia entre las moléculas:

$$f_{at} = -a/r^7. \quad (31.10)$$

Aquí, el signo negativo muestra que se trata de una fuerza de atracción,  $a$  es cierto coeficiente que depende de la estructura de la molécula y del carácter de las fuerzas de atracción.

2. Como enseña la práctica de compresión de los cuerpos, con un acercamiento considerable de las moléculas, en éstas surgen fuerzas de repulsión. El origen de dichas fuerzas también es eléctrico. Resulta que en este caso, las fuerzas de repulsión entre los núcleos con carga positiva comienzan a jugar un significativo papel. Además, aquí se manifiestan los efectos cuantomecánicos, cuyo estudio sale de los márgenes del presente libro.

Con el acercamiento de las moléculas la fuerza de repulsión varía con rapidez, a mayor velocidad que la fuerza de atracción. Aproximadamente, la fuerza de repulsión puede

ser expresada por

$$f_{\text{rep}} = b/r^{13}. \quad (31.11)$$

En esta fórmula, el coeficiente  $b$  depende de las mismas causas que  $a$ . En mecánica cuántica se obtiene una fórmula más exacta, en la que aquí no vamos a detenernos.

3. Está claro que sobre la molécula actúa una fuerza resultante

$$f = -\frac{a}{r^7} + \frac{b}{r^{13}}. \quad (31.12)$$

El signo de esta fuerza depende de la distancia entre las moléculas. Existe cierta distancia  $r = d$ , con la cual las

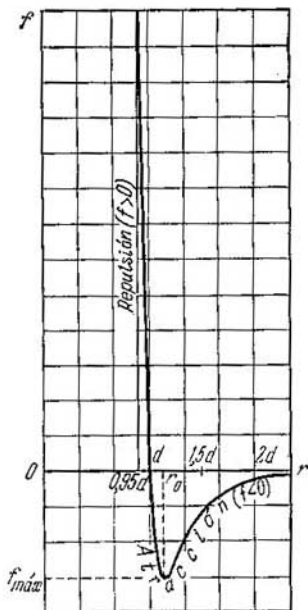


Fig. 31.4.

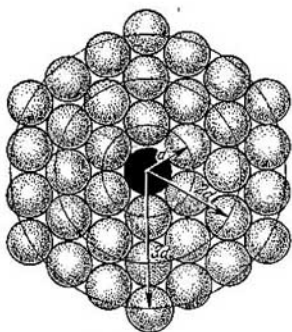


Fig. 31.5.

fuerzas de repulsión se equilibran por las de atracción. De (31.12) se desprende que  $f = 0$  si  $d = \sqrt[7]{b/a}$ . Cuando  $r < d$ , la fuerza resultante es positiva, es decir, la fuerza de repulsión supera la de atracción; si  $r > d$  tendremos el cuadro inverso, la atracción será más fuerte que la repulsión y la resultante tendrá signo negativo.

Puede ser mostrado que con  $r_0 = d \sqrt[7]{13/7} = 1,11 d$  las moléculas se atraen con la máxima fuerza  $f_{\text{máx}} \approx$

$\approx -0,2 a/d^7$  (fig. 31.4). Cuando  $r = 1,5d$ , la fuerza de atracción disminuye, aproximadamente, 4 veces, con  $r = 2d$ , 30 veces y con  $r = 3d$ , casi 400 veces. Si la distancia se disminuye hasta  $r = 0,95d$ , surge una fuerza de repulsión  $f \approx 9 |f_{\text{máx}}|$ , con  $r = 0,7d$ , una fuerza de repulsión  $f \approx 400 |f_{\text{máx}}|$ .

4. Semejante fuerte dependencia entre la fuerza y la distancia indica que *las fuerzas moleculares son de corto alcance*, es decir, las moléculas interactúan sólo con sus vecinas más cercanas. Si representamos las moléculas como bolas con empaquetamiento compacto (fig. 31.5), lo que en general corresponde al empaquetamiento de las moléculas en muchos líquidos y sólidos, la molécula negra interactúa sólo con la primera capa que la rodea. Con un error que no pasa del 3%, puede ser despreciada la interacción de la molécula con la segunda capa, y más aún con la tercera y las demás capas.

Por este hecho se explican todas las peculiaridades de las fuerzas moleculares, consideradas en el § 31.2, en particular la falta de dependencia entre la magnitud de las fuerzas moleculares y el número total de moléculas en el sistema y la carencia de interacción molecular en los gases (salvo el caso de presiones muy grandes).

### § 31.5. Curva de potencial de la interacción molecular

1. Conociendo el carácter de las fuerzas moleculares, podemos construir la gráfica de la energía de interacción molecular, la llamada *curva de potencial* (§ 19.5). Con esto, hay que tener en cuenta las propiedades de esta curva, que en dicho párrafo estudiamos.

Ante todo, de acuerdo con (19.12), la curva de potencial con  $r < d$  debe estar inclinada respecto del eje de abscisas bajo un ángulo obtuso, ya que aquí actúa una fuerza positiva de repulsión. Partiendo de estos mismos razonamientos, para  $r > d$  la curva deberá estar inclinada respecto de ese mismo eje bajo un ángulo agudo, ya que en este caso actúa una fuerza de atracción. De aquí se desprende que para  $r = d$  la curva tiene un mínimo.

Esto confirma lo dicho en el § 31.2, es decir, en estado de equilibrio un sistema de moléculas posee la energía mínima.

2. Como la fuerza de repulsión varía con la distancia con más intensidad que la fuerza de atracción, la curva de potencial es *asimétrica*. A la izquierda del punto de mínimo, para  $r < d$ , su caída es muy abrupta. A la derecha del punto de mínimo, para  $r > d$ , la curva primero crece, pero por una curva más suave, mientras que, a continuación, su crecimiento cesa, ya que para  $r > 2d$  la fuerza de interacción es prácticamente igual a cero.

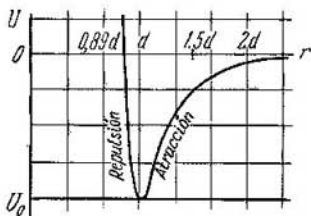


Fig. 31.6.

Como es sabido, el nivel nulo de la energía potencial puede ser elegido al azar. Es cómodo suponer que la energía potencial es igual a cero con una distancia infinita entre las moléculas. Entonces, será prácticamente igual a cero para  $r > 2d$ .

3. La curva de potencial de la interacción molecular está representada en la fig. 31.6. Aquí  $U_0$  es la energía mínima de interacción entre las moléculas, que éstas poseerían si una de otra se encontrara a una distancia  $d$  y estuvieran en reposo. El análisis de esta curva permite juzgar acerca de múltiples propiedades de los sólidos y líquidos. Una de éstas, la causa de su dilatación térmica será estudiada en el siguiente párrafo.

### § 31.6. Dilatación térmica de los sólidos y líquidos

1. La experiencia nos enseña que, al subir la temperatura, aumenta el volumen de los sólidos y líquidos. Aclaremos la causa de la dilatación térmica. En este caso hay que tomar en consideración, que a pesar de que la estructura y las propiedades de los sólidos y líquidos son diferentes, lo que trataremos en los siguientes capítulos, para el mecanismo de la dilatación térmica dichas divergencias no desempeñan ningún papel.

A la temperatura prefijada en el sólido o líquido, las moléculas se encuentran unas de otras a determinadas distancias y oscilan junto a las posiciones de equilibrio. Representemos en la curva de potencial los valores de la



energía total de la molécula para una serie de valores de la temperatura del cuerpo (fig. 31.7). Aquí,  $e_0$  es la llamada energía nula, o sea, la energía mínima de las oscilaciones de la molécula con el cero absoluto de temperatura (§ 26.8);  $e_1$  y  $e_2$ , las energías de las oscilaciones de las moléculas a temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ . En

la fig. 31.7 vemos que con el cero absoluto, las moléculas oscilan alrededor de las posiciones de equilibrio, entre las cuales la distancia es igual a  $d$ . Al aumentar la temperatura, la energía de las oscilaciones crece. Por consiguiente, si a la temperatura  $T_1$  la molécula oscila entre los puntos  $A_1$  y  $B_1$ , a la temperatura  $T_2$ , oscilará entre los puntos  $A_2$  y  $B_2$ . Y como la curva de potencial tiene forma asimétrica, el punto  $B$  se desplaza a la derecha de forma más intensa que el punto  $A$  a la izquierda. De esto sigue que la posición de equilibrio al subir la temperatura también se desplaza a la derecha. Con otras palabras, la distancia entre las moléculas al aumentar la temperatura crece a cuenta de la forma asimétrica de la curva de potencial de la interacción molecular.

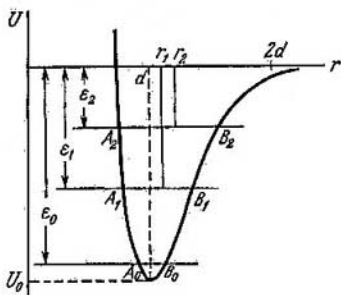


Fig. 31.7.

2. De modo cualitativo hemos conseguido explicar el mecanismo de la dilatación térmica de los sólidos y líquidos. Sin embargo, no se puede obtener con facilidad las dependencias cuantitativas del análisis de la curva de potencial de la interacción molecular. Por esta causa, hagamos uso de los resultados del experimento. Resulta, que en un pequeño intervalo de temperaturas, lejos del cero absoluto, la variación relativa del volumen es proporcional al cambio de la temperatura:

$$\Delta V/V = \beta \Delta T, \quad (31.13)$$

donde  $\Delta T$  es la variación de la temperatura y  $\beta$ , el coeficiente de dilatación cúbica, es decir, el cambio relativo del volumen que corresponde a un kelvin. Haciendo  $\Delta V = V - V_0$ , donde  $V_0$  es el volumen del cuerpo a la

temperatura  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ , y  $\Delta T = t - t_0 = t$ ,

$$(V - V_0)/V_0 = \beta t, \quad (31.14)$$

de donde

$$V = V_0 (1 + \beta t). \quad (31.15)$$

De manera análoga, tendremos para la densidad del cuerpo

$$\rho = \rho_0 (1 - \rho t). \quad (31.16)$$

3. Señalemos una vez más que la ley lineal de la dilatación térmica es la primera aproximación, válida sólo en determinado intervalo de temperaturas que es función de las propiedades de la sustancia. Al ampliar el intervalo de temperaturas, el carácter lineal se viola. Por ejemplo, la violación del carácter lineal es fácil de apreciar en el agua a unos  $4^\circ \text{C}$  de temperatura, cuando ella tiene la mayor densidad, mientras que al enfriarla a menos de  $4^\circ \text{C}$ , ésta comienza a dilatarse, incluso hasta la congelación.

Además, como se desprende de la teoría, y confirma el experimento, cerca de cero absoluto, en todas sustancias no hay dilatación térmica.

4. Si calentamos una barra, su longitud crece. Razonamientos análogos permiten en absoluto mostrar que en un pequeño intervalo de temperaturas

$$l = l_0 (1 + \alpha t), \quad (31.17)$$

donde  $l_0$  es el largo de la barra a  $0^\circ \text{C}$ ,  $l$ , su longitud a la temperatura  $t$ . La magnitud  $\alpha$  denomínase *coeficiente de dilatación lineal* y es la variación relativa de la longitud que corresponde a 1 kelvin.

5. Vamos a mostrar que para los sólidos, el coeficiente de dilatación cúbica es tres veces mayor que el coeficiente de dilatación lineal. Para ello, tendremos en cuenta que  $V = l^3$ . La sustitución en la expresión (31.15), nos da

$$l_0^3 (1 + \alpha t)^3 = V_0 (1 + \beta t).$$

Reduciendo por  $V_0 = l_0^3$  y al abrir el paréntesis, obtenemos

$$\beta = 3\alpha + 3\alpha^2 t + \alpha^3 t^3.$$

Para todos los sólidos, el coeficiente de dilatación lineal es muy pequeño y por el orden de su valor es igual a  $10^{-6} \dots 10^{-6} \text{K}^{-1}$ . Esto significa que para un pequeño intervalo de temperaturas ( $t \leq 100^\circ \text{C}$ ), en la última igualdad podemos despreciar los términos que contienen  $\alpha^2$  y  $\alpha^3$ . De aquí sigue

$$\beta = 3\alpha. \quad (31.18)$$

## ORDEN DE LARGO ALCANCE

## § 32.1. Monocristal

1. En la naturaleza, ciertos sólidos se encuentran en forma de *crisales*, que son cuerpos cuyas caras de por sí son polígonos regulares. La forma de los polígonos que surgen, depende de las condiciones de formación del cristal,

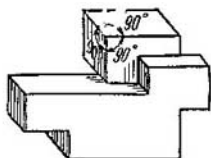


Fig. 32.1.

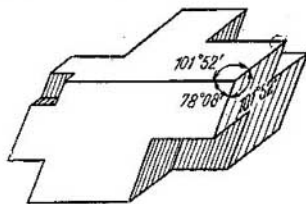


Fig. 32.2.

pero la propiedad más característica del cristal es la constancia de los ángulos entre sus aristas y, correspondientemente, entre sus caras.

Así, por ejemplo, el cristal de la sal común puede tener forma de cubo, paralelepípedo o prisma, así como puede resultar un cuerpo de configuración irregular (fig. 32.1). Pero en todos los casos, en su vértice concurren tres aristas, que entre sí forman un ángulo recto. De esta misma manera, en el vértice del cristal de calcita (espato de Islandia) concurren tres aristas, que forman un ángulo agudo de  $78^{\circ}08'$  y dos obtusos de  $101^{\circ}52'$ , cada uno de ellos (fig. 32.2).

En una serie de cristales, tales como el espato de Islandia o el cuarzo, hay cierta dirección determinada que recibe el nombre de eje *crystalográfico* o eje *óptico*. En la fig. 32.3 el eje óptico es la dirección paralela a la recta *MN*. De la importancia y papel de este eje hablaremos en el cap. 64.

2. Un gran cristal aislado de forma más o menos regular, denominase *monocristal* (del griego monos, uno). La peculiaridad característica de un monocristal es su *anisotropía*, o

sea, la divergencia de sus propiedades en diferentes direcciones.

La anisotropía de las propiedades mecánicas de un monocristal, ante todo se refleja en que su resistencia en diversos sentidos es diferente. Si, por ejemplo, fabricamos de cierto monocristal una bola, a continuación la rompemos mediante un golpe, se quebrantará en trozos, cuyas caras formarán

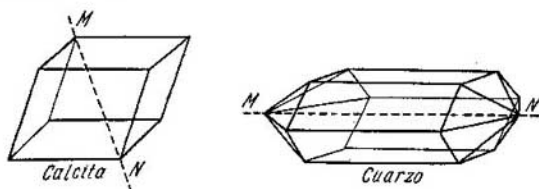


Fig. 32.3.

ángulos característicos para la materia dada. Esto significa que la resistencia mecánica de dicho monocristal es la mínima en dichas direcciones.

También es diferente la elasticidad del monocristal en direcciones diversas. Y como la velocidad del sonido es función de las propiedades olásticas y la densidad de la materia, la velocidad de propagación del sonido en los monocristales, como lo muestra la práctica, es distinta en diferentes direcciones.

3. La anisotropía de las propiedades térmicas de un monocristal se refleja en que los coeficientes de dilatación lineal y de la conductividad térmica alcanzan diversos valores en diferentes direcciones. El experimento para medir el coeficiente de dilatación térmica de pequeños modelos es bastante complicado y aquí no lo vamos a examinar. Los resultados de las mediciones para ciertos monocristales se aducen en la Tabla 32.1.

De modo experimental puede ser fácilmente determinada la diferencia en la conductividad térmica de un monocristal en diversas direcciones. Con este fin, cortemos, por ejemplo, de cuarzo una plaquita paralelamente a su eje óptico y cubrámosla de una capa de cera. Si tocamos la plaquita con una aguja caliente, cerca del punto de contacto con el cuarzo, la cera se derrite. El experimento demuestra que el sector

Tabla 32.1

Sustancia	$\alpha, 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	
	a lo largo del eje	perpendicular al eje
Cuarzo	7,5	13,7
Cadmio	52	20
Cinc (cristal)	60	13
Estaño (cristal)	30,5	15,5

derretido tiene la forma de una elipse, cuyo eje mayor es paralelo al eje cristalográfico. Esto significa que la conductividad térmica del cuarzo a lo largo del eje es mayor que en sentido perpendicular; su razón  $K_{\parallel}/K_{\perp} = 1,72$ , donde  $K_{\parallel}$  es la conductividad térmica a lo largo del eje óptico,  $K_{\perp}$ , esa misma magnitud en sentido perpendicular.

### § 32.2. Policristal

1. Al tomar medidas especiales, de los fundidos de los metales pueden obtenerse monocristales. Pero si el hierro en fusión simplemente se enfría, el cuerpo sólido que se obtiene no posee anisotropía. La causa de esto puede ser aclarada si su superficie se rectifica bien y se trata con ácido, estudiándola después con un microscopio (fig. 32.4). Resulta que la materia está constituida por granos aislados de tamaño de un orden de  $10^2 \dots \dots 10^3 \text{ nm}$ . Cada uno de los granos es un cristal, que toma forma incorrecta a causa de que su crecimiento fue obstaculizado por los cristales adyacentes. La estructura granular creada recibe el nombre de *policristalina* (del griego poly—mucho).

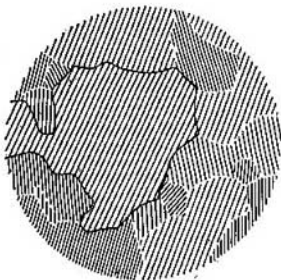


Fig. 32.4.

Como los ejes cristalográficos de todos los granos están orientados en completo desorden, a grandes distancias la anisotropía puede no manifestarse. Por esta causa, el poli-

crystal es *isótropo*, o sea sus propiedades, en término medio, son las mismas en todas las direcciones.

2. Una enorme cantidad de sólidos, con los que tropeza-mos en la naturaleza, como las piedras, la arena, los metales, las sales, etc., tienen estructura policristalina. El surgi-miento de los policristales es un fenómeno exclusivo, que tiene lugar a condiciones singularmente favorables. Al mismo tiempo, en la naturaleza hay sólidos de tipo vidrio, que no tienen estructura granular. Estos se llaman *amorfos*. La estructura y propiedades de estos cuerpos serán examina-das en el § 34.6.

### § 32.3. Red cristalina. Orden de largo alcance

1. Ya en el siglo XVIII, sobre la base del estudio de las propiedades macroscópicas de los cristales se expresó la suposición de que el cristal consta de células de forma geométrica regular. No obstante, sólo en 1912 esta hipótesis fue confirmada por M. Laue, que descubrió el fenómeno de la difracción de los rayos X en los cristales. Resultó que las partículas de las que consta el cristal forman en el espacio una *red cristalina* regular. En esta red podemos destacar una célula (celda) de dimensiones mínimas, caracterizada porque si se traslada de forma paralela a sí misma, cada vez a una distancia igual a su arista, de esta forma puede ser creado un monocristal cuan grande se quiera. El período del cristal es igual a la longitud de la arista de la célula elemental (§ 62.7).

El vértice de la célula denomínase *nudo* de la red cristali-na; la recta que pasa por los nudos de la red, recibe el nom-bro de *línea de nudos*; el plano que pasa por los nudos de la red se llama *plano de nudos*. Los planos y las líneas en los que la concentración de nudos es la mayor, forman las caras y las aristas del cristal.

2. En 1891, E. S. Fiódorov estableció que en la naturaleza en total son posibles 230 diferentes tipos espaciales de simetría (grupos de Fiódorov), que pueden ser divididos en 7 sistemas cristalinos o bien en 32 clases. Estas clases se distinguen por la forma de la célula, es decir, por los ángulos entre las aristas y las caras y las correlaciones entre las dimensiones de las aristas.

Mediante el método de análisis por difracción de rayos X fue confirmada brillantemente la clasificación propuesta por E. S. Fiódorov. Resultó, que en la naturaleza no hay ni un sólo cristal que no pertenezca a uno u otro grupo de Fiódorov.

3. Por regla, en los nudos de la red cristalina se disponen los centros de los átomos, iones o moléculas. Como más adelante veremos, a pesar de esto, no todos los átomos se hallan en los nudos. Pero es de importancia que en la red cristalina se observa una distribución de la materia correcta, regular, así como también las de cargas eléctricas y los campos eléctricos relacionados con ellas.

La magnitud de los períodos de repetición es muy pequeña: por ejemplo, en los metales constituye de 0,3 a 0,7 nm, lo que corresponde a varias capas de átomos, ya que la distancia entre dos átomos en un sólido es aproximadamente igual a 0,1 nm. Incluso en los policristales los granos tienen dimensiones de un orden de  $10^2 \dots 10^3$  nm. Los monocristales tienen dimensiones mucho más grandes.

Llegamos a la conclusión de que en los cuerpos cristalinos la disposición regular de los elementos de la red cristalina se repiten en los límites de cientos, miles y decenas de miles de capas. Por este motivo, se dice que en el cristal se observa *el orden de largo alcance* en el empaquetamiento de los átomos u otras partículas (iones, moléculas, etc.), de las que está formada la célula del cristal.

### § 32.4. Defectos del empaquetamiento y estructura en bloques del cristal

1. Si el cristal tuviera estructura ideal, el orden de largo alcance sería observado a distancias cuan se quiera grandes. Sin embargo, semejantes cristales ideales no se forman en la naturaleza. En el cristal real tropezamos con violaciones sistemáticas del orden de largo alcance, que surgen en el proceso de cristalización de la materia.

Uno de los principales tipos de violaciones de la estructura regular del cristal es un defecto llamado *dislocación*.

2. *La dislocación simple o límite* consiste en que en cierto sector del cristal se crea un plano de nudos excedente (fig. 32.5). Como resultado, el cristal queda dividido en dos bloques, en cuya línea de separación se encuentra el núcleo de dislocación marcado con el signo  $\perp$ .

*La dislocación espiral* se forma en el caso, cuando la línea de nudos de uno de los bloques, con una de sus partes parece como si se deslizara a un período más arriba o más abajo de su dirección normal. Las más notorias divergencias también

surgen aquí a lo largo del eje de dislocación (fig. 32.6). En los demás sectores, en particular lejos del eje, el orden a largo alcance no se perturba.

3. Al haber un pequeño número de dislocaciones se forma un monocristal constituido por grandes bloques, en cada uno de los cuales reina un orden a largo alcance rela-

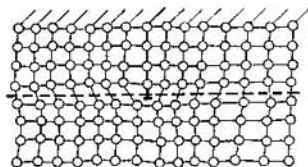


Fig. 32.5.

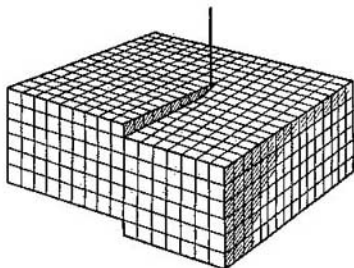


Fig. 32.6.

tivamente ideal. Con frecuencia, semejantes bloques están ligeramente girados uno respecto al otro, lo que se representa en la fig. 32.7.

4. Las violaciones del orden a largo alcance son también posibles en el caso cuando el nudo está vacante (fig. 32.8) o bien relleno con átomo extraño (fig. 32.9), así como si éste se inserta entre las líneas de nudos (fig. 32.10). Semejantes defectos pueden surgir tanto en el lugar donde apareció la dislocación, como también en el interior del bloque.

La presencia de defectos en el cristal opera fuerte influencia sobre sus propiedades. Por ejemplo, las impurezas en la red cristalina de germanio y silicio, que constituyen



un total de nada más que el 0,1 %, prácticamente no influyen sobre la estructura del cristal, pero de modo muy notorio —mil veces— varían su resistencia eléctrica. La causa de este fenómeno será examinada en el cap. 77.

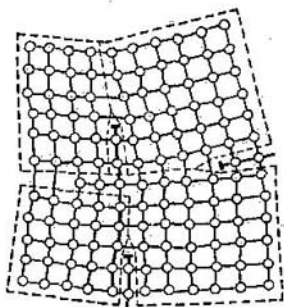


Fig. 32.7.

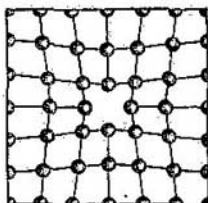


Fig. 32.8.

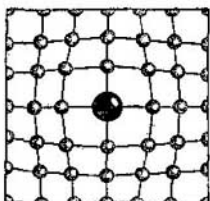


Fig. 32.9.

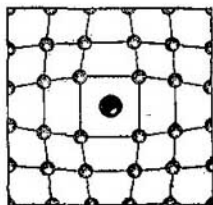


Fig. 32.10.

En los siguientes párrafos estudiaremos como influyen los defectos de los cristales sobre algunas de sus propiedades térmicas y mecánicas.

### § 32.5. Movimiento de los defectos y difusión

1. La experiencia nos muestra que al haber prolongado contacto entre dos sólidos, éstos difunden el uno en el otro. Es en particular cómodo, observar la difusión en los sólidos por medio de «átomos marcados», es decir, isótopos radiacti-

vos de la materia dada. Pero, es fácil cerciorarse de que en un cristal ideal la difusión es casi imposible. En un cristal ideal todos los nudos están ocupados por sus «propios» átomos, por lo que la inserción de un átomo «extraño» en el nudo debe acompañarse de un considerable trabajo para «arrancar» el átomo del nudo, para lo que por regla no hay suficiente energía. La inserción del átomo extraño entre los nudos de la red también exige considerable energía, ya que hay que «separar» a los vecinos y vencer las grandes fuerzas de repulsión que aparecen en este caso.

2. En un cristal real todo es diferente. La presencia de defectos tipo dislocaciones o vacantes, en considerable medida facilita el proceso de inserción de átomos extraños en el cristal. Estos átomos pueden penetrar o en las vacantes o bien en el ámbito de dislocaciones simples o espirales, con la particularidad de que la energía del movimiento térmico es con plenitud suficiente para que el átomo pueda penetrar en el ámbito defectuoso.

De modo análogo podemos mencionar el defecto tipo de sustitución (véase la fig. 32.9). Aquí a temperatura suficientemente alta, es muy posible un proceso, con el que el átomo extraño y el átomo de la materia principal cambian de lugar, lo que lleva al desplazamiento del átomo extraño por el cristal.

Así, pues, el proceso de difusión en el cristal se reduce al movimiento de los defectos por la red. Como es natural, mientras más defectuosa sea la red, más probable será la difusión. En particular, en los policristales, con el resto de las condiciones iguales, la difusión transcurre con mayor rapidez que en los monocristales.

3. La práctica muestra que al aumentar la temperatura del cristal, la difusión se acelera. La cosa reside en que a medida que crece la temperatura, las moléculas comienzan a vibrar de modo más intensivo, las distancias medias entre ellas aumentan, y con el desplazamiento ventajoso de dos átomos o moléculas vecinas en direcciones opuestas, un tercer átomo parece como si pudiera «meterse» entre ellos, ocupando un nuevo lugar en la red. Así se explica la posibilidad de principio de difusión en un cristal ideal, aunque su probabilidad es muy pequeña. Con mayor razón, la alta temperatura favorecerá la difusión en un cristal con defectos.

## § 32.6. Movimiento de las dislocaciones y deformaciones del cristal

1. La experiencia nos muestra que cualquier deformación de un cristal, incluso las elásticas y, en mayor grado, las deformaciones plásticas, están relacionadas con el desplazamiento (cizallamiento) de los bloques del cristal, uno respecto al otro. Aquí también juega un importantísimo papel el movimiento de las dislocaciones.

Examinemos el mecanismo de la deformación por cizallamiento en un cristal sin defectos y en un cristal con una dislocación simple.

2. Supongamos que queremos provocar el cizallamiento de la red cristalina a un nudo por el plano  $AB$  de un cristal ideal. Tendremos que desplazar de una vez todos los átomos, es decir, instalar el átomo  $1$  frente a  $2'$ ,  $2$  frente a  $3'$ , etc. (fig. 32.11). Para esto es preciso aplicar un considerable esfuerzo, igual al producto de la fuerza de cohesión entre dos átomos por la cantidad total de los átomos en contacto en todo el área de cizallamiento.

Sea ahora que el plano  $AB$  coincide con el límite de separación de dos bloques, en el cual está dispuesto el núcleo de una dislocación simple (fig. 32.12). Aquí, bajo la acción de la fuerza, las capas  $3$ ,  $4$  y  $5$ , prácticamente, no se desviarán, la capa  $2$  se desplazará a la mitad de la distancia entre los nudos y ocupará su puesto «natural» frente al nudo  $3'$ . Sólo la capa  $1$  tendrá que desplazarse a la distancia total entre los nudos, o incluso sólo cuando la capa  $2$  ya se haya desplazado y al movimiento de la primera capa solo molestará la atracción a la capa  $1'$ , pero no la repulsión de la capa  $2$ . Como muestran los cálculos, para el cizallamiento será aquí necesario un esfuerzo cien veces menor, que al carecer de dislocaciones.

3. Como nos hemos cerciorado, durante la deformación de un cristal, parcialmente aumenta el ordenamiento en la disposición de los planos atómicos y disminuye el número de dislocaciones simples. De aquí se desprende, que a medida que el cristal sufre deformación, su resistencia mecánica deberá aumentar. La práctica nos muestra que en realidad, tales deformaciones como la forja, el laminado, etc., llevan al reforzamiento del material, pero no en cien veces, como indica la teoría. Resulta, que en este caso, las dislocaciones espirales, que no siempre desaparecen durante la deformación, juegan importante papel.

4. La resistencia de los cristales se reduce bruscamente a cuenta de las grietas que surgen en su superficie, por lo visto en el lugar de salida de las dislocaciones. Semejantes grietas reducen la resistencia a la rotura. Por ejemplo, para los cristales de sal gema el esfuerzo de rotura decrece del valor teórico de un orden de 2 GPa a 4,5 MPa, o sea, unas

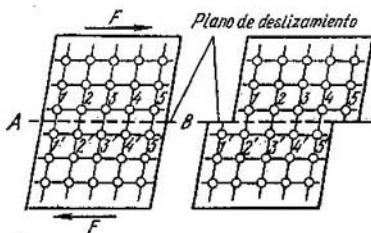


Fig. 32.11.

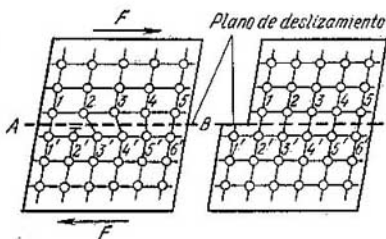


Fig. 32.12.

450 veces; para el monocristal de zinc, de 20 GPa a 50 MPa, etc. Esto ha sido confirmado por los experimentos de A. F. Ioffe, que mostró que si permanentemente se diluye la superficie del cristal, liquidando de este modo las grietas que surgen y otros defectos superficiales, la resistencia del modelo aumenta. Por ejemplo, al estirar un cristal de sal gema en agua caliente, éste observaba la rotura a esfuerzos aproximados de 1,5...1,6 GPa, lo que está muy cerca del valor teórico.

## EMPAQUETAMIENTO COMPACTO DE LAS PARTÍCULAS

### § 33.1. Tipos de enlaces cristalinos

1. Hasta el momento hemos examinado principalmente las características geométricas de un cristal, sin ahondar en la naturaleza de las partículas que lo forman, ni en el carácter de las fuerzas que sujetan estas partículas a determinadas distancias entre sí. Entre tanto, precisamente el análisis de la naturaleza física de dichas fuerzas permite comprender tanto la geometría de las redes cristalinas, como también la diferencia en las propiedades de diversos tipos de cristales. Desde el punto de vista de las fuerzas que actúan entre las partículas que constituyen los cristales, éstas pueden ser divididas de manera convencional en cuatro tipos: *iónicas*, *atómicas*, *moleculares* y *metálicas*. Más abajo será dado el análisis de las propiedades características de estos tipos de cristales. Pero de antemano debemos hacer la siguiente observación.

Como ya dijimos, la condición del estado estable de todo sistema de partículas es el valor mínimo de la energía en las condiciones dadas (§§ 19.5, 19.6). Con toda plenitud esto se refiere al sistema de átomos, moléculas o iones que forman el cristal: las partículas se dispondrán a tales distancias unas de otras de modo que su energía sea la mínima, con otras palabras, donde la fuerza de atracción sea igual a la de repulsión.

2. *Cristales iónicos*. A estos se refieren la mayoría de los compuestos orgánicos, por ejemplo, las sales. En la red espacial de estos cristales se disponen sucesivamente los iones de signos opuestos.

El mecanismo de creación de un cristal iónico será explicado en el ejemplo de la sal común (NaCl). El átomo de sodio pierde con facilidad un electrón, que se une al átomo de cloro. De esta forma aparecen dos iones con carga eléctrica de signos contrarios.

Los iones creados tienen campo eléctrico esférico y simétrico, a consecuencia de lo cual las fuerzas de atracción de Coulomb, que surgen entre ellos, tienen igual magnitud en

cualquier dirección. Esto permite considerar la estructura del cristal iónico como un sistema de bolas de determinado radio, empaquetadas en cierta red espacial. Los centros de dichas bolas se dispondrán a tal distancia, que la energía de interacción de los iones sea la mínima, es decir, de forma que la fuerza de atracción sea equilibrada por las fuerzas de repulsión.

3. *Cristales atómicos.* La red espacial en los cristales del tipo dado se forma mediante el empaquetamiento compacto de los átomos, que con la mayor frecuencia son iguales. Durante la interacción de átomos iguales no se forman iones.

Ejemplos típicos de semejantes cristales son el diamante y grafito, que son dos diferentes estados del carbono, así como ciertos compuestos inorgánicos (sulfuro de zinc  $ZnS$ , óxido de berilio  $BeO$ , etc.).

Los átomos, situados en la red espacial están ligados por fuerzas *covalentes* (de otra forma, homopolares) de origen cuantomecánico. Estas fuerzas tienen una tendencia espacial muy elocuente, por lo que la interacción entre los átomos dependerá del carácter de su orientación entre sí. Por esta causa, la geometría de un cristal de este tipo no puede ser obtenida del análisis del carácter del empaquetamiento de las bolas.

4. *Cristales moleculares.* Entre ellos se encuentra una serie de compuestos inorgánicos, así como la mayoría de los orgánicos, en los que las moléculas conservan su individualidad en el proceso de cristalización. En ellos, en los nudos de la red cristalina se hallan las moléculas. Como ejemplos podemos nombrar los cristales de bromo ( $Br_2$ ), de yodo ( $I_2$ ), del hielo seco, o sea, dióxido de carbono sólido ( $CO_2$ ), así como la naftalina, parafina, ácidos olifáticos, etc. El rasgo característico de los cristales del tipo dado, es que la distancia entre las partículas dentro de las moléculas es mucho menor que las distancias intermoleculares en el cristal. Por esto, aquí se puede representar cada molécula en forma de un cuerpo limitado por partes de superficies esféricas, mientras que el propio cristal, como el empaquetamiento compacto de las moléculas, construidas de bolas cortadas (fig. 33.1).

Entre las moléculas actúan las fuerzas de Van der Waals del tipo de fuerzas de interacción entre los dipolos inducidos (§ 31.3). A causa de que estas fuerzas son bastante débiles, los cristales moleculares se destruyen con facilidad

a cuenta del movimiento térmico de las moléculas, se funden a bajas temperaturas, así como también se evaporan fácilmente. Por ejemplo, los cristales de yodo a presión atmosférica normal se evaporan a  $+39,6^{\circ}\text{C}$  y los cristales de hielo seco, a  $-78,5^{\circ}\text{C}$ .

5. *Cristales metálicos.* Como nos indica su propia denominación, el tipo dado de enlace es el procedimiento de empaquetamiento de los átomos de los metales en la red cristalina.

Durante la cristalización de los metales sus átomos se aproximan y entre ellos surgen grandes fuerzas de origen cuantomecánico. A cuenta de estas fuerzas, los electrones que se encuentran en las órbitas externas (electrones de valencia) se separan de los átomos. No obstante, a diferencia del caso del enlace iónico, aquí los electrones no pueden unirse a otro átomo y crear un ion negativo, ya que todos los átomos del metal son iguales. Por este motivo, *los electrones de valencia se colectivizan*, es decir, ellos no pertenecen a un solo átomo, como con el enlace iónico, y no a un par de átomos vecinos, como con la interacción covalente, sino que a todo el cristal en su conjunto.

El enlace metálico se asegura por la atracción entre la red iónica, formada por los iones con carga positiva, y la nube electrónica con carga negativa, llamada *gas electrónico*. Notemos, que la presencia de electrones libres, que bajo la acción del campo eléctrico son capaces de desplazarse por el cristal, asegura la buena conductividad eléctrica de los metales.

En el caso general, el empaquetamiento de los iones en el cristal metálico no puede ser reducido al empaquetamiento de bolas, como pudo ser hecho en el caso de enlaces iónicos o moleculares. Sin embargo, en ciertos casos es muy ventajoso considerar los cristales metálicos como un sistema de bolas de igual radio empaquetados de la forma más compacta.

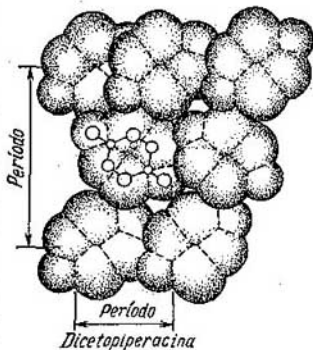


Fig. 33.1.

### § 33.2. Empaquetamiento muy compacto de bolas iguales

1. Examinemos como se puede realizar el empaquetamiento más compacto de bolas de igual radio. En el plano, éste será la figura representada en la fig. 33.2. Aquí cada bola está rodeada por seis vecinas, es decir, se forma la simetría de sexto orden. Si comenzamos a empaquetar las bolas en el espacio, nos será necesario hacer girar y despla-

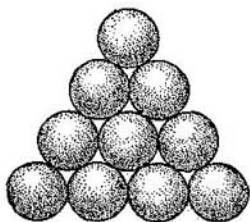


Fig. 33.2.

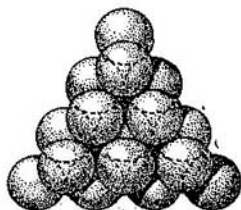


Fig. 33.3.

zar una red plana semejante de manera que las bolas de la segunda capa se coloquen en los huecos de la primera. Pero, con ello, las bolas ocuparán sólo la mitad de los huecos. En el resto de los huecos las bolas no pueden penetrar. En la fig. 33.3 se muestra como se colocan una sobre otra dos capas de bolas iguales. Los centros de las bolas superiores se disponen sobre los huecos.

De forma análoga puede ser colocada por arriba la tercera capa. Pero en este caso puede haber dos variantes de empaquetamiento.

2. Los centros de las bolas de la tercera capa pueden estar situados sobre los centros de la primera capa. Aquí, la tercera capa repite la primera. Si ahora la cuarta capa se coloca sobre la segunda, la quinta sobre la tercera, la sexta sobre la cuarta, etc., se obtiene un empaquetamiento compactísimo de dos capas de bolas iguales, es decir, el llamado empaquetamiento *hexagonal*. En la fig. 33.4 está representado el modelo de semejante empaquetamiento. La repetición de las capas se escribe, de modo simbólico, así: *ABABAB...* La célula es un prisma recto, sobre cuya base se encuentra un



hexágono regular. La altura del prisma es mayor que los lados de la base. Señalemos, que no todos los átomos se disponen en los nudos de la red.

El empaquetamiento muy compacto es característico para los cristales de berilio, magnesio, escandio, zinc, cadmio y una serie de otros metales, así como de muchos compuestos inorgánicos.

3. En la segunda variante de empaquetamiento, la tercera capa se dispone de forma que los centros de sus bolas estén dispuestos sobre los huecos de la primera capa, la cuarta repite la primera, la quinta la segunda, la sexta la tercera, etc. La repetición de las capas se escribe, de modo

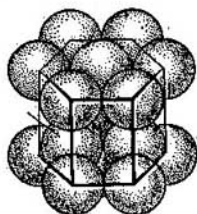


Fig. 33.4.

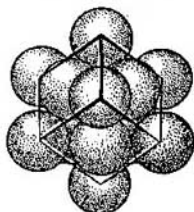


Fig. 33.5.

simbólico, así:  $ABCABCABC \dots$  En la fig. 33.5 se ofrece el empaquetamiento de este tipo. Su célula es un cubo. Las partículas se encuentran tanto en los vértices del cubo (nudos de la red), como en los centros de las caras. Por esta causa, el empaquetamiento del tipo dado recibe el nombre de *cúbico de caras centradas*. Según este tipo se construye la red de tales metales como el níquel, platino, cobre, oro, plata, aluminio, plomo y a altas temperaturas, el hierro. Por ejemplo, el cobalto se encuentra en forma de cristales tanto con red hexagonal, como con red cúbica de caras centradas. Semejante *poliformismo* es característico para una serie de metales y otras sustancias.

Son también posibles combinaciones de múltiples capas más complicadas de empaquetamientos muy compactos de bolas, pero éstas no van a ser examinadas aquí.

### § 33.3. Empaquetamientos muy compactos de bolas con radios diferentes

Nos vamos a limitar a examinar sólo un ejemplo: el cristal de la sal común. Como ya hemos dicho este cristal es iónico. El análisis de estructuras con rayos X ha permitido definir

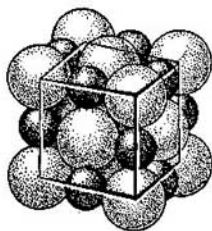


Fig. 33.6.

los radios de los iones: el de cloro 0,181 nm, el de sodio 0,098 nm. Los grandes iones de cloro forman un empaquetamiento muy compacto de tres capas, en el que los grandes vacíos se rellenan con los iones de sodio de menor dimensión (fig. 33.6). Resulta que cada ion de sodio está rodeado de seis iones de cloro y, viceversa, cada ion de cloro, por iones de sodio. Con semejante empaquetamiento de los iones se forma una red cúbica de caras centradas. Su célula es un cubo en cuyos vértices

se encuentran los iones de un signo, mientras que en el centro de las caras, los iones de signo contrario.

Como vemos en la figura, en el cristal no hay moléculas de NaCl, ya que todo el cristal es de por sí una molécula gigantesca.

### § 33.4. Redes que no se pueden representar como empaquetamiento de bolas

1. A altas temperaturas los átomos de hierro están empaquetados en una estructura muy compacta de tres capas, es decir, un cubo de caras centradas. Resulta que a la temperatura ambiente los átomos de hierro tienen otro empaquetamiento. Como muestra el análisis de estructuras con rayos X, aquí surge una red cúbica, en la que los átomos de hierro se disponen en los vértices del cubo y en su centro; semejante red se denomina *cubo de volumen centrado* (fig. 33.7). Semejante red cristalina es característica para todos los metales alcalinos: litio, sodio, potasio, rubidio y cesio, así como para el bario, cromo, molibdeno, tungsteno.

Una estructura de este género no puede ser representada en forma del empaquetamiento compacto de bolas, ya que las bolas de igual radio no pueden ser colocadas de forma compacta en un cubo, en cuyo centro se encontrará una bola de ese

mismo radio. Por lo visto, aquí la nube electrónica del ion positivo, que surge después que el átomo pierde el electrón de valencia, no tiene estructura esférica simétrica. Semejante hecho no nos debe asombrar. Más bien, al contrario, es asombroso que tan complicados sistemas como los átomos pueden en muchos casos comportarse como bolas, empaquetadas de forma compacta en la red espacial.

2. Las propiedades físicas del hierro con diversos tipos de empaquetamiento de sus átomos son diferentes. Con empaquetamiento muy compacto de caras centradas, cuando cada átomo tiene 12 vecinos, se obtiene hierro duro, elástico;

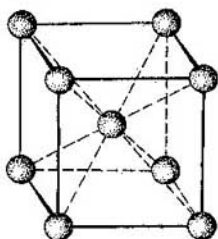


Fig. 33.7.

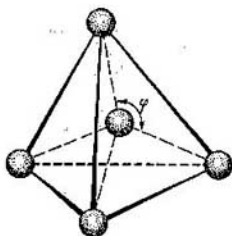


Fig. 33.8.

con el empaquetamiento de volumen centrado, cuando cada átomo sólo tiene 8 vecinos, se crea hierro blando, plástico.

3. Los átomos tetraivalentes, por ejemplo el carbono, pueden enlazarse entre sí por las fuerzas covalentes que tienen tendencia espacial bien marcada. Los átomos de carbono pueden formar dos tipos de redes espaciales.

En la primera de ellas, característica para *el diámante*, cuatro átomos se disponen por los vértices de un tetraedro regular, en cuyo centro se encuentra el quinto átomo. Las fuerzas covalentes están dirigidas del átomo central a los vértices del tetraedro (en la fig. 33.8 estas fuerzas se representan con líneas de trazos). Como es fácil calcular el ángulo en los enlaces es igual a  $\varphi = 109^{\circ}29'$ . Según los datos del análisis de estructuras con rayos X, la longitud del enlace es 0,154 nm. Está claro, que semejante carácter de empaquetamiento de los átomos no puede ser obtenido según el tipo de empaquetamiento compacto de iguales bolas.

Una estructura análoga a la del diamante tienen los cristales de silicio, germanio y de estaño blanco. La célula tiene forma de cubo, en el que los átomos están dispuestos no sólo en los vértices, sino que también en los centros de las caras y en el interior del cubo (fig. 33.9).

El segundo tipo de empaquetamiento de los átomos de carbono, característico para el grafito, se muestra en la fig. 33.10. Aquí cada átomo de carbono está también ligado con cuatro vecinos, pero las fuerzas y la dirección de los enlaces son diferentes. Un enlace fuerte surge con tres átomos que con él se encuentran en una misma capa bajo ángulos de

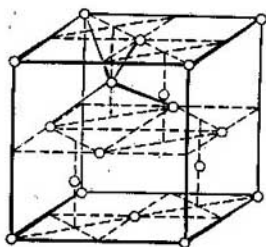


Fig. 33.9.

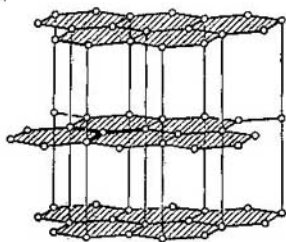


Fig. 33.10.

$120^\circ$ ; el enlace débil con el cuarto átomo, que se encuentra en la capa vecina. La dirección de este enlace constituye  $90^\circ$  con el plano de la capa. La célula tiene la forma de un prisma hexagonal recto; la longitud de las aristas es de  $0,142 \text{ nm}$  y  $0,335 \text{ nm}$ . Como la distancia entre las capas es 2,36 veces mayor que la distancia entre los átomos dentro de la capa, la fuerza de enlace entre las capas es pequeña.

4. La diferencia en la estructura de las redes cristalinas del diamante y el grafito explica la brusca divergencia entre sus propiedades físicas. El diamante es una de las más duras sustancias en la naturaleza: corta el vidrio, así como toda clase de rocas duras, como el granito, basalto, etc. El grafito es muy blando, escribe en el papel, ya que sus capas pueden deslizarse con facilidad unas respecto a otras. El diamante es aislador, no tiene electrones libres, el grafito es conductor de la corriente eléctrica. El diamante es transparente, el

grafito absorbe fuertemente la luz. La densidad del diamante es de  $3514 \text{ kg/m}^3$ , del grafito —  $2300 \text{ kg/m}^3$ .

Como han mostrado las investigaciones, a una presión de un orden de 6 GPa y una temperatura mayor que  $1500^\circ \text{C}$ , la red cristalina del grafito, mediante el acercamiento y reagrupación de los átomos puede convertirse en la red del diamante. Este problema fue resuelto en la práctica por los científicos del Instituto de Física de Altas Presiones de la Academia de Ciencias de la URSS bajo la dirección del académico L. F. Vereschaguin. Las prensas de «diamantes» proyectadas en dicho Instituto han permitido obtener diamantes artificiales de una dureza aproximadamente igual a la de los naturales.

### § 33.5. Estructura del hielo

El análisis de estructuras con rayos X muestra que los cristales de hielo tienen una estructura muy mullida, como la representada en la fig. 33.11. Aquí, los átomos de oxígeno están representados convencionalmente en forma de grandes bolitas con agujeros, los átomos de hidrógeno en forma de pequeños «istmos» que rellenan esos agujeros. Cada átomo de oxígeno está rodeado de cuatro átomos de hidrógeno, que sirven de eslabón de enlace en los dos átomos de oxígeno vecinos. La fórmula para la molécula  $\text{H}_2\text{O}$  se conserva, pero es imposible destacar en el cristal una molécula por separado.

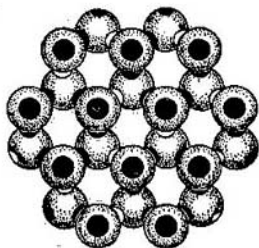


Fig. 33.11.

Como es natural, la estructura del hielo no es un empaquetamiento compacto, en la red hay grandes «agujeros». Al fundir el hielo, cuando el cristal se descompone en moléculas aisladas, la sustancia se comprime. Por esta razón, la densidad del agua a  $0^\circ \text{C}$  y presión normal, es mayor que la del hielo a esas mismas condiciones:

$$\rho_{\text{agua}} = 999,9 \text{ kg/m}^3 \quad \rho_{\text{hielo}} = 916,8 \text{ kg/m}^3.$$

## § 33.6. Polímeros

1. Las sustancias polímeras altas (con brevedad, *polímeros*) constan de moléculas muy largas en forma de cadenas. En cada cadena hay un grupo de átomos, que se repite con

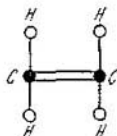


Fig. 33.12.

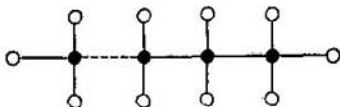


Fig. 33.13.

regularidad, enlazados por fuerzas covalentes; estas mismas fuerzas aseguran la cohesión entre los grupos de átomos en la

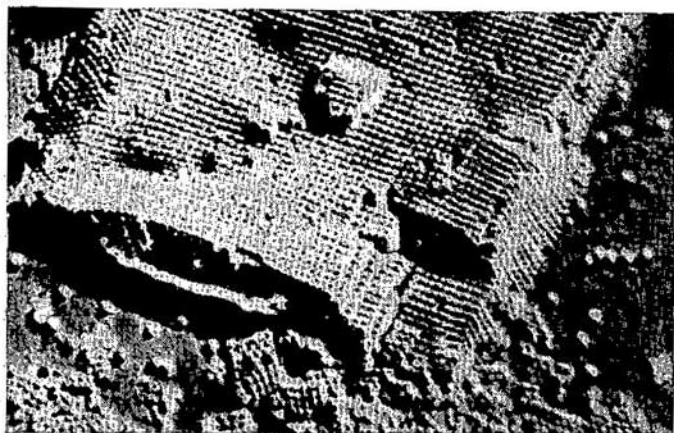


Fig. 33.14.

cadena. Por ejemplo, la molécula del gas etileno ( $C_2H_4$ ) tiene la estructura mostrada en la fig. 33.12. A altas temperatura y presión surge una sustancia polimérica, el llamado

*polietileno*, cuya cadena molecular puede constar de miles de eslabones monoméricos (fig. 33.13).

El empaquetamiento de las moléculas largas en una estructura compacta es un problema bastante complicado. Aquí, hay dos posibilidades: bien la cadena se enrolla en un «ovillo» compacto (*glóbulo*), o bien se estiran a lo largo y se colocan en *un paquete*. Los propios glóbulos o paquetes forman un empaquetamiento compacto, de forma análoga al empaquetamiento compacto de las bolas.

2. Los glóbulos tienen dimensiones de unos 10...30 nm, de manera que pueden ser observados mediante un microscopio electrónico. En la fig. 33.14 está representada la foto de un cristal globular, el virus de la enfermedad mosaica del tabaco. Forma análoga tienen los cristales de muchas proteínas.

Vemos que los glóbulos están empaquetados según el principio del empaquetamiento compacto de las bolas. Al mismo tiempo, el análisis de estructuras con rayos X nos ofrece una imagen algo «borrosa». La cuestión reside en que a distinción de los cristales estudiados más arriba, en los que todas las partículas que forman el cristal son absolutamente iguales, en un cristal globular las partículas tienen individualidad. Los glóbulos se diferencian tanto por la longitud de la cadena molecular, que en diversos complejos es diferente, como por el carácter de enrollamiento de esta cadena. Es decir, aunque el cristal globular se caracteriza por el orden de largo alcance, dentro de cada glóbulo este orden se viola.

3. Los polímeros en paquete, a veces, tienen en el interior de éste orden de largo alcance. Los propios paquetes pueden con facilidad doblarse y enrollarse. Este fenómeno explica la elevada elasticidad del caucho. Por lo visto, los paquetes de moléculas de caucho están enrollados y durante la tracción se produce el desdoblamiento del pelotón del paquete. Después de quitar la carga externa el pelotón de nuevo se dobla retornando al estado con energía mínima.

## Capítulo 34

### ORDENACIÓN PRÓXIMA

#### §34.1. Singularidades del estado líquido

1. En los anteriores capítulos fueron estudiados dos casos límites del empaquetamiento espacial de las partículas — el gas y el cristal. El gas perfecto es caracterizado por un alto grado de enrarecimiento y completo desorden en la

distribución espacial de las partículas. Por lo contrario, la característica de un cristal ideal es el empaquetamiento más o menos compacto de las partículas y completa ordenación de su disposición en cierta red espacial (orden de largo alcance).

El líquido ocupa una posición intermedia entre el cristal y el gas. Las moléculas (u otras partículas) están empaquetadas en el líquido de modo bastante compacto, en particular cerca del punto de fusión, a causa de lo cual la densidad de un líquido es, en total, sólo el 9...10% menor que la de un sólido, en tanto que para los metales fundidos tan sólo el 3%. La densidad del agua es incluso el 9% mayor que la del hielo.

Al mismo tiempo, los líquidos son en absoluto isótropos y no se consigue descubrir en ellos granos anisótropos, como en los policristales. Es lógico que esto signifique que el líquido carece de orden a largo alcance.

2. Hasta los años treinta de nuestro siglo, se consideraba que la estructura del líquido era por completo desordenada y por su composición el líquido se parecía a un gas fuertemente comprimido. La difusión de este punto de vista favorecería a la aplicación en una serie de casos iguales leyes en hidrodinámica y en la dinámica de los gases (véase el cap. 30). No obstante, esta analogía resultó ser muy superficial, basada en el parecido de sólo una propiedad: la fluidez de los gases y líquidos. El análisis de estructuras con rayos X de los líquidos (y cuerpos amorfos) mostró que hay un determinado ordenamiento en la disposición de las partículas de un líquido, en particular cerca del punto de solidificación. Pero esta ordenación se conserva sólo a pequeñas distancias, de un orden de dos-tres capas moleculares. Esto nos permite hablar de la *ordenación próxima* en el empaquetamiento de las partículas de un líquido. Resultó, que sobre esta base pueden ser explicadas de forma cualitativa muchas de las propiedades de los líquidos, lo que haremos más adelante. Pero al mismo tiempo, una teoría rigurosamente cuantitativa del estado líquido, hasta el momento no ha sido en su total creada.

3. La obra de Ya. I. Frenkel ha jugado importantísimo papel en el desarrollo de este punto de vista acerca de la estructura de los líquidos. Frenkel no sólo expresó la idea de la proximidad de las propiedades de un líquido y un cristal (lejos del punto crítico, véase el § 35.5), sino que pudo obtener de aquí una serie de dependencias cuantitativas para



los procesos de difusión, flujo viscoso y conductividad térmica, así como para el análisis del proceso de cristalización y propiedades de las aleaciones. Cierta noción de sus ideas será ofrecida más adelante.

### § 34.2. Estructura del líquido y sus propiedades

1. En la década de sesenta J. D. Bernal expresó la idea de que en los líquidos tropezamos con la llamada simetría del quinto orden. Esto significa que en el modelo plano (fig. 34.1)

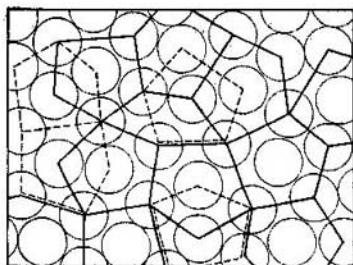


Fig. 34.1.

cada partícula tiene, en término medio, cerca de cinco vecinos más cercanos, mientras que en el empaquetamiento espacial, cerca de once. De aquí se desprenden una serie de interesantes corolarios.

Es fácil cerciorarse que en semejante tipo de empaquetamiento puede sólo realizarse la ordenación próxima; el orden de largo alcance es aquí imposible, ya que un plano puede ser cubierto por una red, constituida por triángulos, cuadrados y hexágonos regulares, pero no por pentágonos. Del mismo modo, el espacio no puede ser rellenado por polígonos cuyas caras sean pentágonos regulares.

2. De aquí sigue que los pentágonos que caracterizan el empaquetamiento de las partículas en los líquidos, tienen aristas en cierto grado diferentes. Si en los cristales todas las partículas se hallan unas de otras a la distancia  $d$ , donde las fuerzas de atracción entre ellas están equilibradas por las fuerzas de repulsión (§ 31.4), en los líquidos la distancia

entre las moléculas en unas aristas es algo mayor que  $d$ , en otras, menor que  $d$  y sólo en término medio son próximas a  $d$ .

La energía de interacción entre las partículas es función de las distancias entre ellas (§ 31.5). Tiene el valor mínimo para  $r = d$ , mientras que para  $r > d$  o bien  $r < d$ , la energía de interacción crece. Por consiguiente, *a una misma temperatura la energía interna de un cristal es menor que la de su fundido*. Este hecho permite comprender por qué causa al fundir un cristal hay que aportarle *el calor de fusión*  $Q_{fus} = m\lambda$ . Aquí,  $m$  es la masa de la sustancia,  $\lambda$ , el calor específico de fusión, es decir, la energía que hay que transmitir a la unidad de masa de la materia, que se halla a temperatura de fusión, para hacerla pasar del estado cristalino al líquido.

La comparación de la energía interna del cristal y de su fundido nos permite explicar porque a bajas temperaturas, los líquidos, por regla, se cristalizan. En este caso se pone de manifiesto una ley general: la tendencia de todo sistema de partículas al estado con energía mínima.

3. Los polígonos que tienen simetría del quinto orden no pueden dar una red cristalina regular con el empaquetamiento compacto. Ellos se agrupan en formaciones espaciales compactas, cuya densidad puede ser incluso mayor que la del cristal. Bernal los denominó *seudonúcleos*, es decir, núcleos falsos. Entre estos núcleos deben, obligatoriamente, surgir grandes agujeros o bien *huecos*, según la terminología de Frenkel. La presencia de estos «huecos» compensa la densidad excesiva de los núcleos y conduce a que la densidad de los líquidos es, por regla, menor que la de los cristales.

4. Los seudonúcleos no son formaciones suficientemente estables. Gracias a la gran cantidad de «huecos», las partículas pueden con facilidad pasar de un núcleo a otro, formando en semejante caso polígonos de diversas formas. Como resultado, a diferencia de un cristal, el líquido tiene no una estructura determinada, sino que gran cantidad de estructuras equivalentes, parecidas entre sí, que corresponden a un mismo valor, de la energía del sistema. Como la entropía del sistema se define por el número de diferentes estructuras, correspondientes al estado dado (§ 28.7), vemos que *a una misma temperatura, la entropía de un cristal es mucho menor que la de su fundido*.

### § 34.3. Tiempo medio de estado sedentario

1. La estructura de los líquidos varía continuamente. La causa de este fenómeno radica en que la gran cantidad de «huecos» en el empaquetamiento de las partículas del líquido, favorece a su desplazamiento. La partícula del líquido oscila alrededor de una posición instantánea de equilibrio durante cierto tiempo, que según la expresión figurada de Frenkel recibió el nombre de *tiempo de estado sedentario*. A continuación, la partícula salta al lugar del hueco y se une a otro seudonúcleo. Estos procesos transcurren de forma aleatoria, diversas partículas pasan de un estado a otro, durante diferentes intervalos de tiempo, pero a causa de la presencia de un enorme número de partículas puede ser introducido el concepto de *tiempo medio de estado sedentario*  $\tau$ , como el intervalo de tiempo en el transcurso del cual no varía la configuración estructural de los seudonúcleos, que caracteriza la ordenación próxima.

El tiempo medio de estado sedentario es razón inversa de la probabilidad de que una partícula pase al lugar del hueco, mientras que éste, al lugar de la partícula. La probabilidad de la «migración» puede ser calculada del modo siguiente.

2. Para que una partícula se separe del seudonúcleo, debe poseer una energía cinética que supere el trabajo que hay que consumir para vencer las fuerzas moleculares de atracción. Esta es denominada *energía de activación*; designémosla por  $\epsilon$ . Mientras mayor sea la energía de activación, menor será la probabilidad de migración de la partícula.

Por otro lado, al subir la temperatura del líquido, la probabilidad de migración crece. La temperatura caracteriza la energía cinética media de las moléculas, pero gracias a la ley de distribución de las moléculas por las velocidades de Maxwell, siempre se hallará cierto número de partículas, cuya energía cinética será mayor que la media. Al subir la temperatura, el tanto por ciento de estas moléculas más rápidas crecerá y, por consiguiente, aumentará también el porcentaje de partículas, cuya energía resultará mayor que la de activación. De este modo también aumenta la probabilidad de migración.

3. Designemos por  $x$  la razón entre la energía de activación y la energía cinética media de la partícula (§ 26.11):

$$x = \epsilon_0/\epsilon_k \approx \epsilon_0/kT$$

(ya que  $\epsilon_k \approx kT$ ). La probabilidad de migración  $w$  será cierta función de esta razón:

$$w = f(\epsilon_0/kT) = f(x). \quad (34.1)$$

Razonamientos análogos a los aducidos en el § 26.11, nos conducirán a la deducción de que la probabilidad de «migración» de la partícula al lugar del hueco, será expresada por la función exponencial del tipo

$$f(x) = a^{-ax}.$$

El signo menos en el exponente aparece por las siguientes consideraciones. Con el crecimiento de la energía de activación o con la disminución de la temperatura, la probabilidad de migración debe disminuir, como mostramos con anterioridad. Por consiguiente, la función  $w = f(x)$  debe ser decreciente. Y

para la base del exponente  $a > 1$  la función exponencial decrece si el exponente es un número negativo.

4. Así, pues, la probabilidad de «migración» de la partícula

$$w = e^{-\frac{\epsilon_0}{kT}}. \quad (34.2)$$

A bajas temperaturas el exponente es muy grande por su módulo; con esto, él será un número negativo y la probabilidad de «migración» se aproximará a cero ( $a^{-\infty} = 0$ ). A altas temperaturas, el exponente tenderá a cero, mientras que la probabilidad de migración de la partícula tenderá a la unidad ( $a^0 = 1$ ).

5. El tiempo medio de estado sedentario de una partícula es razón inversa de la probabilidad de su migración, de forma que  $\tau \sim 1/w$ . De (34.2) se desprende que

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{\epsilon_0}{kT}}, \quad (34.3)$$

donde  $\tau_0$  es una magnitud constante característica para el líquido dado. La gráfica de la dependencia de la probabilidad de migración y del tiempo medio de estado sedentario de la partícula de la temperatura se ofrece en la fig. 34.2. Vemos

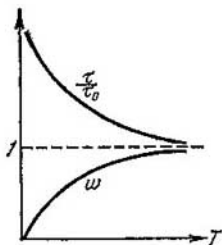


Fig. 34.2.

que con el aumento de la temperatura el tiempo medio del estado sedentario decrece con gran rapidez, mientras que crece la probabilidad de migración de la partícula al lugar del hueco.

### § 34.4. Difusión en los líquidos

1. La presencia de huecos entre los seudonúcleos, nos permite de manera cualitativa explicar el mecanismo del fenómeno de difusión y el rozamiento interno en los líquidos y aclarar el carácter de la dependencia entre los coeficientes de difusión y viscosidad de la temperatura.

El mecanismo de la difusión fue aclarado en el § 25.5. Allí mismo obtuvimos la expresión para el coeficiente de difusión:  $D = \frac{1}{3} \lambda v$ , donde  $\lambda$  es la longitud media del recorrido libre de una molécula,  $v$ , la velocidad media del movimiento caótico de traslación de las moléculas (movimiento térmico).

2. En los líquidos, la difusión transcurre con mayor lentitud que en los gases. Pero con el aumento de la temperatura el coeficiente de difusión crece con mucha rapidez. Los experimentos realizados con átomos marcados llevan a la conclusión de que el coeficiente de difusión en los líquidos (así como en los cristales) varía con el aumento de la temperatura según la ley

$$D = A e^{-\frac{\epsilon_0}{kT}} \quad (34.4)$$

Aquí  $A$  es cierta constante característica para la sustancia dada,  $k$ , la constante de Boltzmann,  $T$ , la temperatura absoluta,  $\epsilon_0$ , la energía de activación. Para los metales líquidos  $\epsilon_0$  alcanza un valor aproximado de 1...3 eV. La gráfica de la dependencia entre el coeficiente de difusión y la temperatura está mostrada en la fig. 34.3.

3. Siguiendo las ideas de Frenkel, el mecanismo de la difusión en los líquidos puede ser explicado del modo siguiente. Designemos por  $\delta$  la longitud media del recorrido libre de una partícula (en realidad, ésta será la distancia entre los

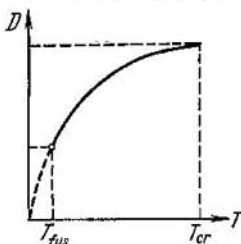


Fig. 34.3.

seudonúcleos). Entonces, la velocidad media de desplazamiento de una partícula dentro de un líquido  $u \approx \delta/\tau$ , donde  $\tau$  es el tiempo medio de su estado sedentario. Por analogía con (25.10), tenemos

$$D = \frac{1}{3} \delta u = \frac{\delta^2}{3\tau} = \frac{\delta^2}{3\tau_0} e^{-\frac{e_n}{kT}}. \quad (34.5)$$

Este resultado corresponde a los datos del experimento (véase (34.4)).

### § 34.5. Viscosidad de los líquidos

1. Comparemos la dimensión de la densidad  $[\rho] = ML^{-3}$ , el coeficiente de difusión  $[D] = L^2T^{-1}$  y la viscosidad  $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$ . Vemos que

$$[\eta]/[\rho] = [D],$$

de donde sigue, que

$$\eta = K\rho D, \quad (34.6)$$

donde  $K$  es cierto coeficiente adimensional.

La correlación (34.6) se cumple correctamente para los gases. Aquí, como se desprende del experimento,  $K \approx 1$  y

$$\eta \approx \rho D \approx \frac{1}{3} \lambda \nu \rho. \quad (34.7)$$

Con el crecimiento de la temperatura, la viscosidad de los gases aumenta. En efecto, poniendo en (34.7) los valores de  $\rho = m_0 n$ ,  $\lambda = 1/n\sigma$  y  $\nu = \sqrt{3 kT/m_0}$ , obtenemos

$$\eta = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{m_0 kT}{3}}. \quad (34.7')$$

Así, pues, la viscosidad de los gases es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta.

2. En lo que se refiere a los líquidos, para ellos la correlación (34.7') no es válida. No se cumple incluso cualitativamente: a diferencia de los gases, la viscosidad de los líquidos no sólo no crece al subir la temperatura, sino que disminuye con brusquedad.

Fue Frenkel quien por primera vez prestó atención a este hecho y mostró que *la viscosidad de los líquidos debe ser razón inversa del coeficiente de difusión*. Para demostrarlo, haremos uso de la ecuación (11.12), que expresa la dependencia entre la fuerza de resistencia del rozamiento y la viscosidad, la velocidad relativa y las dimensiones características del cuerpo en movimiento por el líquido.

Al surgir en el líquido el gradiente de velocidades (§ 11.7), los seudonúcleos se deslizan unos respecto a otros. La interacción que se crea en este caso se reduce a la resistencia de rozamiento que sufre el «hueco» al pasar de un seudonúcleo a otro. Por lo tanto, en la fórmula (11.12) se puede sustituir la velocidad  $v$  por la velocidad media de desplazamiento de los huecos  $u$ , mientras que la dimensión característica  $L$  por el tamaño  $\delta$  del hueco. Así, pues, la resistencia de rozamiento

$$F = B\eta u\delta, \quad (34.8)$$

donde  $B$  es cierto coeficiente numérico. Pero de acuerdo con (34.5)  $u\delta = 3D$ , de forma que

$$F = 3B\eta D.$$

Esta última expresión puede ser escrita

$$\eta = f/D, \quad (34.9)$$

donde  $f = F/(3B)$  es cierta magnitud constante que tiene la misma dimensión que la fuerza. De esta forma queda mostrado que la viscosidad del líquido es inversamente proporcional al coeficiente de difusión. Poniendo en (34.9) el valor del coeficiente de difusión de (34.4), obtenemos

$$\eta = \eta_0 e^{\frac{\epsilon_0}{kT}}, \quad (34.10)$$

donde  $\eta_0$  es el valor del coeficiente de viscosidad para  $\epsilon_0 = 0$ , o sea, cuando no hay energía de activación. De esta manera, como vemos de (34.10), la viscosidad de los líquidos disminuye realmente con brusquedad al subir la temperatura. La gráfica de esta dependencia está mostrada en la fig. 34.4. Semejante dependencia del coeficiente de viscosidad de la temperatura con perfección concuerda con los datos experimentales.

3. Señalemos, que las expresiones que hemos deducido más arriba para la dependencia del coeficiente de difusión (34.5) y la viscosidad (34.10) de la temperatura, sólo tienen sentido en determinado intervalo de temperaturas: del punto de fusión hasta la llamada *temperatura crítica*  $T_{cr}$ , pasando de la cual el líquido no puede existir (§ 35.5). Esto precisamente se muestra en las figs. 34.3 y 34.4.

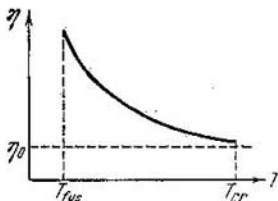


Fig. 34.4.

## § 34.6. Cuerpos amorfos

1. En la naturaleza se tropieza con cuerpos que por sus propiedades mecánicas son cercanos a los sólidos, pero en los cuales, según los datos del análisis de estructuras con rayos X, las moléculas tienen empaquetamiento como las de los líquidos, es decir, ordenación próxima. Entre ellos podemos enumerar el vidrio, así como diversas resinas, pez, el fundido de azúcar espeso (caramelo) y una serie de otras sustancias. La peculiaridad de estas sustancias, llamadas *amorfas*, consiste en que carecen de un punto determinado de fusión. Al subir la temperatura estos cuerpos gradualmente se emblandecen, su viscosidad disminuye y comienzan a comportarse como líquidos viscosos corrientes.

El hecho de que estas sustancias carezcan de un punto determinado de fusión y orden de largo alcance en el empaquetamiento de las moléculas, nos lleva a la conclusión de que los cuerpos amorfos no son sólidos, sino que líquidos reenfriados y, por lo tanto, muy viscosos.

2. La causa del surgimiento de los cuerpos amorfos puede ser comprendida, haciendo uso de la idea acerca de la existencia en los líquidos de seudonúcleos compactos, entre los cuales hay pozos, es decir, los llamados huecos. Puede resultar que la energía interna de los seudonúcleos bien empaquetados sea menor que la de un cristal y sólo gracias a la presencia de los huecos, con exceso de energía, la energía interior sumaria del líquido es mayor que la del cristal.

Cuando el cristal se forma, una parte de las moléculas debe difundir a los huecos y, por lo tanto, crear una estructura regular, o sea, el orden de largo alcance. Pero a bajas temperaturas la probabilidad de difusión es muy pequeña, ya que el tiempo de estado sedentario de las moléculas tiende al infinito (véase la fig. 34.2). Por esta causa, cuando ciertos fundidos se enfrían con rapidez, suele ser más probable la formación de un cuerpo amorfo y no una red cristalina ordenada.

3. Notemos que con el estado amorfo, el cuerpo posee cierto exceso de energía en comparación con el estado cristalino estable. Por esta razón, el estado amorfo recibe el nombre de *metaestable*, es decir, no del todo estable.

Es natural que con el tiempo los cuerpos amorfos se cristalizan. Por ejemplo, el caramelo, después de cierto tiempo,



forma cristales de azúcar. Por este motivo puede ser explicado por qué al conservar tiempo prolongado la confitura, ésta se espesa produciéndose azúcar. Del mismo modo, el vidrio «envejece»: en él se forman granos policristalinos. Al mismo tiempo pierde su transparencia y se hace frágil.

### § 34.7. Energía de la capa superficial y tensión superficial del líquido

1. Las partículas que están en la capa superficial del líquido poseen exceso de energía en comparación con las que se encuentran en el interior de éste. Dentro del líquido cada partícula está rodeada, por término medio, por  $Z$  vecinas más próximas ( $Z \approx 11$ ), mientras que en la capa superficial tiene dos veces menos de vecinos (fig. 34.5). A temperaturas cercanas a la de fusión, la energía de interacción en dos de las más próximas moléculas  $\varepsilon \approx U_0$ , donde  $U_0$  es la profundidad del pozo de potencial de la interacción molecular (véase la fig. 31.7). De aquí se deduce que la energía de la partícula en el interior del líquido  $\varepsilon_{\text{int}} \approx Z\varepsilon \approx ZU_0$ , mientras que la energía de esa misma partícula en la superficie  $\varepsilon_{\text{sup}} \approx \frac{1}{2} Z\varepsilon \approx \frac{1}{2} ZU_0$ . Como  $U_0$  es un número negativo,  $\varepsilon_{\text{sup}} > \varepsilon_{\text{int}}$ . Así, pues, el exceso de energía que posee la partícula situada en la superficie, en comparación con la energía de esa misma partícula en el interior del líquido, será expresada así:

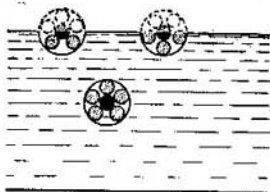


Fig. 34.5.

$$\Delta\varepsilon_{\text{sup}} = \varepsilon_{\text{sup}} - \varepsilon_{\text{int}} \approx -\frac{1}{2} ZU_0 = \frac{1}{2} Z |U_0|.$$

Gracias al exceso de energía, la distancia entre las moléculas aumenta (§§ 31.5, 31.6), lo que significa que la capa superficial es más «mullida» que las zonas interiores del líquido.

2. Supongamos que la unidad de área de la capa superficial contiene  $n'$  partículas. La capa superficial de área  $S$  tendrá una energía excesiva

$$\mathcal{E}_{\text{sup}} = \Delta\varepsilon_{\text{sup}} n' S \approx \frac{1}{2} Z n' S |U_0|. \quad (34.11)$$

A cada unidad de área corresponderá una energía

$$\alpha = \mathcal{E}_{\text{sup}}/S \approx 1/2 Z n' |U_0|. \quad (34.12)$$

Esta magnitud recibe el nombre de *energía superficial de un líquido*.

3. Todo sistema de partículas tiende a pasar al estado con la energía mínima. Para un líquido esto se reduce a que al no haber fuerzas exteriores éste tomará la forma, que con el volumen prefijado tenga la menor superficie. En Geometría se demuestra que tal forma es una esfera. Por esta causa se explica que durante la ingravidez, que fue examinada en el § 7.3, una gota de agua tiene rigurosa forma esférica.

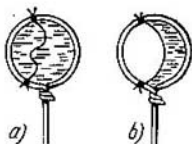


Fig. 34.6.

La tendencia del líquido a disminuir su superficie, lleva a que en el límite entre la película superficial y el sólido surgen las *fuerzas de tensión superficial* (o trabajo superficial). Un sencillo experimento nos permite cerciorarnos de esto. Atemos en un aro de alambre un hilo como se muestra en la fig. 34.6, a y sumerjamos el aro en una solución de jabón. En la película de jabón que se crea, el hilo se dispondrá de modo aleatorio. Si, a continuación, por uno de los lados del hilo destruimos la película, el resto de la película se reducirá de forma que su superficie sea la mínima (fig. 34.6, b). El hilo se sujeta tensado por las fuerzas de la tensión superficial, dirigidas al interior de la película por tangentes a su superficie.

4. Recibe el nombre de *tensión superficial*  $\sigma$  la razón entre la fuerza con la que la película actúa sobre el contorno que la limita y la longitud de este contorno  $l$ :

$$\sigma = F/l. \quad (34.13)$$

### § 34.8. Presión bajo la superficie curvada de un líquido

1. Cuando un líquido hace contacto con un sólido son posibles los casos en que el líquido moja o no dicho cuerpo. Por ejemplo, el mercurio moja bien las superficies limpias de los metales, pero no moja el vidrio limpio; el agua moja el vidrio limpio, pero no moja las superficies grasientas, etc.

La superficie libre de un líquido se curva en el límite con un sólido; en función del carácter de la humectación se forma un *menisco* de una u otra forma. Los líquidos que mojan forman un menisco cóncavo, los que no mojan, convexo. El ángulo entre la superficie mojada de un sólido y la tangente al menisco en su punto de intersección con el sólido se denomina *ángulo de contacto*  $\theta$ .

Si el líquido moja la superficie de un sólido, el ángulo de contacto es agudo (fig. 34.7, a):  $0 \leq \theta < \pi/2$ . Si el líquido

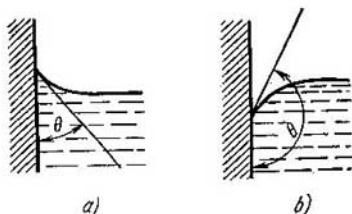


Fig. 34.7.

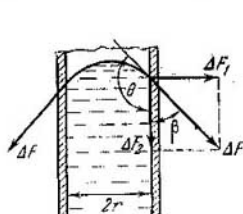


Fig. 34.8.

no moja la superficie del sólido, el ángulo de contacto es obtuso (fig. 34.7, b):  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ . El valor del ángulo de contacto es función de la composición química del sólido, del líquido y del gas que los rodea, de la pureza de estas sustancias y de su temperatura. Con la humectación perfecta  $\theta = 0$ , con la no humectación perfecta  $\theta = \pi$ .

2. La curvatura de la superficie ejerce sobre el líquido presión excesiva. Para calcular esta presión nos limitaremos al caso, cuando el líquido se encuentra en un tubo, cuyo radio es igual a  $r$  (fig. 34.8). La superficie curvada del líquido forma un segmento esférico, cuya superficie forma con la del tubo un ángulo de contacto  $\theta$ .

Sobre el sector del límite de contacto del líquido con la pared sólida de longitud  $\Delta l$ , actúa una fuerza de tensión superficial  $\Delta F = \sigma \Delta l$ . Esta fuerza está dirigida por la tangente a la superficie del líquido. Descompongamos esta fuerza en dos componentes:  $\Delta F_1$  y  $\Delta F_2 = \Delta F \cos \beta = -\sigma \Delta l \cos \theta$ . La componente  $\Delta F_2$  provoca una presión, excesiva en comparación con la atmosférica.

3. Para calcular la presión excesiva es preciso dividir la fuerza de presión  $F_2 = -\sigma \cdot 2\pi r \cos \theta$  por el área del

círculo  $S = \pi r^2$ . Tenemos

$$p = F_2/S = -2\sigma \cos \theta/r. \quad (34.14)$$

Vemos que la presión excesiva es negativa si el ángulo de contacto es agudo: para  $0 \leq \theta < \pi/2$  obtenemos  $\cos \theta > 0$ . Si el ángulo de contacto es obtuso, es decir,  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ ,  $\cos \theta < 0$  y la presión excesiva resulta ser positiva.

La fórmula (34.14) puede ser reescrita en la forma

$$p = 2\sigma/R, \quad (34.15)$$

donde  $R = -r/\cos \theta$  es el radio de la superficie curvada esférica. Vamos a considerar positivo el radio de la superficie convexa y negativo, el de la cóncava.

Damos al lector la posibilidad de mostrar por su cuenta que cuando la curvatura es cilíndrica, la presión excesiva

$$p = \sigma/R. \quad (34.16)$$

### § 34.9. Fenómenos capilares

1. Los tubos con estrecho canal interior reciben el nombre de *capilares* (del latín *capillus* — pelo). Si semejante tubo se sumerge en un líquido que lo moja, ésta ascenderá

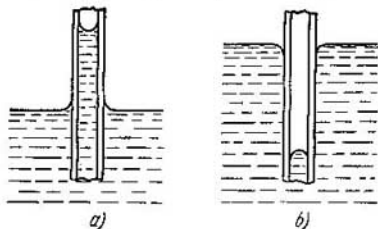


Fig. 34.9.

por el interior del tubo a un nivel superior al de la superficie del líquido en el recipiente ancho (fig. 34.9, a). Al contrario, un líquido que no moja descenderá a un nivel inferior que el del recipiente (fig. 34.9, b).

Para calcular la altura del ascenso (o descenso) capilar del líquido, hay que tener en cuenta que en el tubo, el

líquido se encuentra en equilibrio si la suma de la presión hidrostática  $\rho gh$  y la presión bajo la superficie curvada  $p = -2\sigma \cos \theta/r$  es igual a cero:

$$\rho gh - 2\sigma \cos \theta/r = 0;$$

de aquí se desprende que

$$h = 2\sigma \cos \theta/(r\rho g). \quad (34.17)$$

Vemos que en el caso de un líquido que moja, cuando el ángulo de contacto es agudo ( $\cos \theta > 0$ ), la altura de ascenso es positiva; si el líquido no moja el ángulo de contacto es obtuso ( $\cos \theta < 0$ ) y la altura del ascenso capilar es negativa. El nivel del líquido que no moja en el tubo capilar será inferior que el nivel en el recipiente ancho.

2. Los fenómenos capilares se observan con frecuencia en la naturaleza. Gracias a ellos puede ser explicada la higroscopía de una serie de cuerpos, o sea su capacidad de absorber la humedad. Esta es la causa de la higroscopía del algodón, los tejidos, el terreno, hormigón. La higroscopía se toma en consideración en la práctica de la construcción: entre el cimientado del edificio y las paredes se coloca una capa de cartón embreado, resina u otra materia que obstaculiza la penetración de la humedad por las paredes a los locales de vivienda.

La humedad subterránea asciende por los capilares del terreno a la superficie y se evapora. Para conservar la humedad en el suelo hay que destruir los capilares, lo que se consigue mediante el arado y rastrillado.

## Capítulo 35

### VAPOR

#### § 35.1. Evaporación

1. Como sabemos de la práctica, los líquidos son capaces de evaporarse, es decir, de pasar al estado gaseoso. La velocidad de evaporación se aprecia como la cantidad de moléculas que pasan al vapor de la unidad de área por unidad de tiempo. Para diversos líquidos ésta es diferente: si en un platito echamos éter, a la temperatura del medio ambien-

te éste se evaporará en el transcurso de varios minutos; a esas mismas condiciones, el agua se conservará varias horas, el mercurio, varios años. La evaporación de los líquidos transcurre a todas temperaturas, pero con el aumento de ésta, la velocidad de evaporación crece con gran rapidez. De este factor se hace uso en la práctica: si hay que secar rápidamente algún objeto, éste se coloca junto a un cuerpo caliente, por ejemplo, una estufa o radiador de calefacción.

2. No sólo los líquidos se evaporan, sino que también los sólidos; por ejemplo, la naftalina o alcanfor, a la temperatura del medio ambiente y presión normal se evaporan sin pasar por el estado líquido. Del mismo modo se evaporan los cristales de bromo y yodo, sobre todo si se calientan. Se evapora también el hielo. Si la ropa húmeda se cuelga al aire helado, el agua se congela, evaporándose después el hielo y la ropa queda seca.

La evaporación de los cuerpos cristalinos se denomina *sublimación*.

La velocidad de sublimación también depende de la temperatura y la naturaleza química de la sustancia. Los cristales moleculares, tales como el bromo o el yodo se evaporan con facilidad, ya que las fuerzas de atracción molecular, que enlazan las moléculas en la red cristalina, son muy débiles. Fácilmente se evapora el hielo, que tiene red cristalina muy mullida. Y al revés, los cristales iónicos, covalentes o metálicos, con empaquetamiento compacto, se evaporan con gran dificultad.

3. El mecanismo de la evaporación puede explicarse del siguiente modo. La molécula (o átomo) que se halla en la superficie del líquido o cristal, es atraída al interior por las fuerzas de la interacción molecular; por lo que se sujeta en la superficie. Para que esta partícula pueda abandonar la sustancia, su energía cinética debe ser mayor que la *energía de evaporación*  $u_0$ , que es igual al trabajo que se debe realizar para vencer la fuerza de atracción molecular y separar la molécula a una distancia tal de la superficie a la que las fuerzas moleculares ya no se manifiestan. Por lo tanto, la condición de evaporación será  $\epsilon_k \geq u_0$  o bien

$$m_0 v^2 / 2 \geq u_0. \quad (35.1)$$

De aquí sigue, que no todas las moléculas pueden abandonar la capa superficial, sino que sólo las más rápidas, cuya velocidad satisface la condición (35.1). Esto permite

comprender por qué durante la evaporización los líquidos se enfrían. Como sabemos, la temperatura del cuerpo se determina por la energía cinética media del movimiento de las moléculas. Es natural, que si del líquido vuelan las moléculas más rápidas, la energía cinética media de las restantes moléculas disminuirá, lo que ocasiona la disminución de la temperatura.

4. La probabilidad de la evaporación puede ser hallada, partiendo de razonamientos análogos a los que en el § 34.3 nos permitieron determinar la probabilidad de «migración» de la partícula al «hueco». Sustituyendo  $\varepsilon_0$  por  $u_0$ , obtenemos:

$$w_{\text{evap}} = e^{-\frac{u_0}{kT}}. \quad (35.2)$$

La velocidad de evaporación es proporcional a la probabilidad de evaporación, ya que mientras más probable sea el paso de las moléculas de la superficie del cuerpo al vapor, mayor será el número de moléculas que pasan al vapor de la unidad de área por unidad de tiempo. Así, pues, la velocidad de evaporación  $G \sim w_{\text{evap}}$ , o bien

$$G = G_0 e^{-\frac{u_0}{kT}}. \quad (35.3)$$

En esta expresión  $G_0$  es proporcional al número de moléculas capaces de abandonar la capa superficial, es decir, de las moléculas cuyas velocidades satisfacen la condición (35.1) Es natural que con el aumento de la temperatura del cuerpo el número de semejantes moléculas crece. Puede ser mostrado que  $G_0 = BT^\alpha$ , donde  $B$  es una constante que depende de la composición química de la materia,  $\alpha \approx 1/2$ . Sustituyendo en (35.3), obtenemos la expresión definitiva para la velocidad de evaporación:

$$G = BT^\alpha e^{-\frac{u_0}{kT}}. \quad (35.4)$$

### § 35.2. Vapor saturado

1. Si en un recipiente cerrado se ubica una cantidad bastante grande de líquido, parte de él se evapora y, a continuación, la cantidad de líquido quedará invariable cuanto tiempo queramos. Pero el proceso de evaporación no puede cesar, las moléculas cuya energía corresponde a la condición (35.1), continuamente abandonarán la superficie del líquido. Es decir, junto con el proceso de evaporación, transcurre el proceso de *condensación* del vapor en líquido, que compensa

el primero. La velocidad de condensación es determinada por el número de moléculas que pasan del vapor al líquido a través de la unidad de área en la unidad de tiempo.

De esta forma, en un recipiente cerrado, después de cierto intervalo de tiempo, se establece *equilibrio dinámico* entre los procesos de evaporación y condensación. La velocidad de condensación se hace igual a la de evaporación y, a partir de este momento, la cantidad de líquido deja de disminuir.

El vapor que se encuentra en estado de equilibrio dinámico con su líquido (o cristal), recibe el nombre de *vapor saturado*.

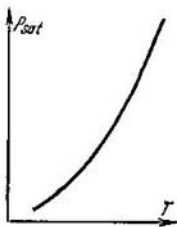


Fig. 35.1.

2. Calculemos de qué parámetros depende la concentración de moléculas del vapor saturado. Con este fin, hay que tener en cuenta que de acuerdo con (35.4), la velocidad de evaporación

no depende de la concentración de moléculas de vapor sobre el líquido, en tanto que la velocidad de condensación es proporcional a la concentración de moléculas de vapor: cuanto mayor cantidad de moléculas haya en la unidad de volumen sobre el líquido, tanto más probable será que la molécula se aproxime a la capa superficial y sea absorbida por ella. Así, pues, la velocidad de condensación

$$g = \beta n, \quad (35.5)$$

donde  $\beta$  es cierto coeficiente,  $n$ , la concentración de moléculas de vapor.

Con el equilibrio dinámico, la velocidad de condensación es igual a la de evaporación. Igualando los segundos miembros de las igualdades (35.4) y (35.5), obtenemos la expresión para la concentración de las moléculas del vapor saturado:

$$n_{sat} = AT^\alpha e^{-\frac{u_0}{kT}}. \quad (35.6)$$

3. La densidad del vapor saturado será obtenida, multiplicando la concentración por la masa de la molécula:

$$\rho_{sat} = m_0 n_{sat} = Am_0 T^\alpha e^{-\frac{u_0}{kT}}. \quad (35.7)$$

La gráfica de esta dependencia se muestra en la fig. 35.1.

Como vemos, con el aumento de la temperatura, la densidad del vapor saturado crece bruscamente.



### § 35.3. Presión del vapor saturado

1. Poniendo en la fórmula (26.10) la expresión para la concentración de las moléculas (35.6), obtenemos la fórmula para hallar la presión del vapor saturado:

$$p_{\text{sat}} = n_{\text{sat}} kT = Akt^{\alpha+1} e^{-\frac{u_0}{kT}}. \quad (35.8)$$

La gráfica de esta dependencia está representada en la fig. 35.2. Para comparar, en la misma figura está trazada la gráfica de la dependencia entre la presión de un gas perfecto y la temperatura (con volumen constante). La presión de un gas perfecto crece de forma lineal con el aumento de la temperatura, mientras que la presión de vapor saturado crece con mucha mayor rapidez. La causa reside en que el crecimiento de la presión de un gas sólo se condiciona por el aumento de la energía cinética de las moléculas, mientras que en el vapor saturado con el crecimiento de la temperatura, aumenta no sólo la energía cinética de las moléculas, sino que también la concentración de éstas.

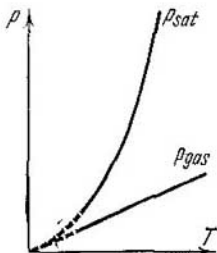


Fig. 35.2.

2. Hay que señalar que la expresión (35.8) no es rigurosa por completo, ya que al deducirla hicimos uso de la fórmula (26.10) para la presión de un gas perfecto, en el que las fuerzas de la interacción molecular se desprecian a causa de la gran distancia entre las moléculas. Pero la concentración de las moléculas del vapor saturado puede ser bastante grande, las distancias entre las moléculas, suficientemente pequeñas y, por lo tanto, la influencia de las fuerzas moleculares puede ser notoria. Pero a pesar de todo, la expresión (35.8) transmite correctamente, en lo fundamental, las propiedades de vapor saturado. Esto nos lo muestra la tabla 35.1, así como la fig. 35.3, la que nos ofrece la gráfica de la dependencia entre la presión de los vapores saturados de agua y la temperatura, confeccionada según los datos de la tabla. Vemos que el carácter de esta dependencia coincide, en lo general, con lo que nos muestra la curva teórica (fig. 35.2) o bien la expresión (35.8).

Tabla 35.1

## Presión y densidad del vapor saturado de agua

$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{kPa}$	$\rho, \text{g/m}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{kPa}$	$\rho, \text{g/m}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{kPa}$	$\rho, \text{g/m}^3$
-30	0,0373	0,33	0	0,611	4,84	30	4,242	30,3
-29	0,0413	0,37	1	0,657	5,22	31	4,493	32,1
-28	0,0467	0,41	2	0,705	5,60	32	4,754	33,9
-27	0,0507	0,46	3	0,759	5,98	33	5,030	35,7
-26	0,0573	0,51	4	0,813	6,40	34	5,320	37,6
-25	0,0627	0,55	5	0,872	6,84	35	5,624	39,6
-24	0,0693	0,60	6	0,935	7,3	36	5,941	41,8
-23	0,0773	0,66	7	1,001	7,8	37	6,276	44,0
-22	0,0853	0,73	8	1,073	8,3	38	6,625	46,3
-21	0,0933	0,80	9	1,148	8,8	39	6,991	48,7
-20	0,103	0,88	10	1,228	9,4	40	7,376	51,2
-19	0,113	0,96	11	1,312	10,0	45	9,583	65,4
-18	0,125	1,05	12	1,403	10,7	50	12,33	83,0
-17	0,137	1,15	13	1,497	11,4	55	15,73	104,3
-16	0,151	1,27	14	1,598	12,1	60	19,92	130
-15	0,165	1,38	15	1,705	12,8	65	25,00	161
-14	0,181	1,51	16	1,817	13,6	70	31,16	198
-13	0,199	1,65	17	1,937	14,5	75	38,54	242
-12	0,217	1,80	18	2,064	15,4	80	47,34	293
-11	0,237	1,96	19	2,197	16,3	85	57,81	354
-10	0,260	2,14	20	2,338	17,3	90	70,10	424
-9	0,284	2,33	21	2,486	18,3	95	84,51	505
-8	0,309	2,54	22	2,644	19,4	100	101,3	588
-7	0,337	2,76	23	2,809	20,6	120	198,5	1091
-6	0,368	2,99	24	2,984	21,8	140	361,3	1890
-5	0,401	3,24	25	3,168	23,0	160	618,1	3083
-4	0,437	3,51	26	3,361	24,4	180	1003	4782
-3	0,476	3,81	27	3,565	25,8	200	1555	7099
-2	0,517	4,13	28	3,780	27,2			
-1	0,563	4,47	29	4,005	28,7			

3. De la expresión (35.8) se desprende que la presión del vapor saturado sólo depende de su composición química y temperatura y no es función de la magnitud del volumen del recipiente, donde se encuentra el vapor, es decir, libre del líquido.

El experimento confirma esta deducción y es fácil de explicar de la siguiente forma.

Supongamos que se aumenta el espacio libre sobre el líquido, subiendo el émbolo en la instalación de la fig. 35.4. Al comienzo el manómetro registra cierta disminución de la presión, lo que certifica que la concentración de las molé-

culas del vapor ha decrecido. Con ello, disminuye la velocidad de condensación (véase (35.5)) y se viola el estado de equilibrio dinámico. Pero como la velocidad de evaporación, que sólo depende de la temperatura, queda invariable, esto llevará a la evaporación adicional de cierta parte del líquido y el restablecimiento del estado de equilibrio dinámico entre

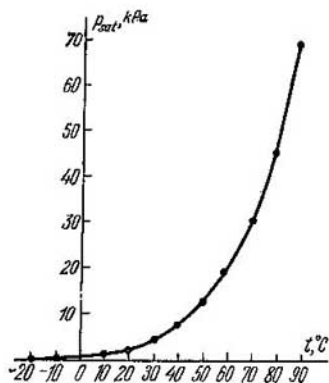


Fig. 35.3.

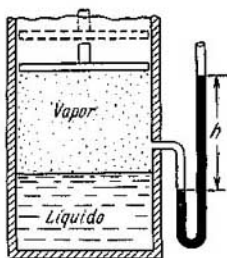


Fig. 35.4.

el vapor y el líquido. Con esto, el manómetro mostrará la restauración del valor inicial de la presión del vapor saturado.

Un proceso análogo observaremos al descender el émbolo. Al comprimir el vapor, su concentración crecerá y la velocidad de condensación superará la de evaporación. El equilibrio dinámico violado se restablecerá a cuenta de que parte del vapor se condensa. En este caso, se restauran el valor inicial de la concentración de las moléculas y la presión del vapor, que sólo dependen de la temperatura.

### § 35.4. Isoterma del vapor

1. En la instalación representada en la fig. 35.4, vamos a desplazar el émbolo de modo permanente. Con esto, el líquido se evaporará todo el tiempo y con cierto volumen  $V_1$  en el recipiente no quedará líquido. Inclusive hasta el volumen

$V_1$ , la presión del vapor saturado quedará, como es natural, invariable.

Si continuamos desplazando el émbolo de manera que el volumen del vapor sea mayor que  $V_1$ , la presión del vapor disminuirá. En efecto, si el líquido desaparece del recipiente, la disminución de la concentración de las moléculas al expandirse el vapor, ya no se compensará con la evaporación del líquido. Semejante vapor recibe el nombre de *no saturado*

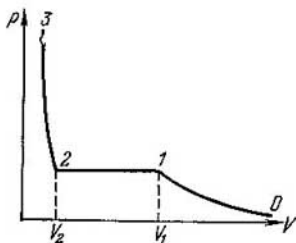


Fig. 35.5.

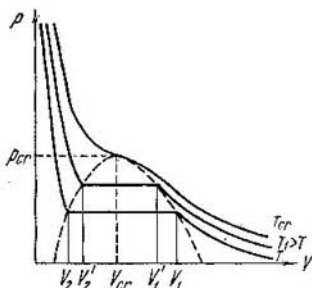


Fig. 35.6.

o *recalentado*. A temperatura invariable, su presión disminuirá, aproximadamente, según la ley de Boyle—Mariotte al aumentar el volumen.

2. Efectuemos ahora el proceso inverso: bajando el émbolo comprimamos el vapor no saturado. Su presión crecerá y para  $V = V_1$  será de nuevo igual a la del vapor saturado. Si continuamos disminuyendo el volumen, parte del vapor se condensa, mientras que la presión seguirá siendo igual a la del vapor saturado.

Por fin, con cierto volumen  $V_2 < V_1$ , todo el vapor se condensa y el émbolo se acerca por completo a la superficie del líquido. La posterior disminución del volumen exigirá una presión colosal, ya que las partículas del líquido tienen empaquetamiento suficientemente compacto y su compresibilidad es muy pequeña.

3. Todo el proceso descrito está representado gráficamente en la fig. 35.5. El sector  $0-1$  corresponde al vapor no saturado, el sector  $1-2$ , al vapor saturado y el sector  $2-3$ , al líquido. Esta curva se denomina *isoterma del vapor*

o bien isoterma de Andrews, en honor del científico que fue el primero que obtuvo e investigó semejantes isotermas.

Notemos que el proceso de expansión y compresión del vapor debe ser realizado con suficiente lentitud. La evaporación del líquido va acompañada de su enfriamiento (§ 35.1), en tanto que la condensación del vapor, por el calentamiento del líquido. La constancia de la temperatura se asegura mediante el intercambio de calor con el medio ambiente. Ya que dicho intercambio transcurre con lentitud, tan despacio hay también que desplazar el émbolo.

4. Realicemos la compresión del gas a una temperatura más alta  $T_1 > T$ . Veremos que el vapor saturado se obtiene en un nuevo volumen  $V'_1 < V_1$  (fig. 36.5). Esto se explica con facilidad: al crecer la temperatura, aumenta con rapidez la presión del vapor saturado (§ 35.3) y para que la presión del vapor recalentado se iguale a ella, hay que disminuir considerablemente el volumen del vapor.

Al mismo tiempo, la condensación completa del vapor saturado y el contacto del émbolo con la superficie del líquido se producirán con un volumen  $V'_2 > V_2$ . La causa radica en la dilatación térmica del líquido, que a temperatura más alta ocupa un volumen mayor.

### § 35.5. Estado crítico de la sustancia

1. Al subir la temperatura, la región del vapor saturado disminuye. Por esta causa, podemos suponer que a cierta temperatura  $T_{\text{crit}}$  no se forma por completo vapor saturado y el vapor no saturado, con un volumen determinado  $V_{\text{crit}}$  y a una presión  $p_{\text{crit}}$  pasará continuamente al estado líquido (fig. 35.6). El experimento confirma esta suposición.

La temperatura  $T_{\text{crit}}$  que corresponde a semejante estado de la sustancia, denomínase *temperatura crítica*,  $p_{\text{crit}}$ , *presión crítica* y la densidad  $\rho_{\text{crit}} = m/V_{\text{crit}}$ , *densidad crítica*. Para el agua, por ejemplo,  $t_{\text{crit}} = 374^\circ \text{C}$ ,  $p_{\text{crit}} = 22,1 \text{ MPa}$ ,  $\rho_{\text{crit}} = 329 \text{ kg/m}^3$ .

2. Podemos abordar el concepto de estado crítico de la sustancia, partiendo de razonamientos algo diferentes. Como fue mostrado, al subir la temperatura la densidad del vapor saturado crece con gran rapidez (§ 35.2). La densidad de un líquido disminuye a cuenta de su dilatación térmica al crecer la temperatura. Si construimos las gráficas de la dependencia entre la densidad del vapor y el líquido de la tempera-

tura (fig. 35.7), veremos que a cierta temperatura las gráficas se unen. Esto nos permite dar la siguiente definición: denominase crítica la temperatura, a la cual la densidad del vapor saturado es igual a la densidad del líquido.

El estado crítico de la materia se puede observar en el experimento propuesto por M. P. Avenarius (fig. 35.8). En una ampolla cerrada hay cierta cantidad de éter. A baja temperatura se ve un brusco límite entre el líquido y el vapor saturado. Si calentamos el recipiente, el nivel del

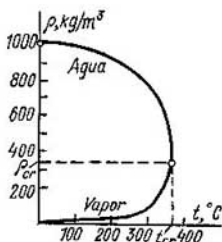


Fig. 36.7.

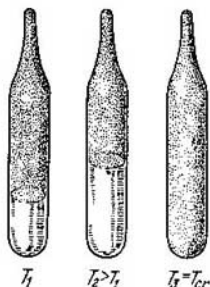


Fig. 35.8.

líquido asciende a pesar de que parte de éste se evaporó al calentarlo. Esto muestra la considerable disminución de la densidad del líquido y aumento de la del gas. A la temperatura crítica, el límite entre el líquido y el vapor desaparece y todo el volumen de la sustancia dentro de la ampolla se hace turbio. Esto se provoca a causa de que a la temperatura crítica, a cuenta de las fluctuaciones de la densidad, por todo el volumen aparecen continuamente e inmediatamente se evaporan gotas microscópicas de líquido. Estas son las que dispersan la luz.

3. A temperaturas mayores que la crítica no se forman líquidos y menos aún cristales, incluso a presiones muy altas. La causa reside en que aquí, la intensidad del movimiento térmico de las moléculas (o átomos) resulta ser tan elevada que incluso con su empaquetamiento relativamente compacto, provocado por grandes presiones, las fuerzas moleculares no pueden asegurar la creación de la ordenación próxima y menos aún, del orden a largo alcance.

Esto significa, que a temperaturas superaltas, incluso a grandes presiones, sólo es posible el estado gaseoso de la sustancia, que se caracteriza por el movimiento completamente caótico de las partículas de que ella consta.

4. A enormes temperaturas y gigantescas presiones, provocadas por fuerte campo gravitacional, en ciertos tipos de estrellas que reciben el nombre de «enanos blancos», la materia pasa a un estado superdenso especial. Con esto, los electrones se separan de los núcleos, creando el gas electrónico, de la misma forma que ocurre en los cristales metálicos. Sin embargo, entre estos estados hay una diferencia de principio.

En los metales los átomos sólo pierden los electrones externos (de valencia) y los iones que se crean forman la red cristalina espacial. En el estado superdenso, los átomos pierden todos los electrones y los núcleos «desnudos», cuyas dimensiones son decenas de miles de veces menores que las de los átomos, forman un empaquetamiento muy compacto, pero por completo desordenado. Con ellos, la densidad de la materia es colosal, de un orden de  $10^7 - 10^8 \text{ kg/m}^3$ . Un vaso de semejante materia ( $200 \text{ cm}^3$ ) pesaría 20 t (un vaso de mercurio tiene una masa de 3 kg).

Pero a pesar de todo, este estado de la sustancia, llamado plasma superdensa, por su estructura y propiedades es más cercano al gas que al cristal o líquido. Pero tal gas por sus propiedades se distingue grandemente del perfecto.

### § 35.6. Humedad del aire

1. La *humedad absoluta* de aire  $f$  se aprecia por la masa de los vapores de agua que contiene  $1 \text{ m}^3$  de aire a las condiciones dadas, es decir, según *la densidad del vapor de agua*. Para que los cálculos sean cómodos, la densidad se expresa no en unidades del SI, sino en gramos por metro cúbico:

$$f = \rho_{\text{vapor}} [\text{g/m}^3]. \quad (35.9)$$

En meteorología, por regla, aprecian la humedad absoluta no por la densidad de vapor, sino que por su presión:  $f_m = p$ .

2. La humedad absoluta se puede determinar por *el punto de rocío*. Así se denomina la temperatura a la que los vapores, que antes no saturaban el aire, se convierten en saturadores. De la tabla 35.1 se desprende que si la humedad absoluta del aire es igual a  $5,60 \text{ g/m}^3$ , a  $2^\circ \text{C}$  los vapores se saturarán y caerá el rocío.

El punto de rocío se determina mediante *higrómetros* (del griego *hygros* — húmedo). El higrómetro de Lambert es representado (esquemáticamente) en la fig. 35.9. En el recipiente  $A$  se vierte éter y, con ayuda de la pera, por él se hace pasar el aire. Durante la evaporación intensa del éter la temperatura baja; cuando ella sea igual al punto de rocío,

las paredes del recipiente se empañan. El anillo *K* está separado del recipiente por una arandela hecha de un material que conduce mal el calor, por lo que no se enfría. El contraste entre el anillo brillante y el recipiente empañado, facilita el registro del momento cuando éste se empaña. El punto de rocío se determina por el termómetro *T*, cuya bolita de mercurio está sumergida en el éter.

3. La noción de humedad absoluta que hemos introducido más arriba es insuficiente, ya que nos interesa no sólo el contenido absoluto de humedad en el aire, sino que también, hasta qué grado la humedad está próxima al estado de satura-

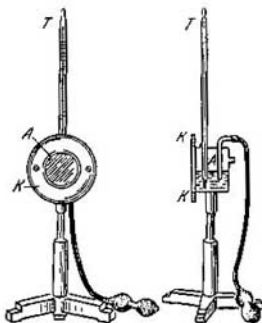


Fig. 35.9.

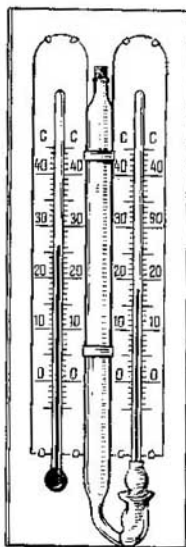


Fig. 35.10.

ción. Por esta razón se introduce el concepto de la humedad relativa *B*. Recibe el nombre de *humedad relativa*, la razón entre la humedad absoluta y la densidad (en meteorología — la presión) del vapor saturado a la temperatura dada:

$$B = f/\rho_{\text{sat}} \approx f_m/p_{\text{sat}}. \quad (35.10)$$

4. Después de medir con un higrómetro el punto de rocío y conociendo la temperatura del aire, con ayuda de la tabla 35.1 se puede determinar la humedad relativa. Por ejemplo, si el punto de rocío es igual a 8° C y la temperatura del



aire 19° C, la humedad relativa

$$B = \frac{8,3}{16,3} \approx \frac{1,073}{2,197} \approx 50 \%$$

No obstante, por regla, la humedad relativa se determina con otros instrumentos, higrómetros de cabello, de película o semiconductores, así como mediante *psicrómetros*. Así se llama un instrumento que consta de dos termómetros: la bolita de uno de ellos está cubierta de batista, un extremo de la cual se encuentra sumergido en agua destilada (fig. 35.10). El termómetro seco registra la temperatura del aire, el húmedo, la del agua en evaporación. Ya hemos dicho que cuando un líquido se evapora, su temperatura baja (§ 35.1). Queda claro, que mientras más seco sea el aire, es decir, menor sea su humedad relativa, más intensivo será el proceso de evaporación del agua de la batista húmeda y se enfriará en mayor grado. Y a la inversa, si el aire contiene mucho vapor y su humedad relativa es grande, la evaporación del agua de la batista transcurrirá con lentitud y se enfriará lentamente. De esta forma, la diferencia en las indicaciones de los termómetros seco y húmedo, (llamada *diferencia psicrométrica*) depende de la humedad relativa del aire. Con ayuda de tablas especiales, es fácil hallar la humedad del aire por la diferencia psicrométrica.

### Capítulo 36

## TRANSICIONES DE FASE

### § 36.1. Variación del estado de agregación

1. Como muestra la experiencia, al calentar los sólidos éstos se funden y, a continuación, se evaporan; al enfriar la materia observamos el fenómeno inverso. Hay casos, cuando al subir la temperatura de un cristal, éste no se funde sino que de inmediato se evapora (sublima). Resulta que aquí juega notorio papel no sólo la temperatura, sino que también el valor de la presión sobre la superficie de la sustancia.

El estado de agregación de la sustancia depende de su temperatura y la presión sobre su superficie.

La transición de la materia de un estado de agregación a otro, acompañada por la variación del empaquetamiento de las partículas (orden de largo alcance, ordenación próxima o desorden total), recibe el nombre de *transición de fase de primer género*.

2. Como mostró L. D. Landáu, existen transiciones de *fase de segundo género*. Con estas transiciones varían ciertas propiedades de la sustancia, pero el carácter del empaquetamiento de las partículas queda invariable, lo que es certificado por el análisis de estructuras con rayos X. Algunas de las transiciones de fase de segundo género serán examinadas al estudiar las propiedades magnéticas de la materia (véase el cap. 42).

## § 36.2. Diagrama de transición líquido — gas

1. Examinemos con mayor detalle la gráfica de la función (35.8) que expresa la dependencia entre la presión del vapor saturado y la temperatura (fig. 36.1). Aquí, el punto *A*, que yace en la gráfica, corresponde al estado *bifásico*, es decir,

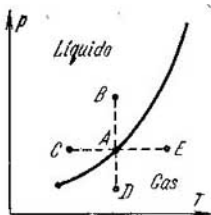


Fig. 36.1.

al vapor saturado situado sobre el líquido y que con éste se encuentra en permanente equilibrio dinámico. Aclaremos a que estados corresponden los puntos *B*, *C*, *D* y *E*, situados fuera de la curva.

2. La transición del estado *A* al *B* transcurre por medio de la elevación isotérmica de la presión. Pero como aclaramos en el § 35.4, durante la compresión isotérmica del vapor saturado, él pasa al estado líquido. Por consiguiente el punto *B* corresponde a un líquido comprimido hasta una presión, mayor que la del vapor saturado a la temperatura dada. Es fácil cerciorarse de que el punto *C* corresponde al estado del líquido, cuya temperatura es inferior a la del vapor saturado a la presión dada.

Así, pues, los puntos que yacen encima de la curva, corresponden al estado líquido de la materia.

3. La transición del estado *A* al *D* transcurre mediante la disminución isotérmica de la presión. Como fue mostrado en el § 35.4, la expansión isotérmica del vapor saturado provoca la evaporación del líquido y la posterior transformación

del vapor saturado en no saturado, es decir, el paso al estado gaseoso. El punto *D* corresponde al gas, cuya presión es inferior a la del vapor saturado a la temperatura dada.

Del mismo modo es fácil cerciorarse de que el punto *E* corresponde al estado gaseoso de la materia, cuya temperatura es superior a la del vapor saturado a la presión dada, es decir, al vapor recalentado.

De tal manera, los puntos que yacen debajo de la curva corresponden al estado gaseoso de la materia.

### § 36.3. Diagrama de la transición cristal — gas

1. La presión del vapor saturado sobre un cristal durante su sublimación, puede ser expresado por la misma función (35.8) que para la presión del vapor sobre un líquido, si sustituimos la energía de evaporación  $u_0$  por la de sublimación  $w_0$  y la constante  $A$ , por una nueva constante  $B$  que caracterice dicha materia. Obtendremos la misma curva que en la fig. 36.1, pero con una inclinación algo diferente. Resulta que en cierto punto, correspondiente a la temperatura  $\Theta$  estas curvas se cruzan (fig. 36.2).

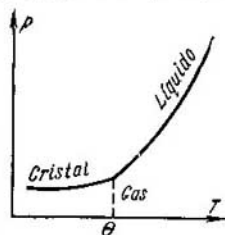


Fig. 36.2.

2. Al elevar la temperatura, el cristal se transforma en gas. Cuando elevamos la presión, el gas se transforma en cristal, ya que el empaquetamiento de las partículas en el cristal es mucho más compacto que en los gases.

De este modo, el diagrama de transición de fase cristal—gas es en absoluto análogo al diagrama de la transición líquido—gas. También aquí los puntos que yacen debajo y a la derecha de la curva (baja presión y alta temperatura) corresponden al estado gaseoso de la materia; los puntos que yacen sobre la curva a su izquierda (alta presión y baja temperatura), al estado cristalino.

### § 36.4. Diagrama de transición cristal — líquido

1. Los dos casos que hemos examinado con anterioridad, es decir, las transiciones de la materia de los estados gaseoso al líquido o cristalino o viceversa, tienen mucho de común.

En los dos casos, la elevación de la temperatura favorece a la transición al estado gaseoso, ya que el aumento de la temperatura provoca el crecimiento de la desordenación del movimiento molecular, lo que es propio de los gases.

Del mismo modo, el aumento de la presión favorece al paso a un estado más condensado, o sea, líquido o cristalino, ya que con el aumento de la presión las moléculas se aproximan y las fuerzas de atracción que con esto surgen favorecen a crear cierta ordenación en su empaquetamiento: próxima a alta temperatura y de largo alcance, cuando ésta es más baja. Como resultado, los diagramas que caracterizan estas dos transiciones son muy parecidas (fig. 36.2). Las curvas que dividen los ámbitos con estados de agregación diferentes están inclinados al eje de abscisas bajo un ángulo agudo.

2. Es más complicado el caso del diagrama de la transición de fase cristal—líquido.

Como en los anteriores diagramas, aquí la subida de la temperatura favorece al paso de un estado más ordenado a otro menos ordenado, es decir, del cristal al líquido. Por esta causa, en el diagrama la región del estado líquido yace a la derecha del cristalino. En lo que se refiere a la presión, aquí tenemos dos casos.

3. En la mayoría de las sustancias, en el estado cristalino las partículas tienen empaquetamiento más compacto que en el líquido. Por lo tanto, en estas sustancias la elevación de la presión favorecerá a la transición del empaquetamiento más «mullido» de los líquidos al empaquetamiento más compacto de los cristales. Esto quiere decir, que en el caso dado los puntos que corresponden al estado líquido de la materia, yacerán a la derecha y debajo de la curva de la transición de fase (mayores temperaturas y menores presiones), mientras que los puntos que corresponden al estado cristalino, a la izquierda y sobre la curva (menores temperaturas y mayores presiones). La fig. 36.3 nos ofrece el diagrama de los estados y las transiciones de tal sustancia.

4. Pero se tropieza también con sustancias, cuyo empaquetamiento cristalino es más «mullido» que el líquido. Para estas sustancias, la densidad del cristal es menor que la del líquido.

Nos puede servir de ejemplo el agua, así como algunos metales y aleaciones (bismuto, fundición gris). El aumento de la presión favorece a la compactación del empaqueta-

miento molecular y, por lo tanto, la fusión de dichas sustancias. A este mismo resultado también nos lleva el crecimiento de la temperatura. En el caso dado, los puntos que corresponden al estado líquido se disponen a la derecha y sobre la curva de la transición de fase (mayores temperaturas y grandes presiones), en tanto que los puntos que

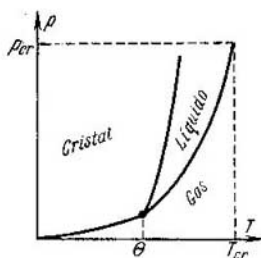


Fig. 36.3.

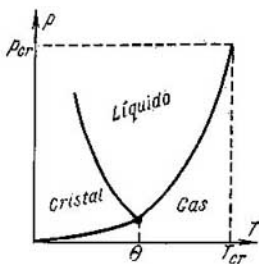


Fig. 36.4.

corresponden al estado cristalino, a la izquierda y bajo la curva (bajas temperaturas y pequeñas presiones).

El diagrama de estado y de las transiciones de fase se muestra en la fig. 36.4. Aquí, la curva de fusión está inclinada al eje de abscisas bajo un ángulo obtuso.

### § 36.5. Diagrama de transición cristal — cristal

1. Toda sustancia sólo tiene un estado líquido y uno gaseoso, pero puede tener varios estados cristalinos. La causa reside en el diferente grado de ordenación del empaquetamiento molecular de estos tres estados de agregación.

Al estado gaseoso de la materia corresponde el completo desorden molecular. A semejante distribución de las moléculas (o los átomos) es propia una gran cantidad de posibles reagrupaciones de las moléculas en el espacio. No obstante, las propiedades físicas de la sustancia quedan invariables durante todas estas reagrupaciones. Por esta causa, a todas ellas les corresponde un mismo estado gaseoso.

El estado líquido está caracterizado por la ordenación próxima del empaquetamiento molecular (véase el cap. 34).

Pero aquí la reagrupación de las partículas tampoco se refleja en las propiedades físicas de la sustancia. Esta es la causa por la que la sustancia sólo tiene un estado líquido.

Pero con el estado cristalino de la sustancia la cuestión es completamente diferente. En este caso, son muy posibles diversos procedimientos de empaquetamiento espacial de las partículas, que se distinguen por sus propiedades. En el cap. 33 examinamos con detalle semejantes ejemplos.

2. Uno u otro orden de empaquetamiento de las partículas en la red cristalina, se determina por las condiciones con las que transcurrió la cristalización, a saber—la temperatura de la sustancia y la presión externa. Al variar dichas condiciones, cambia el carácter del empaquetamiento de las partículas.

De esta forma, los procesos de cristalización de la materia, es decir, los procesos de reconstrucción de la red cristalina, al variar las condiciones externas, también son ejemplos de transiciones de fase de primer género y pueden ser representados mediante los diagramas de estado.

3. Como ejemplo, examinaremos el azufre. A una presión de 133,3 Pa y una temperatura de 95,5° C, de los vapores de azufre se

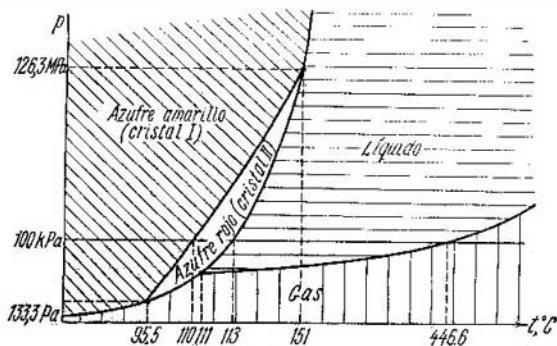


Fig. 36.5.

desprenden cristales tanto amarillos, como rojos. A menores presiones y temperaturas más bajas se desprenden sólo cristales amarillos, a mayores presiones y temperaturas, sólo rojos.

Un cuadro análogo se observa durante la cristalización del fundido. A una temperatura de 151° C y una presión de 126,3 MPa, del

fundido se desprenden cristales de las dos clases, a presión más alta, sólo amarillos, mientras que a menor presión, sólo cristales rojos. El diagrama de estado y transiciones de fase está representado en la fig. 36.5. Señalemos que la escala en los ejes de coordenadas no se ha observado a causa de la amplia gama de presiones y temperaturas.

### § 36.6. Punto triple

1. En todos los diagramas de estado hay puntos característicos en los que las tres gráficas que corresponden a las transiciones de fase se cruzan. En las figs. 36.3 y 36.4 son los puntos  $\Theta$ , en los que se encuentran las curvas que corresponden a las transiciones gas—líquido, gas—cristal y líquido—cristal, es decir, a los procesos de ebullición, sublimación y fusión. En la fig. 36.5 son: el punto  $\Theta_1 = 95,5^\circ \text{C}$ , correspondiente a las transiciones gas—cristal I, gas—cristal II y cristal I—cristal II; el punto  $\Theta_2 = 151^\circ \text{C}$ , correspondiente a las transiciones cristal I—cristal II, cristal I—líquido y cristal II—líquido; el punto  $\Theta_3 = 111^\circ \text{C}$ , correspondiente a las transiciones gas—cristal II, gas—líquido y líquido—cristal II. A estas temperaturas y a las presiones bien determinadas que les corresponde, es posible la existencia de tres fases, por ejemplo, gas, líquido y cristal.

El punto en el diagrama de estado que corresponde a las condiciones, con las que es posible la existencia de tres fases (tres estados de agregación diferentes de la materia), recibe el nombre de *punto triple*.

2. Como para la sustancia dada, el punto triple es una constante por completo determinada, éste puede ser empleado como punto de referencia al confeccionar la escala de temperaturas. En el SI el punto triple del agua se ha tomado como punto de referencia para confeccionar la escala absoluta de temperaturas. Precisamente al punto triple del agua se le adjudica la temperatura exacta 273,16 K (§ 26.7).

### § 36.7. Variación de la energía interna y de la entropía con las transiciones de fase de primer género

1. Las transiciones de fase de primer género son acompañadas por la variación de la energía interna del sistema de partículas que forman el cuerpo. Desde este punto de vista examinemos los procesos de fusión y vaporización.

Cuando el empaquetamiento es cristalino, las partículas oscilan alrededor de la posición de equilibrio, correspondiendo las distancias entre ellas al valor mínimo de la energía de interacción, a la temperatura dada de la sustancia. Durante la fusión del cristal, la red espacial se destruye y el orden de largo alcance en el empaquetamiento se convierte en ordenación próxima. Por regla, en este caso se produce el «mullido» del empaquetamiento, la distancia entre las partículas aumenta, lo que provoca el crecimiento de la energía de interacción entre ellas. Si al contrario, el empaquetamiento de los líquidos resulta ser más compacto que el cristalino (como el agua), las distancias entre las moléculas se hace menor que la distancia correspondiente al mínimo de energía de interacción, lo que también lleva al crecimiento de la energía interna.

Así, pues, *la fusión de un cristal se acompaña por el crecimiento de su energía interna* a cuenta del aumento de la interacción entre las partículas. Es natural, que con semejante proceso es necesario comunicar al cuerpo cierta energía, el llamado *calor de fusión*. En este caso, la entropía del sistema también crece, gracias al paso del orden de largo alcance a la ordenación próxima del empaquetamiento de las partículas.

2. Mediante razonamientos análogos, el lector puede cerciorarse por su cuenta de que *los procesos de sublimación y vaporización también se acompañan por el crecimiento de la energía interna del sistema*. Para esto hay que tener en cuenta que de acuerdo con la condición formulada en el § 31.5, la energía de interacción de las partículas en los gases se considera igual a cero, mientras que con el empaquetamiento compacto, ésta es negativa. Por consiguiente, para la sublimación de un cristal y para la evaporación de un líquido, hay que transmitir al cuerpo cierta energía, es decir, *el calor de transición de fase (o de transformación)* (calor de sublimación, calor de evaporación).

Durante las transiciones de fase, la energía de cada partícula varía en la magnitud  $\varepsilon_0$ . Si multiplicamos  $\varepsilon_0$  por el número de partículas  $N$  y, tomando en consideración que  $m = Nm_0$  es la masa de la sustancia, hallaremos la variación de la energía interna con la transición de fase:

$$\Delta U = N\varepsilon_0 = Nm_0\varepsilon_0/m_0 = m\varepsilon_0/m_0. \quad (36.1)$$



De acuerdo con el primer principio de termodinámica (27.6) el calor de transición de fase

$$Q = \Delta U + A = m\varepsilon_0/m_0 + p(V_2 - V_1) = \\ = m[\varepsilon_0/m_0 + p(1/\rho_2 - 1/\rho_1)],$$

donde  $p$  es la presión durante la transición de fase,  $\rho_2$  y  $\rho_1$ , la densidad de la sustancia en los estados final e inicial. El calor específico de la transición de fase

$$\lambda = Q/m = \varepsilon_0/m_0 + p(1/\rho_2 - 1/\rho_1). \quad (36.2)$$

3. Durante la fusión de la materia la distancia entre las partículas varía de forma insignificante en comparación con las distancias entre ellas en el cristal. Con la evaporación o sublimación, las distancias entre las moléculas se hacen, aproximadamente, 10 veces mayores que en los líquidos o en el estado sólido. De aquí sigue, que el calor específico de evaporización debe ser mucho mayor que el calor de fusión. Por ejemplo, para el hielo a la presión atmosférica normal el calor específico de fusión  $\lambda_{fus} = 0,335$  MJ/kg mientras que el calor específico de vaporización a esa misma presión,  $\lambda_{vap} = 2,26$  MJ/kg.

De la ley de conservación de la energía se desprende que con el proceso inverso (condensación del vapor al estado líquido o cristalino o bien durante la cristalización del fundido), la energía interna aumenta correspondientemente, en tanto que el calor de transición de fase se desprende. Esta deducción se confirma de modo experimental.

El cuerpo puede recibir el calor de transición de fase a cuenta del intercambio de calor con el medio ambiente. En tal caso, la transición de fase transcurre a temperatura constante que es función de la presión a la que la materia se encuentra. La temperatura de la transición de fase puede ser definida mediante el diagrama de estado. Por ejemplo, en la fig. 36.5 vemos que con la presión atmosférica normal, el azufre se funde a  $113^\circ\text{C}$  y bulle a  $446,6^\circ\text{C}$ .

4. De las gráficas aducidas vemos que con el crecimiento de la presión la temperatura de ebullición de los líquidos y de sublimación de un cristal crece, ya que aquí siempre se desprende de  $p_2 > p_1$  que también  $T_2 > T_1$ . En lo que se refiere al punto de fusión, al aumentar la presión, éste se eleva en aquellos cuerpos donde el empaquetamiento cristalino es más compacto que el del líquido (véase la fig. 36.3).

Los cuerpos del tipo del hielo, en los que el empaquetamiento cristalino es más «mullido» que el del líquido, se comportan de otro modo. Aquí, al aumentar la presión, el punto de fusión baja. En realidad, en este caso de  $p_2 > p_1$  se desprende que  $T_2 < T_1$  (véase la fig. 36.4).

5. Si la transmisión de energía a cuenta del intercambio de calor es insuficiente, el calor de transición de fase sólo puede obtenerse a cuenta de la variación de la energía del movimiento molecular, lo que se acompaña por la variación de la temperatura del cuerpo.

Por ejemplo, semejante proceso da la posibilidad de almacenar los gases licuados en la vasija de Dewar. En ella, el intercambio de calor con el medio ambiente está reducido al mínimo (§ 21.5). El líquido se evapora intensamente, lo que provoca su enfriamiento. Por esta causa, la vasija de Dewar con gas licuado no se debe cerrar, ya que esto lleva al cese de la evaporación y, por lo tanto, al calentamiento del líquido hasta la temperatura del medio ambiente. Como esa temperatura es superior a la crítica, el líquido pasará de inmediato al estado gaseoso, lo que produciría una explosión.

Gracias a la intensa sublimación se conserva a la presión atmosférica el anhídrido carbónico sólido, o sea, el hielo seco. Su temperatura constituye  $-75^\circ\text{C}$ , aunque la del medio ambiente es mucho mayor.

### § 36.8. Estados metaestables

1. No debemos pensar que en cuanto varía la temperatura o la presión, el cuerpo pasa de inmediato a un nuevo estado de agregación, correspondiente al diagrama de estado. Sólo dos transiciones de fase se realizan sin retardo al variar la temperatura o la presión: la sublimación o la fusión de un cristal. El resto de las transformaciones de fase con frecuencia se retardan. La transición de fase puede no transcurrir, aunque la temperatura y la presión del cuerpo corresponden al nuevo estado de agregación.

Si el cuerpo se encuentra en un estado de agregación que, de acuerdo con el diagrama de fase, no concuerda con la temperatura y presión, decimos que dicho cuerpo está en *estado metaestable*.

Uno de los ejemplos de estado metaestable fue analizado en el § 34.6, es decir, el estado amorfo que es de por sí un

*líquido sobreenfriado*. También son posibles el estado de *líquido recalentado*, *vapor sobreenfriado*, así como la existencia de la red cristalina de cierto tipo a ciertas condiciones, cuando otro tipo de empaquetamiento cristalino es más estable.

2. Estudiemos con más detalle este último proceso. Al variar las condiciones externas, la reestructuración de la red cristalina transcurre al haber un fuerte enlace entre las partículas, con empaquetamiento compacto de la red espacial. Las partículas están muy «apretadas», les es difícil reagruparse para formar una nueva red cristalina que corresponda mejor a las nuevas condiciones. Como resultado, se retarda, por regla, el paso de un estado cristalino a otro. Por ejemplo, si el azufre amarillo se calienta hasta  $110^{\circ}\text{C}$  a presión normal, de acuerdo con el diagrama de fase (véase la fig. 36.5), éste debería convertirse en rojo. En realidad esto no ocurre y el posterior calentamiento hasta  $113^{\circ}\text{C}$ , provoca su fusión. Al enfriar el azufre fundido a menos de  $113^{\circ}\text{C}$ , éste crea cristales rojos, pero al seguir enfriándolo a una temperatura inferior a  $110^{\circ}\text{C}$  y hasta la del medio ambiente, los cristales rojos no pasan de inmediato al azufre amarillo. Es necesario un tiempo considerable, de un orden de 24 horas, para que los cristales rojos se conviertan en polvo amarillo.

3. El proceso de recristalización se acelerará en mucho, si un pequeño cristal amarillo se pone en contacto con los cristales rojos que se encuentran en estado metaestable. Resulta que en este caso a las partículas les es mucho más fácil colocarse en las caras ya preparadas de la red cristalina, estable en las nuevas condiciones.

Durante el proceso de formación de la nueva red cristalina de un cristal metaestable, juegan un importante papel las fluctuaciones. Precisamente ellas son las que forman los gérmenes microscópicos del empaquetamiento cristalino estable, alrededor de los cuales comienza el crecimiento del nuevo cristal.

Como los gérmenes microscópicos surgen simultáneamente en diversos puntos y están orientados de manera desordenada, es más probable la formación de una estructura policristalina que monocristalina.

4. La presencia de los gérmenes, que sirven de centros de cristalización, facilita el paso del líquido sobreenfriado al estado cristalino. Por ejemplo, el hiposulfito fundido

puede ser con precaución enfriado hasta la temperatura del medio ambiente y en semejante estado sobreenfriado puede encontrarse días. Pero es suficiente echarle un pequeño cristal, para que el líquido, casi instantáneamente, se cristalice. Señalemos, que en este caso la temperatura del hiposulfito crece gracias a que el calor de fusión se desprende.

En lo que se refiere al líquido recalentado y al vapor sobreenfriado, lo trataremos en los siguientes párrafos.

### § 36.9. Condensación. Vapor sobresaturado

1. Si a presión constante reducimos la temperatura del vapor a menos de la del punto de rocío, debe formarse una mezcla bifásica de líquido—vapor saturado. No obstan-

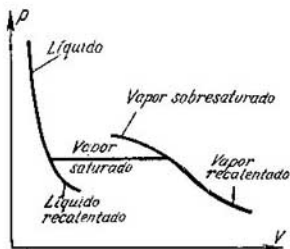


Fig. 36.6.

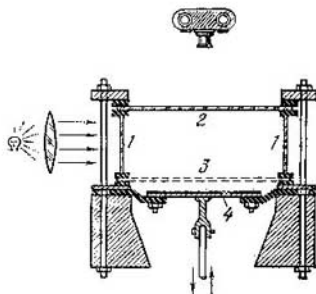


Fig. 36.7.

te, la experiencia nos muestra que la formación de gotas es sólo posible en el caso, cuando en el gas hay *centros de condensación*, es decir, partículas de polvo, iones, salientes agudos en la superficie de los sólidos, etc. Si no hay centros de condensación, las gotas de líquido no se forman y surge un estado metaestable, es decir, *vapor sobresaturado (sobreenfriado)*.

El vapor sobresaturado puede ser también obtenido por medio de la compresión isotérmica del vapor a la temperatura dada. La gráfica de la dependencia entre la presión del vapor sobresaturado y su volumen se muestra en la fig. 36.6.

2. La capacidad de los iones de jugar el papel de centros de condensación se emplea en la cámara de Wilson (fig. 36.7). Esta es un recipiente cilíndrico de vidrio 1, cubierto por arriba con el vidrio 2. Por su parte inferior el recipiente está cubierto de una capa de terciopelo negro húmedo o de paño (en la rejilla 3), sobre el cual se crea el vapor saturado. Al bajar con rapidez el émbolo 4 se produce la expansión

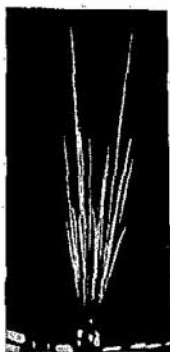


Fig. 36.8.



Fig. 36.9.

adiabática del gas, lo que es acompañado del descenso de la temperatura. A cuenta del enfriamiento el vapor se convierte en sobreenfriado (sobresaturado).

Las partículas cargadas que se forman durante la desintegración radiactiva, por ejemplo, las partículas  $\alpha$  o  $\beta$ , al volar por el gas crean en su camino una cadena de iones. En éstos, como en centros de condensación, se forman gotitas del líquido. De esta forma, al pasar la partícula deja tras de sí una huella bien vista que puede ser fotografiada. En la fig. 36.8 se muestra la foto de las trazas (huellas) de las partículas  $\alpha$  (cortas y gruesas); en la fig. 36.9, las trazas de las partículas  $\beta$  (intermitentes y largas).

### § 36.10. Ebullición. Líquido sobrecalentado

1. La evaporación del líquido se realiza desde su superficie libre a cualquier temperatura. Cuanto más alta sea ésta, la evaporación transcurrirá con mayor rapidez.

Llamamos *ebullición* el proceso de vaporización impetuosa, no sólo de la superficie del líquido, sino que también por todo el volumen. Con este fin, el líquido debe estar calentado a una temperatura suficientemente alta. Durante la ebullición juegan un importante papel las burbujas de gas que contiene el líquido. Semejantes burbujas se forman en el límite entre el líquido y el sólido y están llenas de vapor saturado del líquido.

Al subir la temperatura del líquido, la presión del vapor en las burbujas crece y su volumen aumenta. La fuerza de elevación que actúa sobre la burbuja, según la ley de Arquímedes, crece a medida que su volumen aumenta. A determinadas condiciones, dicha fuerza se hace mayor que la de cohesión entre las burbujas y la pared sólida. En tal caso, la burbuja se separa de la pared, emerge y estalla, expulsando el vapor.

2. La presión de vapor saturado  $p_{\text{sat}}$  dentro de una burbuja que se encuentra en la superficie del líquido, es igual a la suma de la presión externa sobre el líquido  $p_{\text{ext}}$  y la presión bajo la superficie curvada:

$$p_{\text{sat}} = p_{\text{ext}} + 2\sigma/r, \quad (36.3)$$

donde  $r$  es el radio de la burbuja,  $\sigma$ , el coeficiente de tensión superficial (§ 34.8). Si la burbuja tiene dimensiones de un orden de varios milímetros y más, el segundo sumando en (36.3) puede ser despreciado. Por ejemplo, para el agua a una temperatura de  $100^\circ\text{C}$  la magnitud  $\sigma = 58,8 \cdot 10^{-3}\text{ N/m}$  y siendo  $r = 1\text{ mm}$ ,  $2\sigma/r = 2 \cdot 58,8 \cdot 10^{-3}/10^{-3} = 118\text{ Pa}$ . Pero la presión atmosférica normal es igual a  $1,01 \cdot 10^5\text{ Pa}$ , lo que es unas 1000 veces mayor. Por consiguiente, para burbujas de tamaño suficientemente grande la condición de su emergencia y su estallido junto a la superficie del líquido, se escribirá así:

$$p_{\text{sat}} \geq p_{\text{ext}}. \quad (36.4)$$

Esta es la *condición de ebullición*.

Así, pues, la ebullición de un líquido es posible cuando en él hay burbujas de dimensiones bastante grandes (para el agua del orden de 1 mm). La ebullición comenzará en

aquel caso, cuando la presión del vapor saturado sea igual a la presión exterior sobre la superficie del líquido.

Como ya hemos establecido, la presión del vapor saturado sólo depende de la temperatura del líquido. De la condición (36.4) se desprende que el punto de ebullición depende de la presión exterior, es decir, al aumentar ésta crece el punto de ebullición. El punto de ebullición del agua a diversas presiones puede ser hallado mediante la tabla 35.1.

3. Si en el líquido no hay burbujas que favorezcan al proceso de ebullición, éste se puede sobrecalentar sin que comience la ebullición. En semejante estado metaestable *el líquido* recibe el nombre de *sobrecalentado*.

También podemos obtener un líquido sobrecalentado si disminuimos la presión exterior sobre el líquido, de forma que sea menor que la presión del vapor saturado a la temperatura dada. La gráfica de la dependencia entre la presión del líquido sobrecalentado y su volumen está mostrada en la fig. 36.6.

4. El líquido sobrecalentado se utiliza en *las cámaras de burbujas*, inventadas por D. Gleser en 1952 para visualizar las trazas (huellas) de las partículas cargadas relativistas, es decir, de partículas en movimiento a velocidades cercanas a la de la luz. Tales partículas crean en los gases muy pocos iones, por lo que en la cámara de Wilson sus trazas no se ven. En los líquidos, donde las moléculas tienen empaquetamiento compacto, semejantes partículas crean una cantidad mucho mayor de iones que en los gases y su traza puede ser registrada.

El principio de funcionamiento de la cámara de burbujas es análoga al de la de Wilson. La partícula relativista, al pasar por el líquido caliente, crea en su recorrido una cadena de iones. Al reducir de forma brusca la presión sobre el líquido, éste pasa al estado sobrecalentado. Los iones sirven de centros de ebullición. Las burbujas que surgen forman una traza a lo largo del recorrido de la partícula, que se fotografía (fig. 36.10). En las cámaras de burbujas se utiliza como líquido de trabajo el hidrógeno, propano o xenón licuados.

### § 36.11. Licuación de los gases

1. Para que un gas se convierta en líquido su temperatura deberá ser menor que la crítica. Para tales gases como el cloro ( $t_{\text{crit}} = 144^{\circ}\text{C}$ ), amoníaco ( $t_{\text{crit}} = 132,4^{\circ}\text{C}$ ), dióxido

de carbono ( $t_{\text{crit}} = 31,1^{\circ}\text{C}$ ), xenón ( $t_{\text{crit}} = 16,7^{\circ}\text{C}$ ) y algunos otros, cuya temperatura crítica es de un orden de la del medio ambiente, el problema se resuelve con facilidad. Reduciendo su temperatura a menos de la crítica, se comprimen isotérmicamente y se obtiene el líquido. Es mucho



Fig. 36.10.

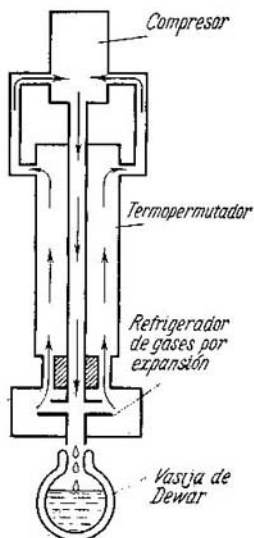


Fig. 36.11.

más difícil producir oxígeno líquido ( $t_{\text{crit}} = -118,8^{\circ}\text{C}$ ), nitrógeno ( $t_{\text{crit}} = -147,1^{\circ}\text{C}$ ), hidrógeno ( $t_{\text{crit}} = -239,9^{\circ}\text{C}$ ) y en particular helio líquido ( $t_{\text{crit}} = -267,9^{\circ}\text{C}$ ). En este caso son necesarias instalaciones especiales que permitan crear temperaturas muy bajas.



Existen una serie de métodos que permiten resolver el problema de licuación de los gases. Detengámonos en uno de ellos, que consiste en el enfriamiento de los gases cuando estos realizan trabajo útil mediante la expansión adiabática. Las máquinas refrigeradoras, que funcionan según este principio, reciben el nombre de *refrigerador de gases por expansión*. P. L. Kapitsa creó un *termopermutador de pequeña turbina*, cuyo rotor es puesto en rotación por el gas previamente comprimido.

2. Examinemos el principio de funcionamiento de una instalación para licuar el gas. Esta consta de un compresor, termopermutador y refrigerador de gases por expansión (fig. 36.11).

El compresor es una máquina de pistón que comprime el gas. El exceso de calor que se crea al comprimir el gas, se extrae mediante un sistema de refrigeración por agua. El gas comprimido pasa por el tubo interior del termopermutador, en el que por el tubo exterior de mayor diámetro fluye el gas enfriado. Después de pasar por el termopermutador y enfriarse, el gas comprimido pasa por la tobera de Laval y llega a las paletas del rotor de la turbina, poniendo este último en rotación. Durante la expansión adiabática del gas se realiza trabajo a cuenta de la disminución de su energía interna. Con esto la temperatura baja tan fuertemente que parte del gas se convierte en líquido y fluye a la vasija de Dewar. Otra parte del gas enfriado, pero que no llegó a convertirse en líquido, vuelve al termopermutador, en donde se enfría una nueva porción de gas comprimido, seguidamente pasa al compresor y de nuevo se comprime.

3. El desarrollo de los métodos para la producción de gases licuados y, por esta causa, de bajas temperaturas, llevó a la creación de la *técnica criógena*. En la actualidad, los gases licuados tienen extensa aplicación en las investigaciones científicas, donde son necesarias bajas temperaturas, así como en la técnica. Por ejemplo, cuando se evapora el aire líquido, primero lo hace el nitrógeno y queda oxígeno puro. Hoy día, éste es el más barato procedimiento de obtención de oxígeno puro, que ampliamente se utiliza en medicina, para la soldadura autógena, para acelerar los procesos en los altos hornos y fundición de acero. El oxígeno líquido, mezclado con sustancias orgánicas combustibles (algodón, virutas) forma materias explosivas (oxilicuidos), que son utilizadas en la industria minera. Su ventaja con-

siste en que si no se produjo la explosión, después de cierto intervalo de tiempo el oxígeno se evapora y la cápsula explosiva deja de ser en absoluto peligrosa.

4. Los gases licuados pueden pasar al estado cristalino, disminuyendo su temperatura. Con este fin, hay que enfriar el oxígeno líquido hasta  $-218,8^{\circ}\text{C}$ , el nitrógeno hasta  $-210,0^{\circ}\text{C}$  y el hidrógeno hasta  $-259,2^{\circ}\text{C}$  (a presión normal). Sólo el helio es una exclusión, ya que a presión normal queda líquido hasta el cero absoluto y se cristaliza a presiones por arriba de 2,5 MPa (§ 70.5).

## Quinta parte

# ELECTRODINÁMICA

### Capítulo 37

## CAMPO DE CARGAS INMÓVILES EN EL VACÍO

### § 37.11. Líneas de fuerza

1. En los caps. 10 y 18 examinamos la interacción de cargas eléctricas puntiformes y dipolos en el vacío. Para mayor facilidad escribamos de nuevo las correlaciones fundamentales y recordemos su sentido.

El campo de las cargas inmóviles, llamado *campo electrostático*, se caracteriza por dos magnitudes físicas: la intensidad  $E$  y el potencial  $\varphi$ . Por definición, el vector de intensidad

$$E = F/q, \quad (37.1)$$

donde  $q$  es una carga de prueba,  $F$ , la fuerza que actúa sobre la carga de prueba en el punto dado del campo (§ 10.5). El potencial

$$\varphi = U/q, \quad (37.2)$$

donde  $U$  es la energía potencial de una carga de prueba en el punto dado del campo (§ 18.7).

2. Si el campo está creado por la carga puntual  $Q$ , la intensidad (§ 10.6)

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (37.3)$$

y el potencial (§ 18.8)

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (37.4)$$

3. Podemos obtener un evidente cuadro del campo según el método de las líneas de fuerza, propuesto por Faraday.

Llamamos *línea de fuerza* (línea de intensidad) a una línea cuyas tangentes en cada punto coincide con la dirección del vector de intensidad. A la línea de fuerza se le adjudica una dirección determinada que coincide con la del vector de intensidad.

Si la fuente del campo es una carga puntiforme positiva, el vector de intensidad está dirigido a lo largo del radio vector; por lo contrario, si la fuente del campo es una carga negativa, el vector de intensidad estará dirigido en sentido opuesto (fig. 10.7). De aquí sigue que las líneas de fuerza comienzan en las cargas positivas y terminan en las negativas.

4. No se debe adjudicar a las líneas de fuerza un sentido mayor que el de una evidente imagen del campo. Tampoco hay que considerar que el campo parece que "consta" de líneas de fuerza (como el cepillo de pelos). En realidad, por cualquier punto del campo se puede trazar una línea de fuerza, de forma que hay una enorme cantidad de líneas de fuerzas.

No hay que identificar las líneas de fuerza con las trayectorias de movimiento de las cargas en el campo; la causa está en que por la tangente a la trayectoria está dirigido el vector de velocidad y la dirección de la velocidad no siempre coincide con la de las líneas de fuerza y, por lo tanto, con la dirección del vector de intensidad.

### § 37.2. Superficies equipotenciales

1. Existe otro método más para representar los campos electrostáticos, es decir, el método de *las superficies equipotenciales*. Llamamos equipotencial cierta superficie, en la que todos los puntos tienen el mismo valor del potencial.

Por ejemplo, si la fuente del campo es una carga puntual, de (37.4) se desprende que las superficies equipotenciales serán aquí una familia de esferas concéntricas con su centro en el punto donde se encuentra la carga. En la fig. 37.1 está mostrada la sección plana de este sistema de superficies equipotenciales; con trazos se representan las líneas de fuerza.

Como vemos en la figura, *la dirección de la línea de fuerza en cada punto del campo, es normal a la superficie*

*equipotencial*. Demostremos que ésta es una propiedad común de las líneas de fuerza, característica para el campo de una carga o sistemas de cargas tomados al azar.

2. Para la demostración tomemos en la superficie equipotencial dos puntos cercanos, entre los que la distancia es igual a  $\Delta l$ . Calculemos el trabajo que se realizará al desplazar la carga  $q$  entre esos dos puntos.

Como ya sabemos (§ 18.7), el trabajo para desplazar una carga entre dos puntos del campo, es igual al producto de la magnitud de la carga por la diferencia de potencial:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (37.5)$$

Este trabajo es igual a cero, ya que los puntos se encuentran en una misma superficie equipotencial y  $\varphi_1 = \varphi_2$ ; por otro lado, este trabajo puede ser también expresado de la siguiente forma (§ 18.1):

$$A = F\Delta l \cos \alpha = qE\Delta l \cos \alpha. \quad (37.6)$$

Igualando las dos expresiones para el trabajo, obtenemos

$$qE\Delta l \cos \alpha = 0.$$

Pero tanto la carga y la intensidad del campo, como la distancia entre los puntos, no son iguales a cero. Por consiguiente,  $\cos \alpha = 0$ , de donde se deduce que  $\alpha = \pi/2$ . Como éstos son dos puntos arbitrarios de una superficie equipotencial, de aquí sigue que el vector de intensidad está dirigido por la normal a esta superficie.

3. El resultado obtenido tiene gran importancia. Sobre la base de la presente propiedad, por el sistema de superficies equipotenciales podemos confeccionar el sistema de líneas de fuerza y viceversa, por un sistema conocido de líneas de fuerza, construir un sistema de superficies equipotenciales.

De esta manera puede confeccionarse el cuadro de *un campo homogéneo*, que se llama así si en todos sus puntos el vector de intensidad tiene el mismo valor y dirección, o sea,  $E = \text{const.}$  De aquí se desprende que por todos los

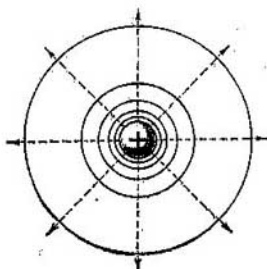


Fig. 37.1.

puntos de dicho campo las líneas de fuerza tienen igual dirección. Esto sólo es posible en el caso, cuando éstas son de por sí un sistema de rectas paralelas. Por consiguiente, las superficies equipotenciales representan un sistema de superficies paralelas, perpendiculares a las líneas de fuerza (fig. 37.2).

4. Según el cuadro de las líneas de fuerza, podemos juzgar acerca de cómo varía el campo de punto en punto. Por ejemplo, en el campo de una carga puntual, las líneas de fuerza están dispuestas de forma concentrada cerca de la carga, es decir, allí donde el módulo del vector de intensidad es mayor (fig. 37.1). Al contrario, en un campo homogéneo, en el que la intensidad por todos los puntos es una misma, la espesura de las líneas de fuerza no varía (fig. 37.2).

### § 37.3. Relación entre la intensidad y el potencial

1. Sea que en cierto punto del campo se ha trazado el vector de intensidad  $E$  y construido la superficie equipotencial  $M_1N_1$ , en la que todos los puntos tienen el mismo

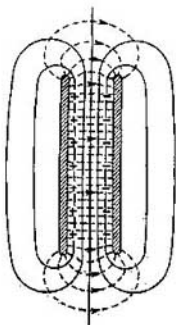


Fig. 37.2.

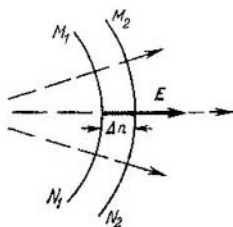


Fig. 37.3.

potencial  $\varphi_1$  (fig. 37.3). A una pequeña distancia  $\Delta n$  construyamos una nueva superficie equipotencial  $M_2N_2$ , cuyos puntos todos tienen igual potencial  $\varphi_2$ .

El trabajo para desplazar la carga de prueba  $q$  por el sector  $\Delta n$  lo calcularemos según dos procedimientos, como

lo hicimos en el párrafo anterior. Tenemos

$$A = q (\varphi_1 - \varphi_2) = qE\Delta n.$$

De aquí se desprende, que

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta n} = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta n}. \quad (37.7)$$

Aquí,  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  es la variación del potencial durante el desplazamiento a la distancia  $\Delta n$  por la normal a la superficie equipotencial, es decir, a lo largo de la línea de fuerza.

De (37.7) se deduce la denominación de la unidad de intensidad del campo eléctrico en el SI, *voltio por metro* (V/m).

2. El resultado obtenido no es del todo exacto, ya que según la fórmula  $\Delta A = F\Delta l \cos \alpha = F\Delta n$  podemos sólo calcular el trabajo elemental, con otras palabras, el trabajo de una fuerza durante un desplazamiento infinitesimal. La igualdad precisa será obtenida, pasando en la expresión (37.7) al límite, cuando el desplazamiento  $\Delta n$  tiende a cero:

$$E = -\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta n} = -\frac{d\varphi}{dn}. \quad (37.8)$$

Así, pues, *la intensidad del campo eléctrico caracteriza la variación del potencial, por unidad de longitud en la dirección de la línea de fuerza*. Notemos, que el vector de intensidad siempre está dirigido hacia el potencial decreciente.

3. En un campo homogéneo, la intensidad de éste es una magnitud constante, por lo que en dicho campo sobre la carga actúa una fuerza invariable. Esto nos permite hacer uso de la fórmula (37.7) para cualesquiera segmentos suficientemente largos de las líneas de fuerza. Así que en el campo homogéneo

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/d. \quad (37.9)$$

### § 37.4. Dipolo en el campo eléctrico

1. Supongamos que un dipolo (§ 10.4) se encuentra en un campo eléctrico homogéneo, de forma que el vector momento del dipolo forma un ángulo  $\alpha$  con el vector de intensidad (fig. 37.4). En el momento dado, sobre el dipolo actúa un par de fuerzas. El momento de este par es igual

al producto de la fuerza por el brazo (§ 22.4):  $M = Fd = qEl \sin \alpha$ . Pero como  $p_e = ql$ , definitivamente obtenemos

$$M = p_e E \sin \alpha. \quad (37.10)$$

Así, pues, el momento giratorio, que actúa sobre el dipolo en el campo eléctrico, es igual al producto del momento eléctrico del dipolo por la intensidad del campo y por el seno del ángulo entre estos vectores.

Bajo la acción del momento giratorio el dipolo gira y se establece de manera que su momento eléctrico sea

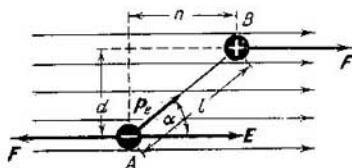


Fig. 37.4.

paralelo al vector de intensidad del campo. En semejante posición tanto el momento giratorio, como la resultante de las fuerzas eléctricas es igual a cero, por lo que el dipolo se encontrará en estado de equilibrio estable.

2. La energía del dipolo en el campo eléctrico es la suma de las energías de las dos cargas que lo constituyen:

$$\mathcal{E} = U_A + U_B = q\varphi_B - q\varphi_A. \quad (37.11)$$

Transformando esta expresión en cierto grado, tendremos

$$\mathcal{E} = -ql \frac{\varphi_A - \varphi_B}{n} \frac{n}{l}.$$

Aquí,  $ql = p_e$  es el momento del dipolo,  $(\varphi_A - \varphi_B)/n = E$ , la intensidad del campo y  $n/l = \cos \alpha$  (véase la fig. 37.4). Por consiguiente, la energía del dipolo en un campo eléctrico

$$\mathcal{E} = -p_e E \cos \alpha. \quad (37.12)$$

Para  $\alpha = 0$  ó  $\alpha = \pi$ , el momento giratorio que actúa sobre el dipolo es igual a cero (véase (37.10)), por lo tanto el dipolo se encuentra en estado de equilibrio. Pero estos dos casos se diferencian por el carácter de su estabilidad.



Si el ángulo  $\alpha = 0$ , la energía del dipolo es la mínima;  $\mathcal{E}_{\min} = -p_e E$ . Esto significa que el dipolo se encuentra en estado de equilibrio estable.

Para  $\alpha = \pi$ , la energía del dipolo resulta ser máxima:  $\mathcal{E}_{\max} = p_e E$ . A esta posición del dipolo le corresponde, como vemos, el estado de equilibrio inestable (lábil) (§§ 19.6 y 22.5).

3. Para obtener evidentes cuadros de los campos eléctricos, se hace uso de la acción orientadora del campo sobre el dipolo. De una

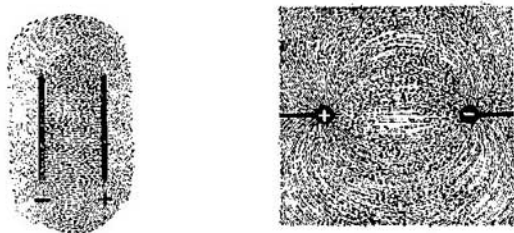


Fig. 37.5.

laminilla metálica se cortan modelos de electrodos y se pegan en el fondo de un recipiente de vidrio. Este se llena de un líquido viscoso que no sea conductor (trementina, glicerina, aceite de ricino) y se echan diminutas partículas, por ejemplo, cabellos cortados, sémola, etc. A continuación, entre los polos se crea una gran diferencia de potencial, de un orden de varios miles de voltios. En el campo eléctrico las partículas se polarizan, es decir, adquieren las propiedades de pequeños dipolos y se disponen a lo largo de las líneas de fuerza del campo (fig. 37.5). En las figuras ofrecidas, vemos que en los entornos de bolitas cargadas el campo es en alto grado heterogéneo, mientras que entre placas paralelas surge un campo prácticamente homogéneo, que sólo se perturba en los bordes.

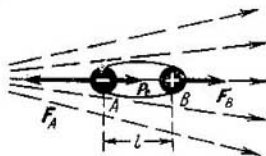


Fig. 37.6.

4. En un campo heterogéneo, además del momento giratorio, sobre el dipolo actúa también la fuerza resultante. La causa reside en que las cargas positiva y negativa se encuentran en diversos puntos del campo (fig. 37.6). La

fuerza resultante

$$F = F_A - F_B = qE_A - qE_B = ql \frac{E_A - E_B}{l}. \quad (37.13)$$

Pero  $ql = p_e$  es el momento dipolar,  $(E_A - E_B)/l = \Delta E/\Delta l$  es el *gradiente de intensidad*, es decir, una magnitud que caracteriza la variación de la intensidad del campo por unidad de longitud. Así, pues,

$$F = p_e \Delta E/\Delta l. \quad (37.14)$$

Bajo la acción de esta fuerza, el dipolo se atrae a la región del campo más fuerte.

Por esta causa, al cuerpo cargado se atraen ligeros objetos: trocitos de papel, partículas de polvo, pedacitos de laminilla, etc. Bajo la acción del campo, estos objetos adquieren un momento dipolar y, ya después, se atraen a la región donde la intensidad del campo es mayor, o sea, más cerca de cuerpo electrizado.

### § 37.5. Condensador plano

1. El condensador plano es un sistema de dos placas metálicas planas paralelas de área  $S$  cada una de ellas. La distancia  $d$  entre las placas es mucho menor que sus dimensiones lineales. En este caso, las placas pueden ser consideradas infinitamente grandes y despreciar las perturbaciones del campo por sus bordes.

Sea igual a  $q$  la carga en una de las placas, en la segunda placa se encuentra una carga de la misma magnitud, pero de signo opuesto. La *densidad superficial* de una carga  $\sigma$  es la razón entre la magnitud de la carga y su área:

$$\sigma = q/S. \quad (37.15)$$

La unidad de densidad superficial en el SI:

$$[\sigma] = C/m^2.$$

2. Como entre las placas del condensador el campo es homogéneo (véase la fig. 37.2), su intensidad es igual en todos los puntos del campo. La práctica nos enseña que la intensidad del campo es proporcional a la densidad superficial de la carga:

$$\sigma = k\varepsilon_0 E, \quad (37.16)$$

donde  $k$  es un coeficiente adimensional. En cursos de física más rigurosos, se demuestra que en el SI,  $k = 1$ . Por lo tanto, la relación entre la densidad superficial de la carga y la intensidad del campo de un condensador plano se expresa del modo siguiente:

$$\sigma = \epsilon_0 E. \quad (37.17)$$

3. Hallemos la expresión para la diferencia de potencial entre las placas del condensador. De acuerdo con (37.9), tenemos

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed. \quad (37.18)$$

Poniendo los valores de  $E$  y  $\sigma$ , obtenemos

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{qd}{\epsilon_0 S}. \quad (37.19)$$

### § 37.6. Capacidad eléctrica

1. En el ejemplo de un condensador plano, veremos que la diferencia de potencial en sus placas, es proporcional a la carga de las placas (véase (37.19)). Resulta que igual resultado se obtiene para un sistema de conductores cargados de forma arbitraria. Basándonos en esto, introducimos una magnitud que recibe el nombre de *capacidad eléctrica*. Se llama capacidad eléctrica de un sistema de conductores una magnitud numéricamente igual a la razón entre la carga y la diferencia de potencial:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (37.20)$$

Para un condensador plano, como se deduce de (37.19) y (37.20), la capacidad eléctrica es igual a

$$C = \epsilon_0 S/d. \quad (37.21)$$

2. La unidad de capacidad eléctrica en el SI es un *faradio*, o sea, la capacidad eléctrica de un condensador en el que la variación de la carga en 1 C, provoca un cambio de potencial de 1 V:

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C/1 V}.$$

Los condensadores utilizados en radiotecnica tienen una capacidad eléctrica mucho menor que el faradio. Por esta razón, para la marcación se emplean partes de la unidad: microfaradio ( $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ ) y picofaradio ( $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ ).

3. De la expresión (37.21) se desprende la denominación (o dimensión) de la constante dieléctrica *faradio por metro*:

$$[\epsilon_0] = [Cd/S] = F \cdot m/m^2 = F/m.$$

### § 37.7. Energía del campo. Densidad de energía

1. Calculemos la energía de un condensador que posee una capacidad eléctrica  $C$ , en el que la diferencia de potencial entre las placas  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Las cargas en sus placas son de igual valor, pero de signo opuesto:  $q_1 = -q$ ,  $q_2 = q$ . Poniendo estas magnitudes en la expresión (18.30), se obtiene

$$W = \frac{1}{2} (q_2\varphi_1 + q_1\varphi_2) = \frac{q}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{q\Delta\varphi}{2}. \quad (37.22)$$

Tomando en consideración que  $C = q/\Delta\varphi$ , definitivamente obtenemos

$$W = q\Delta\varphi/2 = C\Delta\varphi^2/2 = q^2/2C. \quad (37.23)$$

2. En los márgenes de electrostática es imposible responder a la pregunta de dónde está concentrada la energía: ¿sólo en los cuerpos cargados o por todos los puntos del campo? Sin embargo, los campos alternativos pueden existir independientemente de las cargas. Con esto, como nos indica la práctica, los campos alternativos se propagan en forma de ondas electromagnéticas, que transportan la energía. De forma que el propio campo es portador de energía.

Esta idea fue expresada por primera vez por Maxwell. Fue él quien introdujo la noción de *densidad de energía*  $w = W/v$  como una magnitud numéricamente igual a la razón entre la energía  $W$ , contenida en cierto volumen  $v$ , y la magnitud de dicho volumen. Según Maxwell, la densidad de la energía del campo (en el vacío)

$$w_0 = \epsilon_0 E^2/2. \quad (37.24)$$

### § 37.8. Fuerza de interacción entre las placas de un condensador

1. Haciendo uso de la expresión para la energía de un condensador cargado, podemos calcular la interacción entre sus placas. En tal caso, vamos a considerar que el condensador fue, para comenzar, cargado y, a continuación, desco-

nectado de la fuente, de forma que la carga en sus placas es una magnitud constante. La energía del condensador será expresada por medio de su capacidad eléctrica y carga:

$$W = q^2/(2C) = q^2x/(2\epsilon_0 S),$$

donde  $x$  es la distancia entre sus placas. Haciendo uso de la expresión (19.12), obtenemos

$$F = -dW/dx = -q^2/(2\epsilon_0 S). \quad (37.25)$$

El signo menos muestra que esta fuerza es la de atracción (§§ 10.2 y 31.4).

2. Transformemos la expresión (37.25) teniendo en cuenta que  $q = \sigma S$ , donde  $\sigma$  es la densidad superficial de la carga. Tenemos  $F = -\sigma^2 S/2\epsilon_0$ . Sustituyendo el valor de  $\sigma$  en (37.17), obtendremos

$$F = -\epsilon_0 E^2 S/2. \quad (37.26)$$

3. Como la fuerza referida a la unidad de área es la presión,  $p = F/S$ , de (37.26) se desprende que el campo eléctrico ejerce sobre la placa una presión negativa (en el vacío):

$$p_0 = -\epsilon_0 E^2/2 = -w_0. \quad (37.27)$$

Así, pues, *la presión que el campo eléctrico ejerce sobre la superficie cargada, es igual a la densidad de energía, tomada con signo opuesto*. Hemos obtenido este resultado para el campo de un condensador plano. No obstante, como mostró Maxwell, este resultado es válido para todo campo heterogéneo.

Señalemos, que si las placas del condensador tuvieran una carga de igual signo, el signo de la fuerza  $F$  y de la presión  $p$  sería positivo, lo que corresponde a las fuerzas de repulsión.

### § 37.9. Conductor en el campo eléctrico

1. Por el carácter de su conductividad, todos los cuerpos pueden dividirse en dos clases: *conductores* y *dieléctricos* (de otra forma, aisladores). Los conductores tienen la propiedad de que las cargas eléctricas pueden desplazarse libremente por el volumen de dichos cuerpos. A diferencia de los conductores, en los dieléctricos las cargas se quedan en los lugares donde fueron distribuidas inicialmente.

En el interior de un conductor, la intensidad del campo es igual a cero. En efecto, si el campo no fuese nulo, en el conductor surgiría un movimiento ordenado de las cargas sin consumo absoluto de energía de la fuente externa. Pero esto contradice a la ley de conservación de la energía. Así, pues, la intensidad del campo dentro del conductor  $E_{\text{int}} = 0$ .

De aquí se desprende que todos los puntos de conductor tienen igual potencial, mientras que *la superficie del conductor es equipotencial*. En efecto, de  $E_{\text{int}} = (\varphi_1 - \varphi_2)/d = 0$  se deduce que  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

Más arriba fue mostrado que las líneas de fuerza del campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales. Por esta causa, en el entorno del conductor las líneas de fuerza son perpendiculares a su superficie.

2. Si en el interior del conductor hay una cavidad, la intensidad de campo en ella es igual a cero, independientemente de la clase de campo que haya fuera del conductor.

El fenómeno de *la protección electrostática* se basa en dicho principio: si el aparato se introduce en una envoltura metálica cerrada, sobre el aparato no actuará ninguna variación del campo eléctrico externo. Por regla, con este fin se utiliza una rejilla de cobre apantalladora, que se pone a tierra, de forma que el potencial de la pantalla se conserva igual al de la Tierra.

3. Si dos conductores se ponen en contacto, se produce el flujo de la carga de uno de ellos al otro hasta que sus potenciales se igualen. Hagamos uso de esta propiedad para mostrar que las cargas se disponen sólo en la superficie exterior del conductor.

Pongamos en contacto la superficie exterior de un cuerpo cargado con una bolita no cargada y, a continuación, hagamos contacto entre la bolita y un electroscopio. Las láminas del electroscopio se separarán. Esto demuestra que al hacer contacto con la superficie exterior del cuerpo cargado, a la bolita pasó cierta carga. Si con la misma bolita se hace contacto con la superficie interior del cuerpo cargado y después se toca con ella el electroscopio, las láminas de éste no se separan. Esto quiere decir, que *en la superficie interior del cuerpo cargado no hay cargas*.

De este modo se puede transmitir en su total la carga de la bolita cargada a un cuerpo ya cargado: con este fin es suficiente introducir dicha bolita en la cavidad del

conductor y hacer contacto con su superficie *interior*. La carga de la bolita debe pasar en su total a la superficie exterior de conductor y la bolita, descargarse por completo. El experimento confirma este resultado.

4. Sobre esta propiedad se basa el funcionamiento del *generador* electrostático de Van de Graaf (fig. 37.7). La esfera hueca 1 de cerca de 1,5 . . . 2 m de diámetro se coloca sobre la columna aislante 2 a una altura de unos 10 m sobre tierra. La cinta de caucho sin fin 3 es accionada por el motor 4. Con ayuda de la escobilla 5 y el electrodo 6 se transmite a la cinta la carga mediante un pequeño rectificador. La carga se transporta al interior de la esfera, donde las escobillas 7, soldadas a su superficie interior, retiran la carga de la cinta y la transmiten a la superficie exterior de la esfera.

En principio, de esta manera podemos obtener un potencial cuan elevado quisiéramos. En realidad, el valor del potencial está limitado por las propiedades aislantes de la columna y el aire circundante. Prácticamente, en una atmósfera de nitrógeno seco a una presión de 3 MPa se alcanza un potencial igual a varios millones de voltios.

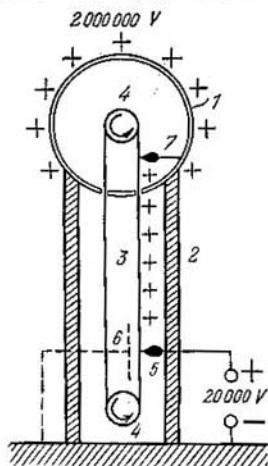


Fig. 37.7.

### § 37.10. Determinación de la carga del electrón

1. Ya en los años 30 del siglo pasado, Faraday, basándose en el análisis de las leyes de electrólisis, descubiertas por él (§§ 46.3, 46.4), llegó a la conclusión de que debían existir "átomos de electricidad", es decir, ciertas cargas eléctricas elementales. Con mayor claridad, formularon en 1874 estas ideas G. J. Ston y en 1881, H. Helmholtz. G. Ston fue quien propuso dar el nombre de "electrón" a esa carga eléctrica elemental.

A finales del siglo XIX y comienzos del XX, J. J. Thomson, F. Lenard, V. Kaufman y otros, mostraron que los rayos catódicos (§ 48.6), las partículas que emiten los metales al calentarlos (§ 47.1) e iluminarlos (§ 68.4), así como las partículas  $\beta$  irradiadas por algunos elementos radiactivos, tienen iguales propiedades. Resultó que todos ellos tenían carga negativa, mientras que su carga específica

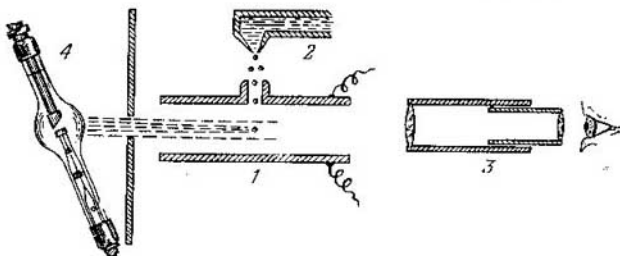


Fig. 37.8.

(es decir, la razón entre la carga y la masa en reposo) era la misma para todas ellas y, aproximadamente igual a  $10^{11}$  C/kg.

Quedó claro que en realidad, todos estos tipos de radiaciones eran en esencia haces de electrones obtenidos por diferentes procedimientos. Por esta causa, se planteó el problema de determinar con la máxima precisión la carga y la masa en reposo del electrón.

2. R. A. Millikan aplicó un método basado en investigar el carácter del movimiento de las partículas microscópicas en un campo eléctrico homogéneo. Las mediciones que el científico comenzó en 1906 duraron hasta 1914.

La fig. 37.8 nos ofrece la instalación de la que hacía uso Millikan. Aquí, 1 es un condensador plano con un orificio por arriba, por el que al dominio entre las placas llegan de vez en cuando gotas de aceite creadas por el pulverizador 2. La gota se ilumina por un lado y se observa mediante el microscopio de foco corto 3. El tubo de rayos X 4 se conecta periódicamente; los rayos ionizan la gotita, creando en ella una carga o cambiando la carga que ella porta.



Como fue mostrado en el § 11.9, una gota esférica cae en el aire uniformemente a una velocidad

$$v = 2r^2g(\rho - \rho_0)/9\eta; \quad (37.28)$$

donde  $\rho$  es la densidad del aceite,  $\rho_0$ , la densidad del aire,  $\eta$ , la viscosidad del aire y  $r$ , el radio de la gota. La velocidad de movimiento de la gota se determina por el tiempo, durante el que ella pasa entre dos hilos, tensados en el campo visual del microscopio. Las demás magnitudes son conocidas. Por lo tanto, según la fórmula (37.28) puede ser determinado el radio de la gota.

3. Creemos entre las placas del condensador un campo eléctrico de intensidad  $E$ . Si la gota porta la carga  $q$ , además de la fuerza de gravedad, de la de empuje y la fuerza de resistencia (§ 11.9) sobre la gota actúa también la fuerza eléctrica  $F_e = qE$ . La ecuación de movimiento tiene la forma

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_0 g - 6\pi r\eta u + qE = 0, \quad (37.29)$$

donde  $u$  es la velocidad de la gota en el campo. Poniendo el valor del radio de la gota de (37.28), obtenemos

$$q = \frac{6\pi\eta(u-v)}{E} \sqrt{\frac{9\eta v}{2g(\rho - \rho_0)}}. \quad (37.30)$$

4. En los experimentos fue registrada la variación de la carga de la gota bajo el influjo de una breve radiación de rayos X. De (37.30), tenemos

$$q_2 - q_1 = \frac{6\pi\eta(u_2 - u_1)}{E} \sqrt{\frac{9\eta v}{2g(\rho - \rho_0)}}. \quad (37.31)$$

Esta expresión sirvió de fórmula de cálculo.

Durante el trabajo de Millikan surgieron múltiples dificultades, en particular con la medición de la viscosidad del aire. Resultó que para las gotas microscópicas, la viscosidad del aire depende de las dimensiones de las gotas, por lo que fue necesario introducir una corrección que tomara esta dependencia en consideración. Para obtener resultados fiables hubo que variar en amplios límites las condiciones del experimento. La diferencia de potencial fue variada de 1700 a 5000 V; la presión en la cámara, donde se encontraba el condensador, de la normal a 6 kPa; en los experimentos se hizo uso de gotitas de un radio de 0,446 a 5,856  $\mu\text{m}$ .

Como resultado de todos los experimentos se llegó a la siguiente conclusión: *la variación de la carga de la gotita*

siempre es múltiplo de la carga elemental. Con otras palabras,  $\Delta q = Ne$ , donde  $N$  es cierto número entero, mientras que la carga elemental  $e = (1,592 \pm 0,0017) \cdot 10^{-19}$  C es la carga del electrón. En la actualidad, se ha obtenido un valor más exacto de la carga del electrón:

$$e = (1,6021892 \pm 0,0000046) \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

### Capítulo 38

## DIELECTRICOS

### § 38.1. Campo eléctrico en presencia de un dieléctrico

1. Carguemos un condensador hasta cierta diferencia de potencial  $\varphi_0$  y desconectémoslo del manantial de corriente. Si el espacio entre las placas lo rellenamos de un dieléctrico, resultará que la diferencia de potencial disminuye hasta el valor  $\varphi < \varphi_0$ , aunque en las placas la carga no ha cambiado.

De aquí se desprende que la intensidad del campo en el dieléctrico  $E = \varphi/d$  es menor que la intensidad del campo  $E_0 = \varphi_0/d$ , que esas mismas cargas crearon en el vacío. La razón entre la intensidad de campo en el vacío  $E_0$  y la del campo en el dieléctrico  $E$  se denomina *constante dieléctrica* de la materia:

$$\epsilon = E_0/E. \quad (38.1)$$

De la definición se desprende que la constante dieléctrica es una magnitud adimensional.

2. ¿Cómo explicar la causa de la disminución del campo en el dieléctrico en comparación con el campo en el vacío? La intensidad del campo en el vacío se determina por completo por las cargas en las placas del condensador:

$$E_0 = \sigma/\epsilon_0, \quad (38.2)$$

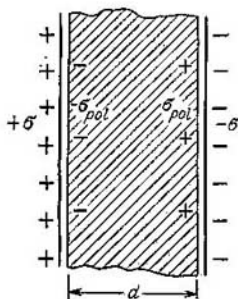


Fig. 38.1.

donde  $\sigma$  es la densidad superficial de las cargas eléctricas libres. La disminución de la intensidad de campo en el dieléctrico puede ser explicada si suponemos que en el dieléctrico surge, bajo la acción del campo eléctrico, una carga polarizante con densidad superficial  $\sigma_{pol}$  (fig. 38.1). Entonces

$$E = (\sigma - \sigma_{pol})/\epsilon_0. \quad (38.3)$$

La aparición en el dieléctrico de la carga polarizante bajo la acción del campo eléctrico exterior, recibe el nombre de *polarización* del dieléctrico.

### § 38.2. Vector de polarización

1. La esencia del fenómeno de polarización, consiste en que las partículas de las que consta el dieléctrico (átomos o moléculas) adquieren un momento dipolar dirigido a lo largo de las líneas de fuerza de campo externo. Para ciertos tipos de dieléctricos el mecanismo de polarización será examinado más adelante. Aquí vamos a introducir una magnitud que caracteriza el grado de polarización del dieléctrico, o sea, *el vector de polarización*.

Denomínase vector de polarización  $\mathbf{P}$  el momento dipolar de la unidad de volumen del dieléctrico polarizado. Para calcularlo hay que hallar *la suma vectorial* de los momentos dipolares de todas las moléculas o átomos que contiene la unidad de volumen de la sustancia. Para simplificar los razonamientos, supongamos que el dieléctrico es homogéneo, por lo que todas sus moléculas (o átomos) tienen un mismo momento dipolar  $\mathbf{p}_e$ . Entonces, el vector de polarización

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p}_e/V = n\mathbf{p}_e, \quad (38.4)$$

donde  $n$  es la concentración de moléculas (o átomos).

2. La dimensión del módulo del vector de polarización coincide con la de la densidad superficial de la carga:

$$[P] = [Np_e/V] = [\sigma].$$

Vamos a mostrar que el módulo del vector de polarización es igual a la densidad superficial de una carga polarizada. Para la demostración dirijámonos a la fig. 38.1. Podemos considerar el dieléctrico polarizado como un dipolo que porta la carga polarizada  $q_{pol} = \sigma_{pol}S$ . El momento de dicho dipolo es igual a  $q_{pol}d = \sigma_{pol}Sd =$

=  $\sigma_{\text{pol}}V$ . Dividiendo el momento dipolar de todo el dieléctrico por su volumen, por definición, obtenemos el módulo del vector de polarización:

$$P = q_{\text{pol}} d/V = \sigma_{\text{pol}} Sd/V = \sigma_{\text{pol}}. \quad (38.5)$$

Poniendo en (38.3) el valor de  $\sigma_{\text{pol}} = P$ , obtenemos

$$\epsilon_0 E = \sigma - P. \quad (38.6)$$

3. Introduzcamos el vector de desplazamiento  $D$  auxiliar, cuyo módulo es igual a la densidad superficial de las cargas libres:  $D = \sigma$ . Obtenemos

$$\epsilon_0 E = D - P. \quad (38.7)$$

Teniendo en cuenta, que en un dieléctrico homogéneo e isótropo las direcciones de los vectores de intensidad y polarización coinciden, vemos que también el vector de desplazamiento debe tener esa misma dirección. De aquí sigue, que la igualdad (38.7) puede ser escrita en forma vectorial:

$$D = \epsilon_0 E + P. \quad (38.8)$$

### § 38.3. Susceptibilidad eléctrica

1. En la mayoría de los dieléctricos, salvo algunos tipos de cristales (que se denominan sustancias ferroeléctricas), el vector de polarización es proporcional a la intensidad del campo:

$$P = \kappa_e \epsilon_0 E. \quad (38.9)$$

La magnitud  $\kappa_e$  recibe el nombre de *susceptibilidad eléctrica* del dieléctrico. Recomendamos al lector, que mediante el análisis de la dimensión, se cerciore de que la susceptibilidad eléctrica es una magnitud adimensional.

2. Pongamos en la igualdad (38.6) la expresión para el vector de polarización y para la densidad superficial de las cargas eléctricas libres  $\sigma = \epsilon_0 E_0 = \epsilon \epsilon_0 E$ ; obtenemos

$$\epsilon_0 E = \epsilon \epsilon_0 E - \kappa_e \epsilon_0 E.$$

De aquí se deduce que la constante dieléctrica y la susceptibilidad eléctrica de la sustancia están ligadas por la correlación

$$\epsilon = 1 + \kappa_e. \quad (38.10)$$

Recomendamos al lector que en calidad de ejercicio, muestre que los vectores de desplazamiento e intensidad están enlazados por la correlación

$$D = \epsilon \epsilon_0 E. \quad (38.11)$$

### § 38.4. Energía del campo en un dieléctrico

1. La intensidad del campo eléctrico de un condensador plano y la diferencia de potencial en presencia de un dieléctrico se expresa de la siguiente manera:

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0 S}, \quad (38.12)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\epsilon \epsilon_0 S}. \quad (38.13)$$

De aquí sigue que la capacidad eléctrica de un condensador plano en presencia de un dieléctrico entre sus placas, es igual a

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}. \quad (38.14)$$

2. La expresión para la energía de un condensador cargado (37.23) queda válida. Pero variará la expresión para la densidad de energía:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{q\varphi}{2V} = \frac{C\varphi^2}{2V} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S \varphi^2}{2d \cdot Sd} = \frac{\epsilon \epsilon_0 \varphi^2}{2d^2}.$$

Pero  $\varphi/d = E$ , por lo tanto,

$$w = \epsilon \epsilon_0 E^2/2. \quad (38.15)$$

Así, pues, en presencia de un dieléctrico, la densidad de energía del campo eléctrico crece  $\epsilon$  veces en comparación con la densidad de energía del campo en el vacío, quiera que con ello, el vector de intensidad del campo conserve su magnitud invariable. Por lo contrario, si resulta invariable el vector de desplazamiento, la densidad de energía disminuye  $\epsilon$  veces. En efecto, en tal caso hay que poner en (38.15), de acuerdo con (38.11), el valor  $E = D/\epsilon \epsilon_0$ ; tendremos

$$w = D^2/2\epsilon \epsilon_0. \quad (38.16)$$

3. Aclaremos, cómo varía la fuerza de interacción entre las placas de un condensador, si el espacio entre ellas se rellena de un dieléctrico gaseoso o líquido. Mediante los

mismos razonamientos que en el § 37.8, llegaremos a la conclusión de que la presión de las fuerzas eléctricas  $p$  es igual a la densidad de energía del campo eléctrico, tomada con signo inverso:  $p = -w$  (véase (37.27)).

Si las placas del condensador están desconectadas de la fuente de corriente, la carga en las placas del condensador no cambiará; por consiguiente, tampoco variará el vector de desplazamiento que, por definición, es igual a la densidad superficial de la carga en las placas ( $D = \sigma$ ). La fuerza de interacción

$$F = pS = -wS = -\frac{D^2 S}{2\epsilon\epsilon_0} = -\frac{q^2}{2\epsilon\epsilon_0 S} = -\frac{F_0}{\epsilon}. \quad (38.17)$$

De este modo, en tal caso la fuerza de interacción entre las placas, en presencia de un dieléctrico, es  $\epsilon$  veces *menor* que en el vacío.

Si, por lo contrario, las placas del condensador quedan todo el tiempo conectadas a la fuente de corriente, la diferencia de potencial entre las placas no varía, por lo que tampoco cambia la intensidad del campo. En semejante caso, la fuerza de interacción entre las placas del condensador en presencia de un dieléctrico, resulta ser  $\epsilon$  veces *mayor* que en el vacío:

$$F = pS = -wS = -\frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} S = -\frac{\epsilon\sigma^2 S}{2\epsilon_0} = \epsilon F_0. \quad (38.17')$$

4. Así, pues, la fuerza de interacción entre los cuerpos cargados, depende de un modo muy complicado de la presencia de un dieléctrico entre ellos. Si cuando hay un dieléctrico el vector de desplazamiento no varía, la fuerza de interacción resulta ser  $\epsilon$  veces menor que en el vacío; si no varía el vector de intensidad, la fuerza de interacción es  $\epsilon$  veces mayor que en el vacío.

En todos los demás casos, sólo un detallado análisis permite resolver el problema acerca de si la presencia de un dieléctrico influye sobre la fuerza de interacción entre cuerpos cargados. Una fórmula general, análoga a la ley de Coulomb en el vacío, no puede ser aquí escrita.

### § 38.5. Polarizabilidad de deformación

1. Al introducir la noción de vector de polarización, hemos supuesto que las moléculas o los átomos tienen momento dipolar, dirigido a lo largo de la intensidad del campo (§ 38.2). Aclaremos el mecanismo de polarización de dieléct-

tricos, es decir, la causa del surgimiento de momentos dipolares en las moléculas o los átomos, orientados a lo largo del campo. Para simplificar los razonamientos, vamos a limitarnos a examinar el mecanismo de polarización de los gases, cuando puede ser despreciada la acción de las moléculas vecinas, en comparación con la del campo externo.

Resulta, que son posibles dos mecanismos de polarización, con la particularidad de que en diferentes materias, en función de la estructura de las moléculas, predomina uno u otro de ellos.

2. Los átomos y las moléculas de muchas sustancias tienen estructura simétrica, por lo que carecen de momento dipolar. Bajo la acción del campo eléctrico externo, la nube electrónica del átomo se desplaza, la simetría de su estructura se viola y el átomo adquiere momento dipolar. Como la polarizabilidad de este género se provoca por la deformación de la nube electrónica del átomo, ésta recibe el nombre de polarizabilidad de deformación o electrónica.

El modelo más sencillo de semejante átomo está representado en la fig. 38.2. En el centro del átomo está situado el núcleo de carga positiva, alrededor del cual gira un electrón. Para explicar la estructura de simetría esférica del átomo, es lógico suponer que la órbita del electrón gira continuamente, de forma que éste se desplaza a suficiente velocidad por la esfera, en cuyo centro se encuentra el núcleo. Pero como el centro del núcleo con carga positiva y el centro de la nube electrónica con carga negativa coinciden, el átomo no tiene momento dipolar.

3. En un campo eléctrico externo, sobre el núcleo y el electrón actúan fuerzas dirigidas en direcciones opuestas, por lo que la órbita del electrón se desplaza respecto del núcleo a una distancia  $l$ . El átomo adquiere un momento dipolar  $p_e = el$ . Como fue mostrado en el § 31.3, el momento dipolar del átomo deformado

$$p_e = el = 4\pi r^3 \epsilon_0 E = \alpha \epsilon_0 E, \quad (38.18)$$

donde  $\alpha \approx 4\pi r^3$  se denomina polarizabilidad de la molécula. La magnitud del vector de polarización

$$P = np_e = n\alpha \epsilon_0 E. \quad (38.19)$$

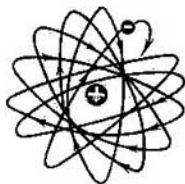


Fig. 38.2.

Comparando esta expresión con (38.9) y (38.10), obtenemos la expresión para la susceptibilidad eléctrica y la permeabilidad de la materia (gas) con moléculas no polares:

$$\kappa_e = n\alpha; \quad \varepsilon = 1 + \kappa_e = 1 + n\alpha. \quad (38.20)$$

4. Apreciemos el resultado obtenido, tomando el radio de átomo igual aproximadamente a  $r \approx 10^{-10}$  m, y la concentración de las moléculas de gas  $n \approx 2,7 \cdot 10^{25}$  m<sup>-3</sup>. Para la susceptibilidad obtenemos el valor:  $\kappa_e \approx 4\pi r^3 n \approx 3 \cdot 10^{-4}$ . El orden de la magnitud resulta ser justo: la susceptibilidad eléctrica de hidrógeno a condiciones normales es igual a  $2,6 \cdot 10^{-4}$ ; del helio,  $0,7 \cdot 10^{-4}$ ; del oxígeno,  $5,2 \cdot 10^{-4}$ ; del argón,  $5,4 \cdot 10^{-4}$ . Tomando en consideración que el modelo del átomo, utilizado en nuestros razonamientos, es muy primitivo, la concordancia entre los datos calculados y experimentales obtenida, debe considerarse buena.

### § 38.6. Polarizabilidad dipolar

1. Gracias a su estructura asimétrica, las moléculas de una serie de sustancias tienen momento dipolar incluso al no haber campo eléctrico externo. Como ejemplo pueden servir las moléculas de agua (momento dipolar  $p_e = 6,36 \times 10^{-30}$  C·m), de amoníaco ( $4,88 \cdot 10^{-30}$  C·m), de acetona ( $9,30 \cdot 10^{-30}$  C·m), alcohol etílico ( $5,59 \cdot 10^{-30}$  C·m), benzol ( $0,27 \cdot 10^{-30}$  C·m). Las moléculas de este tipo son llamadas *polares*.

Al no haber campo externo, los momentos dipolares de las moléculas polares están dirigidos de modo absolutamente caótico. Por consiguiente, el vector de polarización, igual a la suma vectorial de los momentos dipolares de la unidad de volumen del dieléctrico, resulta igual a cero cuando no hay campo externo. Al introducir una sustancia con moléculas polares en un campo eléctrico, la molécula deberá, primero, deformarse y su momento dipolar, variar; segundo, a cuenta del momento de fuerzas que actúa sobre todo dipolo en el campo eléctrico (§ 37.4), la molécula debe girar de tal forma que su momento dipolar esté orientado a lo largo de las líneas de fuerza del campo. El primer efecto, provocado por la deformación de las moléculas, ya fue examinado en el párrafo anterior. Además, por regla, es mucho más débil que el segundo efecto, llamado *polarizabilidad dipolar*.



El grado de orientación de las moléculas polares en el campo eléctrico, se determina tanto por la intensidad del campo, como por la temperatura de la sustancia. Bajo la acción del campo, los dipolos moleculares giran de forma que el momento dipolar se orienta a lo largo del campo. El movimiento térmico viola este orden, lanzando los momentos de los dipolos moleculares por las más distintas direcciones. La situación es aquí análoga al carácter de distribución de las moléculas de un gas en el campo gravitacional, cuando el campo de fuerzas parece como si "presionara" las moléculas hacia la superficie terrestre, mientras que el movimiento térmico las lanza en todas direcciones (§§ 26.10 y 26.11). Lo mismo que en el caso de actuación del campo gravitacional, la probabilidad de que el dipolo molecular tenga en el campo eléctrico la energía  $\mathcal{E}$ , se determina, de acuerdo con la fórmula (26.25), mediante la expresión  $w = e^{-\mathcal{E}/kT}$ , donde  $\mathcal{E} = -p_e E \cos \alpha$  es la energía del dipolo (37.12),  $T$ , la temperatura absoluta de la sustancia,  $k$ , la constante de Boltzmann.

2. Realicemos un cálculo aproximado. Al no haber campo externo, los dipolos moleculares están dispuestos en completo desorden y podemos considerar que los momentos dipolares están distribuidos uniformemente por todos los ejes de coordenadas, de modo que en la dirección de cualquier eje se sitúa un tercio de los dipolos:  $N_x = N_y = N_z = N/3$ . Con esto, por término medio, la mitad de los dipolos está orientada a lo largo del eje de coordenadas, la otra mitad, en sentido opuesto a dicho eje.

Introduzcamos el dieléctrico en un campo eléctrico, cuyo vector de intensidad está dirigido a lo largo del eje de abscisas. En semejante caso, el número de dipolos  $N_1$ , dirigidos a lo largo del campo, aumentará un poco, mientras que el número de dipolos  $N_2$ , dirigidos en contra del campo, un poco disminuirá. La magnitud del vector de polarización

$$P = \frac{N_1 p_e - N_2 p_e}{V}. \quad (38.21)$$

De acuerdo con la fórmula (26.26), tenemos

$$N_1 = A e^{-\mathcal{E}_1/kT}, \quad N_2 = A e^{-\mathcal{E}_2/kT}, \quad (38.22)$$

donde  $A$  es cierta constante. Para un dipolo, orientado a lo largo del campo,  $\alpha = 0$  y su energía  $\mathcal{E}_1 = -p_e E$ ; para el

dipolo, orientado en contra del campo,  $\alpha = \pi$  y su energía  $\mathcal{E}_2 = p_e \mathcal{E}$ .

3. Los momentos dipolares de las moléculas son muy pequeños ( $p_e \approx 10^{-30}$  C·m), por lo que aun en campos muy potentes ( $E \approx 10^6$  V/m) la energía del dipolo molecular  $\mathcal{E} \lesssim 10^{-24}$  J. Este valor es mucho menor que el de la energía de movimiento térmico a temperatura ambiente:

$$kT = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ J.}$$

Esto significa, que la razón  $x = -\mathcal{E}/kT$  es una magnitud muy pequeña:  $|x| < 10^{-3}$ . Para tan pequeños valores de  $x$  es válida la correlación  $e^x \approx 1 + x$ . Escribamos las siguientes expresiones para el número de dipolos orientados a lo largo y en contra del campo:

$$N_1 \approx A(1 + x_1) = A(1 - \mathcal{E}_1/kT) = A(1 + p_e E/kT), \quad (38.23)$$

$$N_2 \approx A(1 + x_2) = A(1 - \mathcal{E}_2/kT) = A(1 - p_e E/kT).$$

Por consiguiente, en campos débiles es justa la igualdad  $N_x = N_1 + N_2 = 2A$ . Pero como  $N_x = N/3$ , entonces  $2A = N/3$ . Así, que

$$A = N/6. \quad (38.24)$$

4. Los valores obtenidos del número de moléculas orientadas a lo largo del campo ( $N_1$ ) y en contra del campo ( $N_2$ ), permiten calcular la magnitud del vector de polarización. Poniendo (38.23) y (38.24) en (38.21), obtenemos

$$P = \frac{(N_1 - N_2) p_e}{V} = \frac{2A p_e^2 E}{V kT} = \frac{N p_e^2 E}{3V kT} = \frac{n p_e^2 E}{3kT}. \quad (38.25)$$

De aquí se desprende que la susceptibilidad eléctrica de un gas, constituido por moléculas polares, tiene la forma

$$\kappa_r = \frac{n p_e^2}{3\epsilon_0 kT}. \quad (38.26)$$

A pesar de que al deducir esta fórmula hicimos una serie de suposiciones simplificativas, el resultado obtenido es correcto.

Recibe el nombre de *ley de Debye*, el hecho de que para una concentración invariable de las moléculas (y, por consiguiente, con densidad constante del gas), la susceptibilidad eléctrica varía con la polarizabilidad dipolar inversamente

proporcional a la temperatura absoluta:

$$\kappa_e = B/T, \quad (38.27)$$

donde  $B$  es una constante. Este hecho está certificado con fiabilidad experimentalmente para una serie de gases y vapores.

Es natural, que esta ley no se cumple a bajas temperaturas, donde puede resultar que  $p_e E \approx kT$ . Pero en tal caso, todos nuestros razonamientos resultan ser incorrectos.

### Capítulo 39

## CORRIENTE CONTINUA

### § 39.1. Campo exterior. Tensión y fem

1. Denomínase *corriente eléctrica* el movimiento ordenado de cargas eléctricas. Si el movimiento ordenado de las cargas surge en un conductor, la corriente eléctrica recibe el nombre de corriente de conducción.

Podemos indicar una serie de factores capaces de provocar el movimiento ordenado de las cargas. Ante todo, estos pueden ser las fuerzas eléctricas (de Coulomb), bajo cuya acción las cargas positivas se ponen en movimiento a lo largo de las líneas de fuerza del campo, las negativas, en contra de las líneas del campo. El campo de estas fuerzas lo llamaremos de Coulomb y la tensión de este campo será designada por  $E_{\text{Coul}}$ .

Además, sobre las cargas eléctricas pueden actuar fuerzas no electrostáticas, por ejemplo, las magnéticas (véase el cap. 41). La acción de estas fuerzas es análoga a la de cierto campo eléctrico. Llamemos estas fuerzas *exteriores* y el campo que ellas provocan, campo *exterior* con intensidad  $E^*$ .

Por fin, el movimiento ordenado de las cargas eléctricas puede surgir también sin la acción de las fuerzas externas, a cuenta de los fenómenos de difusión o de las reacciones químicas en la fuente de corriente. El trabajo que se consume para la ordenación de las cargas eléctricas, es realizado mediante la energía interior de la fuente de corriente. A pesar de que aquí no hay acción directa de cualesquiera fuerzas

sobre las cargas libres, el fenómeno transcurre de tal modo como si sobre las cargas actuara cierto campo exterior. Por esta causa, para la unicidad de razonamientos, en este caso también introduciremos el campo exterior eficaz  $E^*$ .

2. La característica energética del campo de Coulomb es el potencial. Introduzcamos magnitudes que puedan servir de característica energética del campo exterior. Según la definición (§ 18.7), la diferencia de potencial es igual a la razón entre el trabajo que realizan las fuerzas de Coulomb al desplazar cierta carga y la magnitud de dicha carga:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = A_{\text{Coul}}/q. \quad (39.1)$$

Si durante el desplazamiento de la carga realizan trabajo no sólo las fuerzas de Coulomb, sino que también las fuerzas exteriores, el trabajo total

$$A = A_{\text{Coul}} + A_{\text{ex}}, \quad (39.2)$$

donde  $A_{\text{Coul}}$  es el trabajo de las fuerzas de Coulomb,  $A_{\text{ex}}$ , el trabajo que se efectúa a cuenta de la acción de manantiales no eléctricos de energía, por ejemplo, de las fuerzas magnéticas o bien por la variación de la energía interna durante la difusión de las partículas cargadas, así como también por la variación de la energía interna de las sustancias que toman parte en la reacción química o por la energía de la luz (efecto fotoeléctrico, véase el § 68.1). Dividiendo el primero y segundo miembros de la igualdad (39.2) por la magnitud de la carga variable, obtenemos

$$A/q = A_{\text{Coul}}/q + A_{\text{ex}}/q. \quad (39.3)$$

3. Recibe el nombre de *tensión* en el sector dado del circuito, la magnitud igual a la razón entre el trabajo sumario que se realiza durante el desplazamiento de la carga y la magnitud de dicha carga:

$$u = A/q. \quad (39.4)$$

Denominamos *fuerza electromotriz* (fem) en el sector dado, la magnitud igual al cociente entre el trabajo realizado por fuentes no eléctricas de energía al desplazarse la carga y la magnitud de esta carga:

$$\mathcal{E} = A_{\text{ex}}/q. \quad (39.5)$$

De la definición de estas magnitudes se desprende que tanto la tensión, como la fem se miden en el SI en voltios.

4. Comparando las expresiones (39.3), (39.4) y (39.5), obtenemos

$$u = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}. \quad (39.6)$$

Así, pues, la tensión en un sector del circuito es igual a la suma de la diferencia de potencial y la fuerza electromotriz.

Son posibles los siguientes casos particulares:

a) Si el sector del circuito es homogéneo y en él no actúan fuerzas exteriores, la fem es igual a cero y la tensión, a la diferencia de potencial:

$$u_{\text{hom}} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (39.7)$$

b) En un circuito cerrado la tensión es igual a la suma algebraica de las fem. En efecto, sea que un circuito cerrado consta de tres sectores, entonces

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1, & u_2 &= \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2, \\ u_3 &= \varphi_3 - \varphi_1 + \mathcal{E}_3. \end{aligned}$$

El trabajo para desplazar la carga por un circuito cerrado es igual a la suma de los trabajos en los sectores; por lo tanto

$$u_{\text{cerr}} = u_1 + u_2 + u_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3. \quad (39.8)$$

5. Como mostramos en el § 37.3, la intensidad de un campo de Coulomb  $E_{\text{Coul}} = -d\varphi/dn$ . Derivando (39.6), se tiene

$$du/dn = -d\varphi/dn + d\mathcal{E}/dn. \quad (39.9)$$

Por analogía, la intensidad del campo sumario

$$E = du/dn, \quad (39.10)$$

la intensidad del campo exterior

$$E^* = d\mathcal{E}/dn. \quad (39.11)$$

Teniendo en cuenta estas definiciones, la expresión (39.9) se puede escribir de la forma siguiente:

$$E = E_{\text{Coul}} + E^*, \quad (39.12)$$

es decir, la intensidad del campo sumario es igual a la suma de las intensidades de los campos de Coulomb y exterior.

## § 39.2. Intensidad y densidad de corriente

1. La característica cuantitativa de la corriente es una magnitud igual a la razón entre la carga  $\Delta q$ , que se transporta por la sección transversal del conductor durante el tiempo  $\Delta t$ , y dicho intervalo de tiempo:

$$i = \Delta q / \Delta t. \quad (39.13)$$

Esta magnitud ha sido denominada *intensidad de corriente*.

El valor preciso de la intensidad de corriente será obtenido si pasamos en la expresión (39.13) al límite, a condición de que el intervalo de tiempo  $\Delta t$  sea infinitamente pequeño:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = q'(t). \quad (39.14)$$

2. Si la intensidad de corriente y su dirección no varían con el tiempo, ésta recibe el nombre de corriente continua, para la que

$$i = q/t. \quad (39.15)$$

Señalemos que en un circuito no ramificado de corriente continua, la intensidad de corriente es la misma en todas las secciones del conductor. En efecto, la carga  $\Delta q_1$  que se desplaza por la sección  $S_1$  del conductor por el tiempo  $\Delta t$ , debe ser igual a la carga  $\Delta q_2$ , que pasa por la sección  $S_2$  durante ese mismo intervalo de tiempo. En caso contrario, en el volumen del conductor entre las dos secciones se acumularía la carga, variaría el campo eléctrico, lo que a su vez, provocaría la variación de la corriente, lo que contradice a la condición de su constancia. Pero de  $\Delta q_1 = \Delta q_2$  se desprende:  $\Delta q_1 / \Delta t = \Delta q_2 / \Delta t$  o bien  $i_1 = i_2$ , lo que queríamos demostrar.

3. En el SI la unidad de intensidad de corriente es *el amperio* (A), que es la intensidad de corriente eléctrica continua con la que por la sección transversal del conductor pasa por segundo una carga de un culombio:

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}.$$

4. En algunos casos es más cómodo hacer uso de una magnitud llamada *densidad de corriente*. La densidad media de corriente es igual a la razón entre la intensidad de corrien-

te y el área de la sección transversal de conductor:

$$j = i/S. \quad (39.16)$$

En el SI la unidad de densidad de corriente es A/m<sup>2</sup>.

5. Expresemos la intensidad de corriente y la densidad de corriente, mediante la velocidad de movimiento ordenado de las cargas libres en el conductor. Sea la concentración de éstas igual a  $n = \Delta N/\Delta V$ , donde  $\Delta V$  es una parte del volumen del conductor; la carga eléctrica de un portador libre de la corriente es igual a  $e$ , mientras que la velocidad media de su movimiento ordenado es igual a  $\bar{v}$ . Entonces, durante el tiempo  $\Delta t$  por la sección  $S$  pasará una carga  $\Delta q = e \Delta N = en \Delta V = en S \bar{v} \Delta t$ . La intensidad de corriente

$$i = \Delta q/\Delta t = en S \bar{v}. \quad (39.17)$$

La densidad de corriente

$$j = i/S = en \bar{v}. \quad (39.18)$$

Estas expresiones nos serán necesarias más adelante al considerar una serie de problemas.

6. Valoremos la velocidad media del movimiento ordenado de los electrones de conducción en los metales. La concentración de los electrones libres debe coincidir aquí, aproximadamente, con la concentración de átomos  $n = 10^{28} \dots 10^{29} \text{ m}^{-3}$ . La mayor densidad de corriente en los conductores metálicos es de unos  $10 \text{ A/mm}^2 = 10^7 \text{ A/m}^2$ . Entonces

$$\bar{v} = \frac{j}{en} \approx \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{28}} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} = 6 \text{ mm/s}.$$

Los experimentos han confirmado el orden de la magnitud obtenida. Tan pequeña velocidad del movimiento ordenado de los electrones de conducción contradice, a primera vista, el hecho de que al conectar un circuito eléctrico, la corriente se establece de modo instantáneo. En esto nada hay paradójico. La cuestión radica en que el campo eléctrico, creado por el manantial de corriente, surge prácticamente al mismo tiempo por todo el circuito, por esta causa simultáneamente a los vectores de las velocidades del movimiento térmico de los electrones, en cualquier sector de circuito, se adiciona el vector de velocidad del movimiento ordenado, cuyo módulo es igual a unos 6 mm/s.

### § 39.3. Ley de Ohm para un sector homogéneo del circuito

1. El lector ya conoce una de las fundamentales leyes de los circuitos de corriente continua, es decir, la ley de Ohm para un sector homogéneo de un circuito. La esencia de esta ley consiste en lo siguiente. Sea que tenemos un conductor homogéneo, que puede ser un trozo de metal homogéneo de sección invariable, todos los puntos del cual tienen la misma temperatura. Si en los extremos de este conductor se mantiene una diferencia constante de potencial  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , por el conductor fluirá una corriente  $i$ , cuya intensidad será proporcional a dicha diferencia de potencial:

$$i = G \Delta\varphi = \Delta\varphi/R. \quad (39.19)$$

Así, pues, en un sector homogéneo del circuito, la intensidad de corriente es proporcional a la diferencia de potencial en sus extremos.

2. El coeficiente  $G$  se denomina *conductividad eléctrica*. La magnitud inversa

$$R = 1/G = \Delta\varphi/i \quad (39.20)$$

recibe el nombre de *resistencia eléctrica* (o simplemente resistencia).

### § 39.4. Resistencia

1. Como ya sabe el lector, la resistencia de un conductor metálico es proporcional a su longitud  $l$  e inversamente proporcional a su sección transversal  $S$ :

$$R = \rho l/S. \quad (39.21)$$

El conductor cuya resistencia se determina por la expresión (39.21), a veces se denomina *resistor*. La magnitud  $\rho$  se llama *resistencia específica (resistividad)* de conductor.

La magnitud inversa

$$\gamma = 1/\rho \quad (39.22)$$

recibe el nombre de *conductividad específica*.

2. En Sistema Internacional de unidades, la resistencia se mide en *ohmios*. El ohmio ( $\Omega$ ) es una resistencia del conductor, en el que la corriente es igual a 1 A, si en sus extremos se mantiene una diferencia de potencial de 1 V:

$$1 \text{ ohmio} = 1 \text{ V/1 A,}$$



La unidad de resistividad en el SI es un  $\Omega \cdot m$ :

$$[\rho] = [RS/l] = \Omega \cdot m^2/m = \Omega \cdot m.$$

En la práctica se usa con frecuencia una unidad un millón de veces menor:

$$1 \Omega \cdot mm^2/m = 10^{-6} \Omega \cdot m.$$

3. En un intervalo suficientemente amplio de temperaturas, lejanas del cero absoluto, la resistencia específica de conductores metálicos es una función lineal de la temperatura  $t$  (según la escala de Celsius):

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t) \approx \rho_0 \alpha T. \quad (39.23)$$

(En efecto, ya que  $\alpha \approx (4 \dots 5) \cdot 10^{-3} \text{ C}^{-1} \approx \frac{1}{273} \text{ K}^{-1}$ , en-

tonces  $1 + \alpha t \approx 1 + \frac{t}{273} = \frac{T}{273} \approx \alpha T$ ).

### § 39.5. Ley de Ohm en forma diferencial

1. Transformemos en cierto grado la ley de Ohm para un sector del circuito. Con este fin en la fórmula (39.19) expresaremos la intensidad de corriente con ayuda de la densidad de corriente según (39.16), la resistencia, haciendo uso de las propiedades del conductor de acuerdo con (39.21), mientras que la diferencia de potencial será expresada por intermedio de la intensidad del campo (37.9); obtendremos  $jS = EIS/\rho l$  o bien, después de ciertas simplificaciones,  $j = E/\rho$ . Expresando en esta fórmula la resistividad por medio de la conductividad, según (39.22), obtenemos

$$j = \gamma E. \quad (39.24)$$

De esta manera, *la densidad de corriente es proporcional a la intensidad del campo en el punto dado de conductor*. Esta expresión ha recibido el nombre de ley de Ohm en forma diferencial.

2. Poniendo en (39.24) la expresión (39.18) para la densidad de corriente, tenemos  $en\bar{v} = \gamma E$ , de donde sigue que

$$\bar{v} = \gamma E/en. \quad (39.25)$$

Así, pues, resulta que *la velocidad media del movimiento ordenado de las cargas libres en un conductor* (por ejemplo, de

los electrones libres en los metales) es proporcional a la intensidad del campo eléctrico en dicho conductor.

3. La razón entre la velocidad media del movimiento ordenado de las cargas libres y la intensidad del campo en el conductor es denominada *movilidad* de la carga:

$$b = \bar{v}/E = \gamma/en. \quad (39.26)$$

### § 39.6. Ley de Ohm para un sector heterogéneo del circuito y para un circuito cerrado

1. En realidad, en la fórmula (39.24) figura la intensidad del campo de Coulomb, ya que dicha expresión fue obtenida de la ley de Ohm para un sector homogéneo de la red, donde sólo actúa el campo de Coulomb. No obstante, es por completo indiferente qué campo actúa sobre las cargas: de Coulomb, exterior o sumario. De aquí se desprende, que si en el sector dado del circuito no sólo actúa el campo de Coulomb, sino que también el exterior (sector heterogéneo del circuito), *la velocidad de movimiento de las cargas y, correspondientemente, la densidad de corriente serán proporcionales a la intensidad del campo sumario.*

Poniendo en (39.24) el valor de la intensidad del campo sumario (39.10) y la densidad de corriente (39.16), obtenemos  $i/S = \gamma u/l$ , de donde se deduce que

$$u = il/\gamma S = i\rho l/S = iR. \quad (39.27)$$

2. De forma que para un sector heterogéneo del circuito, la ley de Ohm tomará el aspecto

$$i = u/R. \quad (39.28)$$

Sustituyendo el valor de la tensión de (39.6), la ley de Ohm puede ser escrita de la siguiente forma

$$i = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R}. \quad (39.29)$$

En este caso hay que prestar atención al signo de la fem. Si la dirección del vector de intensidad del campo ajeno coincide con la del vector de intensidad del campo de Coulomb, la fem y la diferencia de potencial tienen el mismo signo, en el caso contrario sus signos son opuestos.

3. En un circuito cerrado, la diferencia de potencial es nula, ya que el campo coulombiano es conservativo. Por

consiguiente, la ley de Ohm toma la siguiente forma para un circuito cerrado

$$i = \mathcal{E}/R. \quad (39.30)$$

Por  $R$  debemos entender aquí la resistencia total del circuito, incluida la resistencia del manantial de corriente, por  $\mathcal{E}$ , la suma algebraica de las fem. Con frecuencia la ley de Ohm para un circuito cerrado se escribe en la forma.

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R+r}. \quad (39.31)$$

Por  $R$  entendemos aquí la resistencia de todos los resistores que constituyen el circuito (resistencia de carga), mientras que por  $r$ , la resistencia interior de la fuente de corriente:

### § 39.7. Ley de Joule—Lenz

1. En los resistores transcurre una transformación irreversible de la energía de la corriente eléctrica en energía interior del conductor. El mecanismo de este fenómeno será aclarado en el § 44.6, en tanto que aquí sólo examinaremos ciertas correlaciones cuantitativas.

Si los conductores están inmóviles y bajo la acción de la corriente no se producen en ellos reacciones químicas, la temperatura del conductor variará. La variación de la energía interna del conductor (cantidad de calor)  $Q$  es igual al trabajo  $A$ , que realiza el campo sumario al desplazarse las cargas:

$$Q = A = qu = iut. \quad (39.32)$$

Empleando la ley de Ohm (39.28), obtenemos dos expresiones equivalentes:

$$Q = i^2Rt = u^2t/R. \quad (39.33)$$

Esta es la expresión de la ley de Joule—Lenz. Notemos, que aquí la cantidad de calor  $Q$  está expresada en julios, como está aceptado en el Sistema Internacional de unidades.

2. Para calcular la acción térmica de la corriente es natural que sea posible hacer uso de las dos fórmulas (39.33). Si hay que comparar dos resistores según el carácter de los procesos térmicos que en ellos transcurren, es preciso aclarar de antemano: ¿fluye por ellos una corriente igual o se hallan bajo igual tensión?

Si por dos resistores pasan corrientes iguales, de acuerdo con la fórmula

$$Q = i^2Rt$$

crecerá más la energía interna del resistor con mayor resistencia. Con semejante caso tropezamos, por ejemplo, al conectar los resistores en serie.

Si los dos resistores se encuentran bajo una tensión igual, según la fórmula

$$Q = u^2 t / R$$

se calentará más el resistor con menor resistencia. Semejante efecto se observa con la conexión en paralelo de los resistores.

### § 39.8. Carga y descarga de un condensador

1. Examinemos un circuito constituido por un resistor, condensador y una fuente de corriente (fig. 39.1). Supongamos que en el momento inicial el condensador no está cargado, entonces la diferencia de potencial entre sus armaduras es igual a cero.

Al cerrar el circuito, por el conductor fluirá la corriente  $i_0 = \mathcal{E}/R$ , ya que el condensador no está cargado. A medida que el

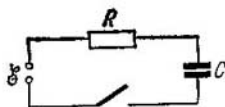


Fig. 39.1.

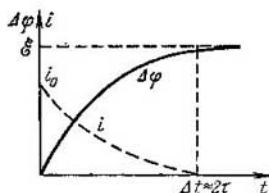


Fig. 39.2.

condensador se carga, entre sus armaduras se creará diferencia de potencial y el campo de Coulomb se opondrá al desplazamiento de las cargas libres, disminuyendo con esto la corriente en el circuito. De acuerdo con la ley de Ohm, tenemos

$$i = \frac{\mathcal{E} - \Delta\phi}{R}.$$

Cuando la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador sea igual a la fem de la fuente, la corriente cesará. La gráfica de variación del potencial y la corriente se muestra en la fig. 39.2.

2. El cálculo preciso de los fenómenos en el circuito por métodos elementales es imposible. Sin embargo, haciendo uso de la ley de conservación de la energía puede ser, aproximadamente, apreciado el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , durante el cual el condensador se carga.

En realidad, el trabajo realizado por la fuente de corriente durante dicho tiempo es igual a la variación de la energía interna del resistor más la variación de la energía del condensador:

$$A = Q + \frac{1}{2} C \varphi^2.$$

El potencial definitivo del condensador es igual a la fem de la fuente, mientras que el trabajo de la fuente y la variación de la energía interna del resistor pueden ser expresados con ayuda de la intensidad media de corriente:

$$i_m \mathcal{E} \Delta t = i_m^2 R \Delta t + \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2.$$

De manera aproximada se puede hacer que  $i_m \approx i_0/2 = \mathcal{E}/2R$ . Entonces

$$\frac{\mathcal{E}^2}{2R} \Delta t \approx \frac{\mathcal{E}^2 R \Delta t}{4R^2} + \frac{C \mathcal{E}^2}{2},$$

o bien

$$\Delta t \approx 2RC = 2\tau. \quad (39.34)$$

El producto  $\tau = RC$  se llama *constante de tiempo* para un circuito formado de un resistor y condensador, o bien *tiempo de relajación*. Esta magnitud es la característica del intervalo de tiempo, durante el cual en el circuito se establece el estado de equilibrio.

3. Recomendamos al lector que por su cuenta aprecie el tiempo, durante el cual el condensador cargado se descarga por el resistor. Con este fin, hay que igualar la energía del condensador cargado con la variación de la energía interna del resistor. Para simplificar el cálculo hagamos  $i_m \approx \varphi_0/2R$ ; entonces resulta que el tiempo de descarga del condensador  $\Delta t \approx 2RC \approx 2\tau$ .

## Capítulo 40

# CAMPO MAGNÉTICO EN EL VACÍO

## § 40.1. Interacción de corrientes.

### Fuerzas magnéticas

1. Tensemos dos cintas largas de lámina de estaño, paralelas entre sí y conectémoslas a una fuente de corriente. Si por los dos conductores pasan corrientes de igual dirección, las cintas se atraerán. Pero si las corrientes fluyen en direcciones opuestas por los conductores, éstos se repelerán. Trátemos de explicar la causa de este fenómeno.

En los metales hay electrones libres (gas electrónico) distribuidos por el interior de la red iónica. La carga sumaria de la red iónica de carga positiva y del gas electrónico de carga negativa es igual a cero; las cargas están distribuidas uniformemente en el conductor, de forma que en el sistema no hay momento dipolar. Gracias a esto, la inten-

sidad sumaria del campo eléctrico de la red iónica y del gas electrónico fuera del conductor es igual a cero y alrededor del conductor no hay campo eléctrico. Precisamente por esta razón, al no haber corriente, los conductores no interactúan entre sí.

Sin embargo, al haber corriente, es decir, cuando transcurre el movimiento ordenado de electrones libres, entre los conductores surge una fuerza de interacción. Esto nos lleva a la conclusión de que *las fuerzas de interacción entre las cargas eléctricas en movimiento se distinguen de las fuerzas de interacción entre cargas inmóviles.*

Las fuerzas de interacción complementarias que surgen entre las cargas eléctricas en movimiento se suelen llamar, por razones históricas, *fuerzas magnéticas*. La cosa es, que sobre un conductor con corriente situado junto a un imán permanente actúan fuerzas análogas.

2. Hay que prestar atención al hecho de que, basándonos en la mecánica newtoniana, es imposible explicar el origen de las fuerzas magnéticas. En efecto, en la mecánica newtoniana las fuerzas de interacción sólo están relacionadas con la aceleración. Por esta causa, de acuerdo con la mecánica newtoniana, las fuerzas de interacción entre cargas en movimiento uniforme no deberían diferenciarse de las fuerzas de interacción entre las cargas inmóviles, lo que no corresponde al experimento.

Podemos examinar este problema desde otro punto de vista. En la mecánica newtoniana, la fuerza es función de la distancia entre los cuerpos en interacción y de sus velocidades relativas. Pero las distancias entre los electrones de conducción no varían al surgir la corriente; su velocidad relativa uno respecto al otro sigue siendo nula. Parece, como si no pudieran aparecer otras fuerzas adicionales.

Sin embargo, la experiencia certifica que durante el movimiento de los electrones entre ellos surgen fuerzas que no existían al no haber corriente. De este modo, queda demostrado el carácter limitado de la mecánica newtoniana y la ineptitud de sus representaciones para explicar la interacción magnética.

3. En los siguientes párrafos mostraremos que en los ámbitos de las representaciones de la teoría de la relatividad se obtiene una interpretación correcta de la interacción magnética. Las regularidades obtenidas sobre esta base, resultan estar en completa correspondencia con el experimento.

## § 40.2. Ley de transformación para la cantidad de movimiento transversal y la fuerza transversal

1. En los caps. 12 y 13 dedujimos transformaciones relativistas para las coordenadas y el tiempo, es decir, las transformaciones de Lorentz (§ 12.6), así como las expresiones para la cantidad de movimiento y la fuerza (§§ 13.1 y 13.2). Hallemos las transformaciones para las proyecciones de la cantidad de movimiento y la fuerza a lo largo del eje de la

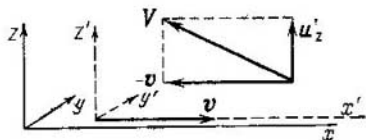


Fig. 40.1.

$z$ -coordenada, es decir, para la cantidad de movimiento transversal y la fuerza transversal. Sea que cierto cuerpo (con mayor precisión, un punto material) de masa  $m_0$  se mueve a la velocidad  $u_z = \Delta z / \Delta t$  a lo largo del eje de la  $z$ -coordenada. Entonces la proyección de su cantidad de movimiento en este eje

$$p_z = mu_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1 - u_z^2/c^2}}. \quad (40.1)$$

La proyección de la fuerza en ese mismo eje

$$F_z = \frac{dp_z}{dt}. \quad (40.2)$$

Examinemos cuáles serán las componentes de la cantidad de movimiento  $p'_z$  y de la fuerza  $F'_z$  en otro sistema de referencia, en movimiento uniforme a lo largo del eje de abscisas a una velocidad  $v$  (fig. 40.1).

2. Como examinamos el movimiento del cuerpo sólo por el eje de  $z$ -coordenada, la abscisa del cuerpo no varía ( $x = \text{const}$ ). De acuerdo con las transformaciones de Lorentz, aquí

$$z' = z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (40.3)$$

la proyección de la velocidad del cuerpo en el eje de la  $z$ -coordenada del nuevo sistema de referencia

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} \sqrt{1 - v^2/c^2} = u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (40.4)$$

En el nuevo sistema, la masa será

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (40.5)$$

Indiquemos que en las fórmulas (40.3) y (40.5) figuran distintas velocidades. La cuestión radica en que siempre consideramos que el reloj está en reposo respecto del sistema de referencia, por lo que en la ley de transformación del tiempo, entra la velocidad de movimiento de un sistema de referencia con relación a otro  $v$ . En lo que se refiere al cuerpo, éste se mueve respecto de los dos sistemas de referencia: en lo que atañe a  $xyz$ , a la velocidad  $u_z$ , con relación a  $x'y'z'$ , a la velocidad  $V = \sqrt{v^2 + (u'_z)^2}$  (fig. 40.1). Esta es la velocidad que entra en la ley de transformación de la masa.

Más adelante, tenemos

$$\begin{aligned} 1 - \frac{V^2}{c^2} &= 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{(u'_z)^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u_z^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_z^2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (40.5) y teniendo en cuenta (40.1), obtenemos:

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u_z^2/c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (40.6)$$

Hallemos la cantidad de movimiento transversal en el nuevo sistema de referencia. Haciendo uso de (40.4) y (40.6), tenemos

$$p'_z = m' u'_z = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} u_z \sqrt{1 - v^2/c^2} = m u_z = p_z. \quad (40.7)$$

De forma, que al pasar de un sistema de referencia a otro *la cantidad de movimiento transversal no varía.*

3. La fuerza transversal en el nuevo sistema de referencia tiene la forma

$$F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{dp_z}{dt} \sqrt{1 - v^2/c^2} = F_z \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (40.8)$$



Así, pues, a diferencia de la mecánica newtoniana, en la teoría de la relatividad *la fuerza transversal depende de la velocidad*, lo que permite explicar el origen de las fuerzas magnéticas.

### § 40.3. Interacción entre cargas en movimiento

1. Supongamos que dos cargas puntuales  $Q$  y  $q$  están a una distancia  $r$  la una de la otra e inmóviles con relación

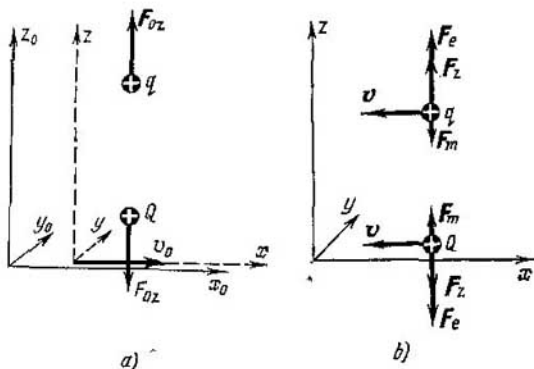


Fig. 40.2.

al sistema de referencia  $x_0y_0z_0$  (fig. 40.2, a). En este caso, entre las cargas actúa la fuerza de Coulomb:

$$F_{0z} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (40.9)$$

Veamos qué fuerzas actúan sobre estas mismas cargas en el sistema de referencia  $xyz$ , que se desplaza a lo largo del eje de abscisas, a la derecha, a una velocidad  $v_0$  (fig. 40.2, b). De acuerdo con (40.8), tenemos

$$F_z = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sqrt{1 - v_0^2/c^2}. \quad (40.10)$$

2. En lo que atañe al sistema  $xyz$  las cargas  $Q$  y  $q$  se mueven a una velocidad  $v = -v_0$ , siendo paralelas entre

si. Resulta que la fuerza de interacción entre las cargas en este sistema de referencia es menor que en el sistema  $x_0y_0z_0$ , respecto del cual están en reposo. Multiplicando el numerador y denominador en la expresión (40.10) por  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  y desarrollando el numerador en dos términos, obtenemos

$$F_z = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{qQv^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (40.11)$$

3. El primer término de esta expresión puede ser considerado como *la componente eléctrica de la fuerza transversal*:

$$F_e = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} = qE, \quad (40.12)$$

donde  $E$  es la intensidad del campo eléctrico transversal en el sistema de referencia  $xyz$ :

$$E = \frac{F_e}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (40.13)$$

El segundo término de (40.11) puede ser considerado como *la componente magnética de la fuerza transversal*:

$$F_m = \frac{qQv^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (40.14)$$

4. Después de dividir (40.14) por (40.12), obtenemos la razón entre la componente magnética y eléctrica:

$$F_m/F_e = v^2/c^2. \quad (40.15)$$

Así, pues, la componente magnética de la fuerza transversal es mucho menor que la eléctrica. Por esta razón, al calcular la fuerza de interacción entre las cargas libres, con la primera aproximación, podemos despreciar las fuerzas magnéticas y hacer los cálculos mediante las conocidas fórmulas de electrostática. Sin embargo, cuando las cargas se mueven por el conductor, las fuerzas eléctricas quedan compensadas (§ 40.1), por lo que resta una sola fuerza magnética. Este hecho explica la interacción magnética de los conductores con corriente, así como en otros casos de interacciones magnéticas: en los electroimanes, electromotores, etc.

### § 40.4. Vector de inducción del campo magnético. Líneas de fuerzas

1. Escribamos la expresión (40.14) de la siguiente forma:

$$F_m = qv \frac{Qv}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}} = qvB, \quad (40.16)$$

donde la magnitud

$$B = \frac{Qv}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\mu_0 Qv}{4\pi r^2 \sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (40.17)$$

recibe el nombre de *inducción del campo magnético*, mientras que  $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$ , *permeabilidad magnética*. De esta manera, como para la descripción de la interacción eléctrica fue introducida la noción de campo eléctrico, para describir la interacción magnética introduciremos el concepto de campo magnético. A saber: supongamos que *alrededor de la carga en movimiento  $Q$  surge un campo magnético*; a su vez, *este campo actúa sobre la carga en movimiento  $q$* .

El vector de inducción es la característica de fuerza del campo magnético, lo mismo que el vector de intensidad caracteriza la fuerza del campo eléctrico.

2. La inducción del campo magnético es igual a la razón entre la fuerza magnética y el producto de la carga por su velocidad, a condición de que la carga se mueva perpendicularmente al vector de inducción:

$$B = \frac{F_m}{qv_{\perp}}. \quad (40.18)$$

La unidad de inducción del campo magnético en el SI se llama *tesla* (T), y es la inducción de un campo que actúa sobre una carga de 1 C en movimiento a una velocidad de 1 m/s perpendicularmente al vector de inducción, con una fuerza transversal de 1 N:

$$1\text{T} = \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{C}\cdot\text{m}} = \frac{\text{N}}{\text{A}\cdot\text{m}} = \frac{\text{J}\cdot\text{s}}{\text{C}\cdot\text{m}^2} = \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}.$$

3. La dirección del vector de inducción del campo magnético se determina del modo siguiente. Sea que la carga positiva  $Q$  se mueve a una velocidad  $v$ ; el radio vector  $r$  es perpendicular al vector  $v$  y está dirigido de la carga a un punto del campo; entonces, el vector  $B$  estará dirigido perpendicularmente al plano donde se encuentran los vectores  $v$  y  $r$  y forma con ellos un sistema *dextrógiro*: si un tornillo con

rosca a derechas se enrosca en dirección hacia el vector  $v$ , mientras que la manecilla se dirige a lo largo del radio vector  $r$ , el sentido de su rotación coincide con la dirección del vector  $B$  (fig. 40.3). Esta regla recibió el nombre de "regla del sacacorchos".

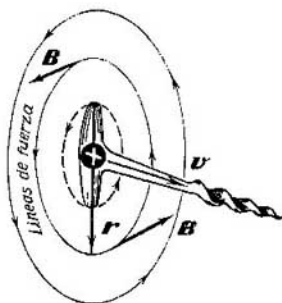


Fig. 40.3.

4. Para la representación evidente de los campos eléctricos, fue introducida la noción de líneas de fuerza (§ 37.1). Partiendo de las mismas consideraciones, introducimos el concepto de *línea de fuerza del campo magnético*, como una curva cuya tangente en cada punto coincide con la dirección del vector de inducción del campo magnético.

De las consideraciones de simetría, vemos que las líneas de fuerza del campo magnético, creado alrededor de una carga en movimiento rectilíneo, son de por sí circunferencias concéntricas.

#### § 40.5. Campo magnético de un conductor con corriente

1. Si por un conductor fluye la corriente, alrededor de éste surge un campo magnético, digamos, de "pura forma", es decir, sin la componente eléctrica. El motivo de aparición de semejante campo puede ser comprendido partiendo del mecanismo de conducción. Para mayor precisión, examinemos el fenómeno en un conductor metálico. La corriente en tal conductor es el movimiento ordenado de electrones libres. Más arriba fue mostrado (véase (40.13)) que la intensidad del campo eléctrico transversal de una carga en movimiento, es algo mayor que la intensidad de una carga inmóvil. Pero la velocidad de movimiento de los electrones de conducción es insignificante en comparación con la velocidad de la luz (§ 39.2), de manera que, prácticamente, la intensidad del campo eléctrico de los electrones de conducción, incluso al haber corriente, compensa la intensidad del campo de la red iónica, lo mismo que esto sucedió al no

haber corriente. Sólo la inducción del campo magnético de las corrientes de conducción queda no compensada. Por consiguiente, observaremos en este caso el campo magnético en "pura forma", sin la componente eléctrica (fig. 40.4).

Recomendamos que el lector se cerciøre por su cuenta de que en los electrólitos, donde la corriente es el movimiento ordenado de iones positivos y negativos en direcciones opuestas, el mecanismo de surgimiento del campo magnético es el mismo: las componentes eléctricas del campo se compensan recíprocamente, mientras que las magnéticas, se suman.

2. Sea que la corriente  $i$  pasa por un conductor en forma de anillo de radio  $a$  (fig. 40.5). El centro del anillo coincide con el origen de coordenadas, el conductor yace en el plano  $yz$ , por lo que el eje de abscisas será el eje de simetría. Cal-

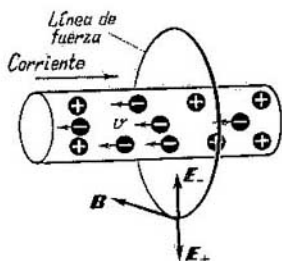


Fig. 40.4.

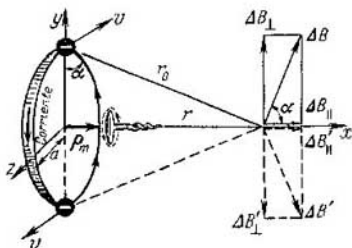


Fig. 40.5.

culamos la inducción del campo en un punto de este eje tomado al azar.

La inducción del campo de cierto electrón arbitrario puede ser hallada por la fórmula (40.17). Haciendo  $Q = e$  (carga del electrón) y teniendo en cuenta que la velocidad de un electrón de conducción es menor que la de la luz en el vacío,

tenemos

$$\Delta B = \frac{\mu_0 e v}{4\pi r_0^2}. \quad (40.19)$$

3. El vector de inducción  $\Delta B$  está dirigido perpendicularmente al radio  $r_0$ . Descompongamos este vector en dos: a lo largo del eje de simetría  $\Delta B_{\parallel} = \Delta B \cos \alpha$  y perpendicular a él  $\Delta B_{\perp} = \Delta B \sin \alpha$  (fig. 40.5). Para cada electrón se puede hallar un electrón simétrico, situado en el extremo opuesto del diámetro y que está en movimiento en dirección contraria. De la simetría vemos, que

$$\Delta B'_{\parallel} = \Delta B_{\parallel}, \quad \Delta B'_{\perp} = -\Delta B_{\perp}.$$

Sumemos los vectores de inducción creados por todos los electrones de conducción. Está claro que *la suma de todas las componentes transversales del vector de inducción es nula*. Sólo queda *la componente longitudinal del vector de inducción*, dirigida a lo largo del eje de simetría:

$$B_{\parallel} = N \Delta B_{\parallel} = N \Delta B \cos \alpha, \quad (40.20)$$

donde  $N$  es el número de electrones de conducción en el conductor.

4. Sea igual a  $s$  la sección transversal del conductor y por lo tanto, su volumen  $V = 2\pi a s$ , mientras que la cantidad de electrones en él  $N = nV = 2\pi n a s$ . Teniendo en cuenta que  $\cos \alpha = a/r_0$ , transformamos la expresión (40.20):

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0 \cdot e n v s \cdot 2\pi a^2}{4\pi r_0^2}.$$

Pero  $e n v s = i$  es la intensidad de corriente en el conductor (véase (39.17)), por esta causa

$$B_{\parallel} = \frac{2\mu_0 i \cdot \pi a^2}{4\pi r_0^2}. \quad (40.21)$$

Cuando el punto del campo, donde se calcula el vector de inducción, está situado lejos del centro de la corriente circular, es decir, a una distancia  $r = \sqrt{r_0^2 - a^2} \gg a$ , podemos, aproximadamente, hacer  $r \approx r_0$  y sustituir en la expresión (40.21) la distancia desde el punto del campo hasta el conductor por la distancia desde el punto del campo hasta el centro de la corriente circular:

$$B_{\parallel} = \frac{2\mu_0 i \cdot \pi a^2}{4\pi r^2}. \quad (40.22)$$

La fórmula obtenida recuerda en alto grado la expresión para la intensidad del campo eléctrico en el eje de un dipolo eléctrico:  $E_{\parallel} = 2p_e/4\pi\epsilon_0 r^3$  (véase (10.10)). Por cierto, que esta última también es sólo justa para los puntos del campo situados lejos del centro del dipolo.

### § 40.6. Momento magnético

1. Llamemos *momento magnético* de un cuadro con corriente el producto de la corriente por el área del cuadro:

$$p_m = iS. \quad (40.23)$$

Para la corriente circular  $p_m = \pi a^2 i$ , donde  $a$  es el radio del círculo. La unidad de momento magnético en el SI es  $A \cdot m^2$ .

El momento magnético puede considerarse como un vector, atribuyéndole la dirección de *la normal positiva* al área del cuadro. La dirección de la normal positiva y, por consiguiente del vector del momento magnético, se halla mediante la regla del sacacorchos (regla de Maxwell): si giramos la manecilla de un sacacorchos con rosca a derechas en dirección de la corriente, el movimiento de avance del tornillo nos mostrará la dirección del vector del momento magnético (véase la fig. 40.5).

2. Haciendo uso de la noción de momento magnético, podemos escribir la expresión (40.22) en forma vectorial:

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \frac{2\mu_0 p_m}{4\pi r^3}. \quad (40.24)$$

Así, pues, a distancias relativamente grandes del cuadro con corriente, el campo magnético tiene igual estructura que el campo eléctrico de un dipolo (§ 10.6); es proporcional al momento magnético o inversamente proporcional al cubo de la distancia desde la fuente del campo hasta el punto del campo.

Utilizando esta analogía, escribamos la expresión para la inducción del campo magnético en un punto que yace en el plano de la corriente circular, es decir, en la perpendicular al vector de momento magnético. De forma análoga a la fórmula (10.13), tenemos

$$\mathbf{B}_{\perp} = - \frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3}. \quad (40.25)$$

Un cálculo riguroso certifica que semejante resultado es correcto. El signo menos nos muestra que la dirección del vector  $B_{\perp}$  es opuesta a la del vector del momento magnético.

3. Hay que prestar atención a que en el entorno de un cuadro con corriente la estructura del campo magnético se distingue en principio de la estructura del campo eléctrico de un dipolo. Este consta de dos cargas iguales en magnitud y de signos opuestos. Las líneas de fuerza del campo eléctrico comienzan en la carga positiva y finalizan en la ne-

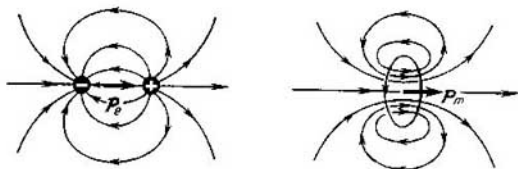


Fig. 40.6.

gativa. Las líneas de fuerza del campo magnético son cerradas y contornan el cuadro con corriente. Esto se ve bien en la fig. 40.6, donde están representadas las líneas de fuerza del campo de un dipolo eléctrico y del campo magnético de un cuadro con corriente. No obstante, como vemos en la figura, a grandes distancias, la forma de las líneas de fuerza de los dos campos es igual.

Señalemos, además, que a grandes distancias del cuadro con corriente, la estructura del campo no depende ya de las dimensiones y la forma del cuadro. Si aumentamos el área del cuadro y disminuimos correspondientemente en igual número de veces la corriente, obtendremos un mismo campo, ya que en tal caso el momento magnético queda invariable. Más aún, resulta que la forma del cuadro deja de jugar todo papel. Podemos sustituir el cuadro redondo por otro cuadrado, triangular, etc.: a grandes distancias del cuadro el campo no varía, si se conserva el momento magnético.

4. Introduzcamos, por fin, la noción de momento magnético de la carga en circulación. Si la carga  $q$  está en movimiento uniforme por una circunferencia a una velocidad  $v$ , el campo magnético que surge a su alrededor, varía continuamente de dirección. Sin embargo, el valor *medio* del vector de inducción en el eje será el mismo, como si por la



circunferencia fluyera la corriente  $i = q/T$ , donde  $T = 2\pi r/v$ , es decir, el tiempo necesario para dar una vuelta (período). De aquí se desprende que tiene sentido introducir el concepto de momento magnético de una carga en circulación:

$$p_m = i \cdot \pi r^2 = q \cdot \pi r^2 / T = \pi r^2 q v / (2\pi r) = qvr/2.$$

Así, pues, el momento magnético de una carga en circulación

$$p_m = qvr/2. \quad (40.26)$$

O bien:

$$p_m = \frac{q}{2m} mvr. \quad (40.27)$$

Pero  $L = mvr$  es el momento de cantidad de movimiento. Vemos que el momento magnético de una carga en circulación

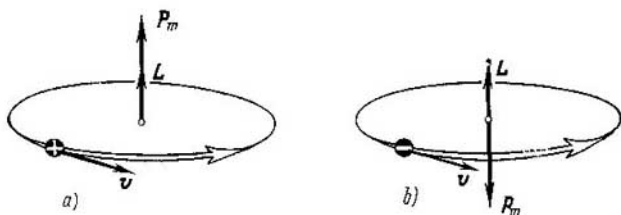


Fig. 40.7.

es proporcional al momento de cantidad de movimiento del cuerpo que porta dicha carga:

$$p_m = \frac{q}{2m} L. \quad (40.28)$$

Tanto el momento de cantidad de movimiento  $L$ , como el momento magnético  $p_m$  son vectores perpendiculares al plano de la órbita. Si en ésta circula una carga positiva, los vectores  $L$  y  $p_m$  tendrán igual dirección y formarán un tornillo a derechas con la dirección de rotación de la carga. Si, por lo contrario, por la órbita circula una carga negativa (por ejemplo, un electrón), de acuerdo con (40.28), el vector del momento magnético tendrá dirección opuesta a la del momento orbital, es decir, el momento de cantidad de movimiento  $L$  (fig. 40.7).

## § 40.7. Intensidad del campo magnético

1. Junto con el vector de inducción  $B$ , que caracteriza la acción de fuerza del campo magnético sobre la carga en movimiento, con frecuencia se introduce el vector auxiliar  $H$  que recibe el nombre de *intensidad del campo magnético*. La intensidad se determina como la razón entre la inducción del campo en el vacío  $B_0$  y la permeabilidad magnética  $\mu_0$ :

$$H = B_0/\mu_0. \quad (40.29)$$

Indiquemos, que por analogía con la teoría del campo eléctrico, donde el vector de fuerza  $E$  denominase intensidad y el auxiliar  $D$ , desplazamiento, sería conveniente denominar en la teoría del magnetismo, intensidad del campo magnético el vector de fuerza  $B$ , mientras que el vector auxiliar  $H$ , inducción magnética o desplazamiento magnético. Semejante equívoco en la terminología surgió aún cuando el sentido físico de los vectores del campo  $B$  y  $H$  no estaba claro del todo.

2. De acuerdo con (40.29) y (40.21), la intensidad del campo magnético en el eje de la corriente circular

$$H_{\text{e}} = \frac{2\pi ia^2}{4\pi r_0^3}. \quad (40.30)$$

En el centro de la corriente circular, donde  $r_0 = a$ , tenemos

$$H_{\text{cen}} = i/2a. \quad (40.30')$$

Basándonos en esta dependencia, puede ser definida la unidad de intensidad del campo magnético en el SI: 1 *amperio por metro* (A/m), es la intensidad de un campo magnético en el centro de un cuadro circular con radio de 1 m, por el que fluye una corriente de 2 A.

3. Es interesante el cálculo del campo magnético alrededor de un conductor rectilíneo muy largo (en el límite, infinitamente largo). Por desgracia, no podemos deducir de modo elemental la fórmula buscada, por lo que escribiremos el resultado sin demostración. Por consideraciones de simetría, está claro que aquí las líneas de fuerza tienen forma de circunferencias concéntricas, yacentes en un plano perpendicular al conductor (fig. 40.8). El vector de inducción (e intensidad) está dirigido por la tangente a la línea de fuerza, formando con la dirección de la corriente un tornillo a derechas (§ 40.4). La intensidad y la inducción del campo a la distancia  $a$  del conductor se expresan por las fórmulas

$$H = i/(2\pi a), \quad B = \mu_0 i/(2\pi a). \quad (40.31)$$

4. Denomínase *solenoides* una bobina cilíndrica, constituida por gran número de espiras de alambre, enrolladas en una armazón unas junto a otras. El solenoide es, en realidad, un sistema de corrientes circulares de igual radio, que tienen eje común.

La intensidad del campo magnético en el eje del solenoide es igual a la suma de las intensidades de cada una de las corrientes circulares.

La dirección del vector de intensidad (o del vector de inducción) se determina por la regla del sacacorchos, como esto se muestra en la fig. 40.9.

Sea el número total de espiras de alambre del solenoide igual a  $w$ , la longitud de éste,  $l$ . Entonces, la densidad del arrollamiento  $n = w/l$ , es decir, el número de espiras por unidad de longitud.

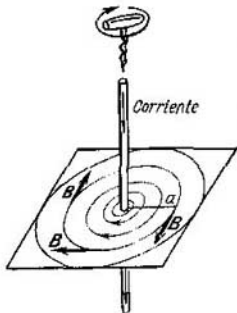


Fig. 40.8.

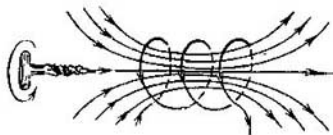


Fig. 40.9.

Supongamos que la longitud del solenoide es muchas veces mayor que su diámetro:  $l \gg a$ . Resulta que en este caso el campo en el interior del solenoide puede ser considerado homogéneo, es decir, su intensidad (e inducción) es, prácticamente, igual en todos sus puntos:

$$H = tn. \quad (40.32)$$

Sólo cerca de los extremos del solenoide, el campo comienza a disminuir y en el propio extremo, el campo es dos veces más débil que dentro de la bobina:

$$H_{\text{extr}} = tn/2. \quad (40.33)$$

### § 40.8. Invariancia de la carga eléctrica

1. Más arriba, al analizar la naturaleza de la interacción magnética, supusimos que la carga eléctrica tenía el mismo valor en todos los sistemas de referencia, es decir, que esta carga es invariante. Aclaremos las causas que nos llevan a esta conclusión.

Si suponemos que la carga no es invariante y varía al cambiar la velocidad de la partícula, por analogía podemos pensar que la variación se expresa mediante una fórmula igual a la que empleábamos al cambiar la longitud, tiempo,

masa, etc. (§ 13.3):

$$|\Delta q/q| \approx 1 - \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx v^2/2c^2. \quad (40.34)$$

Pero la velocidad del electrón en el átomo (§ 16.7) es de unos  $10^6$  m/s, de donde se desprende, que

$$\left| \frac{\Delta q}{q} \right| \approx \frac{10^{12}}{2.9 \cdot 10^{16}} \approx 10^{-5}.$$

2. A primera vista parece que esta es una pequeña magnitud que se descubre con dificultad. Pero un análisis más profundo muestra que no es así.

En efecto, al variar la temperatura de un cuerpo, así como durante las reacciones químicas, la energía de los electrones cambia varias veces (§§ 20.3, 20.4). De forma análoga varía la velocidad de los electrones. Pero como en este caso la velocidad del núcleo queda invariable, tampoco cambia su carga. De aquí se desprende, que al variar la velocidad del electrón se perturbaría la neutralidad del átomo: si en cierto estado la carga positiva del núcleo compensa la carga negativa de la capa electrónica, en otro estado, cuando la velocidad de movimiento del electrón varía, dicha compensación se violaría y el átomo se vería cargado. A pesar de que la variación de la carga de un átomo sería pequeña, el volumen macroscópico del cuerpo adquiriría mayor carga.

Como ejemplo, examinemos  $1 \text{ cm}^3$  de gas. Éste contiene  $N = 2.7 \cdot 10^{19}$  átomos (§ 26.9). Según (40.34), al calentarlo, este gas adquiriría una carga excesiva:

$$\Delta Q = N \Delta q \approx \frac{N e v^2}{2c^2} = \frac{2.7 \cdot 10^{19} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{12}}{2.9 \cdot 10^{16}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ C.}$$

Esto sería acompañado por el surgimiento de un campo eléctrico con potencial

$$\varphi \approx \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 r} \approx \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 36\pi \cdot 10^9}{4\pi \cdot 10^{-2}} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ V.}$$

¡Pero un campo eléctrico de un potencial de decenas de millones de voltios se advertiría con facilidad! Sin embargo, este experimento nada muestra.

3. Así, pues, al suponer que la carga eléctrica no es invariante y que cambia al variar la velocidad de la partícula según la fórmula (40.34), hemos llegado a corolarios absurdos. Por consiguiente, esta suposición es errónea.

El hecho de que ni en los procesos térmicos, ni en las reacciones químicas la neutralidad de átomo no se viola, es una demostración convincente de la invariancia de la carga eléctrica.

### Capítulo 41

## CARGAS Y CORRIENTES EN EL CAMPO MAGNÉTICO

### § 41.1. Fuerza de Lorentz

1. Como se ha mostrado en el anterior capítulo, sobre una carga en movimiento perpendicular al vector de inducción  $B$ , a una velocidad  $v$ , actúa una fuerza  $F = qvB$  (40.18). Esta recibe el nombre de *fuerza de Lorentz*. La dirección de esta fuerza puede ser determinada por medio de *la regla de la mano izquierda*: si dicha mano se dispone de modo que el vector  $B$  entre por la palma de la mano, mientras que el vector  $v$  esté dirigido a lo largo de los cuatro dedos, entonces el pulgar separado de la mano nos mostrará la dirección de la fuerza con la que el campo magnético actúa sobre una carga positiva (fig. 41.1). Sobre una carga negativa, que se mueve en esa misma dirección y por ese mismo campo magnético, la fuerza actúa en dirección inversa.

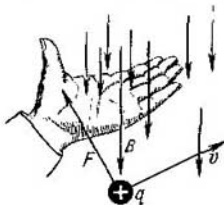


Fig. 41.1.

Si la carga se mueve a lo largo de las líneas de fuerza del campo, o sea, si los vectores de velocidad e inducción del campo son paralelos o antiparalelos, el campo magnético no actúa sobre dicha carga.

De aquí se desprende que si el vector de la velocidad de movimiento de la carga  $v$ , constituye con el vector  $B$  cierto ángulo  $\alpha \neq \pi/2$ , el vector de velocidad puede ser descompuesto en dos componentes: la longitudinal  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$  y transversal  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ . La fuerza de Lorentz sólo se determina por *la componente transversal de la velocidad*:

$$F = qv_{\perp}B = qvB \sin \alpha. \quad (41.1)$$

2. La expresión para la fuerza de Lorentz puede ser también escrita en forma vectorial si introducimos la noción de *vector unitario*  $n_0$ . El módulo del vector unitario es igual a la unidad:  $|n_0| = 1$ , por lo que el producto del vector unitario y una magnitud escalar no varía el valor absoluto de esta última. En lo que se refiere a la dirección del vector unitario, será elegida de tal modo que sea perpendicular a los vectores  $v$  y  $B$ , de acuerdo con la regla de la mano izquierda.

Como vector, la fuerza de Lorentz se escribe del modo siguiente:

$$F = n_0 qvB \text{ sen } \alpha. \quad (41.2)$$

Como sabemos, sobre la carga eléctrica actúa no sólo el campo magnético, sino que también el eléctrico. Por lo tanto, si una carga eléctrica se mueve en un *campo electromagnético*, la fuerza que sobre ella actúa puede ser representada como la suma vectorial de las componentes eléctrica y magnética:

$$F = F_e + F_m = q(E + n_0 vB \text{ sen } \alpha). \quad (41.3)$$

Esta expresión se denomina *fuerza generalizada de Lorentz*.

3. Debemos señalar una importante diferencia entre las componentes eléctrica y magnética de la fuerza generalizada de Lorentz. Como ya mostramos en el § 18.7, durante el desplazamiento de la carga eléctrica por un campo eléctrico se realiza trabajo, igual al producto de la carga por la diferencia de potencial:  $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ . La *fuerza magnética*, es decir, la fuerza de Lorentz en sentido estricto, *no realiza trabajo*. En efecto, el trabajo elemental  $\Delta A = F \Delta l \cos \beta$ , donde  $\beta$  es el ángulo entre la dirección de la fuerza y la dirección de desplazamiento. Pero la fuerza de Lorentz es perpendicular al desplazamiento de la carga ( $F_m \perp v$ ), por lo que el ángulo  $\beta = \pi/2$  y el trabajo  $\Delta A = 0$ .

### § 41.2. Movimiento de las partículas cargadas en un campo magnético homogéneo

1. Sea que una partícula, de carga  $q$  y masa propia  $m_0$ , penetra en un campo magnético homogéneo ( $B = \text{const}$ ) a cierta velocidad  $v$ , perpendicularmente a las líneas de fuerza del campo (fig. 41.2). Para mayor claridad, vamos a suponer que la partícula tiene carga positiva. Sobre la partícula

actúa la fuerza de Lorentz, perpendicular al vector de velocidad. A lo largo de este vector, sobre la partícula no actúa ninguna fuerza. Por consiguiente, la ecuación de movimiento de la partícula puede ser escrita así:

$$F_t = \frac{dp}{dt} = 0, \quad (41.4)$$

$$F_n = \frac{mv^2}{r} = qvB,$$

De la primera igualdad se desprende que el módulo de la cantidad de movimiento no varía:  $p = mv = \text{const.}$  Pero

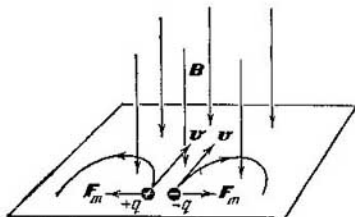


Fig. 41.2.

como  $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ , llegamos a la conclusión de que el módulo de la velocidad de la partícula no varía en un campo magnético homogéneo.

A esta misma conclusión podemos llegar por otro camino, partiendo de la ley de conservación de la energía. En efecto, como fue mostrado en el párrafo anterior, las fuerzas magnéticas no realizan trabajo, por consiguiente, la energía cinética de la partícula no cambia en un campo magnético homogéneo. Esto confirma que se conserva el módulo de la velocidad.

2. De la segunda igualdad (41.4) se desprende que sobre la partícula actúa una fuerza normal (centrífuga). De forma que la dirección de la velocidad variará constantemente y la partícula se moverá por una trayectoria curvilínea.

Mostremos que esta trayectoria es una *circunferencia*. Con este fin, hallemos el radio de curvatura de dicha trayectoria:

$$r = mv/(qB) = p/(qB). \quad (41.5)$$

Como la carga y la inducción del campo son constantes, mientras que, como fue mostrado más arriba, el módulo de la cantidad de movimiento también es una magnitud constante,  $r = \text{const}$ . Pero la circunferencia es una curva cerrada plana cuyos puntos mantienen una distancia constante al punto llamado centro, es decir, es una línea de curvatura constante ( $r = \text{const}$ ). Así, pues, *una partícula cargada que penetra en un campo magnético homogéneo perpendicularmente a las líneas de fuerza, se mueve en el campo uniformemente por una circunferencia en el plano perpendicular al vector de inducción.*

3. Calculemos el período de rotación de la partícula por dicha trayectoria:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi m_0}{qB \sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (41.6)$$

Aquí vemos, que a velocidades no relativistas ( $v \ll c$ ), el período de rotación de la partícula no depende de su velocidad y radio. Si por lo contrario, la velocidad de la partícula es próxima a la de la luz (velocidades relativistas y ultrarrelativistas), con el aumento de la velocidad crece el período de rotación de la partícula.

Notemos, que la comprobación de la justeza de la expresión (41.6), permite al mismo tiempo comprobar la validez de uno de los fundamentales principios de la teoría de la relatividad, es decir, la dependencia de la masa de la velocidad  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ . Múltiples experimentos para la investigación del carácter del movimiento de las partículas cargadas en los campos magnéticos, nos han permitido comprobar con alto grado de precisión la justeza de la fórmula (41.6) y, por lo tanto, la dependencia entre la masa y la velocidad.

### § 41.3. Determinación del signo de la carga de las partículas elementales

1. Una partícula de carga negativa, que tiene la misma velocidad, masa y magnitud absoluta de la carga que una partícula de carga positiva, se moverá por la misma trayectoria, pero con una diferencia: como la fuerza de Lorentz cambia su dirección por la opuesta, la partícula también girará hacia otro lado (fig. 41.2). Por esta razón, según la dirección



de giro de la partícula en el campo magnético puede ser determinado el signo de su carga.

2. De esta manera fue descubierto *el positrón* (de otra forma, antielectrón), que es una partícula que no se diferencia del electrón por su masa, pero que tiene carga positiva. El positrón fue descubierto por Carlos Anderson en 1932, por la traza (huella) característica que él dejaba en la cámara de Wilson (§ 36.9) situada en un campo magnético. En la fig. 41.3 está representada la fotografía de la traza de un positrón que atraviesa la placa de plomo *P* ubicada en el centro de la cámara. El campo magnético, desde el plano de la figura, está dirigido hacia nosotros.

La dirección del vuelo de la partícula se determina por la curvatura de su trayectoria. Vemos que por abajo, el radio de curvatura de la trayectoria es mayor y, por consiguiente, la velocidad de la partícula también es allí mayor que sobre la placa. De aquí llegamos a la conclusión de que la partícula se mueve de abajo arriba y después de atravesar el plomo pierde parte de su energía. Determinando del modo indicado la dirección del vector de velocidad y conociendo la del vector de inducción del campo magnético, hallamos también el signo de la carga de nuestra partícula, que resulta ser positivo. De manera análoga se determina el signo de otras partículas elementales por las fotografías de sus trazas en la cámara de Wilson o en la de burbujas.



Fig. 41.3.

#### § 41.4. Ciclotrón

1. Para una serie de investigaciones en física nuclear, es preciso tener haces de partículas (electrones, protones, iones positivos) con muy altas energías de un orden de 10 MeV . . .

... 100 GeV. Para acelerar dichas partículas se utilizan los aceleradores.

Uno de los elementos necesarios de todo acelerador es un campo eléctrico con considerable diferencia de potencial. No obstante, la creación de campos eléctricos con una diferencia de potencial de un orden de un millón de voltios está relacionada con enormes dificultades. En lo que se refiere a la

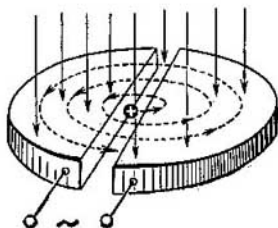


Fig. 41.4.

creación de campos con diferencia de potencial aún mayor, es imposible en principio a causa del surgimiento de una descarga en gas. Pero es posible hacer pasar la partícula por el campo eléctrico de aceleración no una, sino varias veces. Por ejemplo, si un protón pasa 30 mil veces por un campo de aceleración de un potencial de 22 000 V, adquirirá una energía de 660 MeV. Con este fin, la partícula deberá moverse

por una trayectoria cerrada o por una espiral. Esto es posible si la partícula se sitúa en un campo magnético. Los aceleradores que funcionan por el principio descrito, reciben el nombre de *aceleradores cíclicos*.

2. El primer acelerador de este tipo, llamado *ciclotrón*, fue creado por Ernest O. Lawrence en 1930. Su esquema se muestra en la fig. 41.4.

En una cámara de vacío, en la que con ayuda de bombas de vacío se mantienen presiones miles de millones menores que la atmosférica, se disponen dos semicilindros llamados des (electrodos en D). Cerca del centro de éstos se dispone la fuente de iones positivos. A las des se alimenta una diferencia de potencial alternativa de alta tensión, con una frecuencia de un orden de 1 ... 10 MHz. La diferencia media de potencial constituye de varios centenares a varias decenas de miles de voltios.

La cámara de vacío se dispone entre los polos de un potente electroimán, en el que se crea un campo magnético con una inducción de 1,3 ... 1,6 T. La masa del núcleo del electroimán es de varios miles de toneladas; los arrollamientos del electroimán se alimentan de generadores de una potencia de varios megavatios.

3. El principio de funcionamiento del ciclotrón consiste en lo siguiente. Cuando el ion positivo llega a la holgura entre las dos des, adquiere una energía cinética  $K_1 = p_1^2/2m = q\varphi$ , donde  $\varphi$  es la diferencia de potencial entre los electrodos,  $q$  es la carga del ion. La cantidad de movimiento de ion después de que el campo actúa una vez sobre él

$$p_1 = \sqrt{2mq\varphi}.$$

Bajo la acción del campo magnético el ion se mueve por una semicircunferencia, cuyo radio (véase (41.5))

$$r_1 = \frac{p_1}{qB} = \frac{\sqrt{2mq\varphi}}{qB} = \sqrt{\frac{m}{q}} \frac{\sqrt{2\varphi}}{B}.$$

Si en el momento, cuando el ion penetra en el intervalo entre las des, el campo eléctrico cambia su polaridad, la partícula recibe una porción más de energía. Su energía cinética será igual a  $K_2 = 2q\varphi$ , la cantidad de movimiento  $p_2 = \sqrt{4mq\varphi}$  y el radio de la semicircunferencia  $r_2 = \sqrt{\frac{m}{q}} \frac{\sqrt{4\varphi}}{B}$ . Después de dar  $N$  vueltas, el ion pasará por el campo de aceleración  $2N$  veces y, por consiguiente, su energía cinética final  $K = 2Nq\varphi$ , mientras que el radio de la órbita final de ion (radio del electrodo en D)

$$R = \frac{mv_{\text{máx}}}{qB} = \frac{\sqrt{2mK}}{qB} = \sqrt{\frac{m}{q}} \frac{\sqrt{2N\varphi}}{B}. \quad (41.7)$$

4. Supongamos que es necesario acelerar un ion de berilio  $\text{Be}^{++}$  hasta una energía  $K = 100$  MeV. Tomemos que el potencial de aceleración  $\varphi = 500$  V, entonces  $N = K/(2q\varphi) = 50\,000$ . La masa del ion de berilio  $m_0 = 15,0 \cdot 10^{-27}$  kg, la carga del ion  $q = 2e = 3,2 \cdot 10^{-19}$  C. Con una inducción del campo  $B = 1,53$  T, el radio del electrodo en D

$$R = \frac{\sqrt{2 \cdot 15,0 \cdot 10^{-27} \cdot 100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}}}{1,53 \cdot 3,2 \cdot 10^{-19}} = 1,4 \text{ m.}$$

Señalemos, que la velocidad final del ion constituirá

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 1,6 \cdot 20^{-13}}{15 \cdot 10^{-27}}} = 4,6 \cdot 10^7 \text{ m/s,}$$

o sea, un 15% de la velocidad de la luz en el vacío.

5. Con el fin de que el ion se acelere permanentemente, es preciso que él llegue al intervalo de aceleración entre las des en el momento cuando el campo eléctrico varía su polaridad. Por lo tanto, *el período de variación de la polaridad*

del campo eléctrico de aceleración debe coincidir con el período de rotación del ion. Esto recibe el nombre de condición de sincronización. De acuerdo con (41.6), la condición de sincronización se escribe del siguiente modo:

$$T_{\text{cam}} = T_{\text{ion}} = 2\pi m/qB. \quad (41.8)$$

Para el problema que hemos considerado con el ion de berilio, tenemos

$$T = \frac{2\pi \cdot 15 \cdot 10^{-27}}{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 1,53} = 1,93 \cdot 10^{-7} \text{ s} \approx 0,2 \mu\text{s}.$$

La frecuencia de variación de la polaridad

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{10^7}{1,93} = 5,2 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 5,2 \text{ MHz}.$$

### § 41.5. Energía de la partícula y condición de sincronización

1. En el párrafo anterior no hemos tenido en cuenta la dependencia en la masa del ion y la velocidad, es decir, considerábamos que el ion estaba en movimiento a una velocidad mucho menor que la de la luz en el vacío. Con esto, el período de rotación de la partícula en el campo magnético es una magnitud constante, por lo que el período de variación de la polaridad del campo eléctrico de aceleración, que es igual al de rotación de la partícula, también será una magnitud constante. Designémoslo por  $T_0$  y obtendremos

$$T_0 = 2\pi m_0/qB. \quad (41.9)$$

2. Si al acelerar la partícula su velocidad se aproxima a la de la luz en el vacío, su masa crece, a causa de lo cual aumenta su período de rotación.

Dividamos (41.6) por (41.9) y tengamos en cuenta que  $m/m_0 = mc^2/m_0c^2 = \mathcal{E}/\mathcal{E}_0 = (\mathcal{E}_0 + K)/\mathcal{E}_0$ , donde  $\mathcal{E}$  es la energía total de la partícula,  $\mathcal{E}_0$ , la energía en reposo y  $K$ , la energía cinética. Entonces

$$\frac{T}{T_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{\mathcal{E}_0 + K}{\mathcal{E}_0} = 1 + \frac{K}{\mathcal{E}_0}.$$

De aquí sigue, que

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{K}{\mathcal{E}_0} \right) = \frac{2\pi m_0}{qB} \left( 1 + \frac{K}{\mathcal{E}_0} \right). \quad (41.10)$$

Así, pues, el período de rotación de una partícula varía notoriamente sólo cuando la energía cinética de la partícula sea comparable con su energía en reposo.

En el problema que examinamos más arriba, relacionado con el ion de berilio, su energía en reposo

$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2 = 15 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ J} = \frac{15 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{1,6 \cdot 10^{-10}} = 8,4 \text{ GeV},$$

mientras que la energía cinética al terminar el ciclo de aceleración  $K = 100 \text{ MeV}$ . Por consiguiente, el período de rotación de la partícula aumentará, aproximadamente, el 1,2 %, lo que casi no viola las condiciones de sincronización. Si un protón, cuya masa en reposo (y la energía en reposo) es 8,94 veces menor que la masa del ion de berilio, se acelera hasta esa misma energía cinética, su período de rotación aumentará casi el 11 %, lo que violará bruscamente la condición de sincronización y, por lo tanto, el régimen de aceleración de la partícula.

3. Al intentar acelerar los protones en un ciclotrón hasta una energía cinética  $K = 1 \text{ GeV}$ , nada resultará de esto. La energía en reposo del protón

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 8,99 \cdot 10^{16} \text{ J} = \\ &= \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 8,99 \cdot 10^{16}}{1,6 \cdot 10^{-10}} = 0,938 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Esto significa que aquí  $K \approx \mathcal{E}_0$  y  $T \approx 2T_0$ , es decir, el período de rotación del protón con semejantes valores de energía aumenta el doble en comparación con el período de rotación de un protón no relativista. Si con ello, el período de variación de la polaridad del campo eléctrico de aceleración queda constante, los protones no se encontrarán en los momentos necesarios de tiempo en el campo de aceleración, o sea, saldrán del sincronismo y su aceleración cesará.

4. De lo expuesto, vemos que el ciclotrón sólo es apto para acelerar partículas no relativistas, cuya energía cinética es mucho menor que su energía en reposo, o su velocidad mucho menor que la de la luz, lo que es lo mismo. El ciclotrón no sirve para obtener partículas relativistas y aún menos, ultrarrelativistas.

El ciclotrón es absolutamente inservible para acelerar electrones, cuya energía en reposo  $\mathcal{E}_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \times 8,99 \cdot 10^{16} / (1,6 \cdot 10^{-10}) = 0,511 \text{ MeV}$ . Es natural, que ya con energías no grandes, incluso menores que 1 MeV, el electrón se convierte en una partícula relativista y sale del sincronismo. Por esta causa, los ciclotrones sólo se usan para

acelerar iones relativamente pesados. Entre las ventajas de los ciclotrones podemos indicar, que esta instalación trabaja en régimen permanente y puede acelerar simultáneamente muchas partículas.

### § 41.6. Sincrofasotrón

1. Para obtener partículas relativistas con energías cinéticas de decenas de gigaelectronvoltios, en la actualidad se emplean aparatos que reciben el nombre de *sincrotrones* o bien *sincrofasotrones*. El primer sincrofasotrón que acelera los protones hasta una energía cinética de 10 GeV, fue construido en 1957 en la Unión Soviética, en el Instituto Unificado de investigaciones nucleares (ciudad de Dubna). Desde entonces, en la URSS, los EE.UU. y otros países se han creado sincrofasotrones en los que los protones se aceleran hasta muy grandes valores, en constante crecimiento, de la energía cinética. Hoy día, en la Unión Soviética el más potente sincrofasotrón se ha construido en las afueras de la ciudad de Sérpujov.

2. Calculemos la cantidad máxima de movimiento y, correspondientemente, el radio máximo de la órbita de un protón en el sincrofasotrón de Sérpujov. De la correlación entre la energía y la cantidad de movimiento de una partícula (16.8), tenemos

$$p = mv = \frac{1}{c} \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2} = \frac{1}{c} \sqrt{K(K + 2\mathcal{E}_0)}.$$

La energía en reposo del protón  $\mathcal{E}_0 = 0,938$  GeV y su energía cinética en el sincrofasotrón de Sérpujov alcanza  $K = 76$  GeV. Podemos suponer con un error menor que el 1,5% que la energía cinética coincide con la total, es decir,  $\mathcal{E} = K$ , mientras que la cantidad de movimiento  $p = K/c$ . Entonces, el radio máximo de acuerdo con (41.5)

$$R = \frac{mv_{\text{máx}}}{qB} = \frac{V \sqrt{K(K + 2\mathcal{E}_0)}}{qBc} \approx \frac{K}{qBc}. \quad (41.11)$$

Con una inducción del campo en la holgura  $B = 1,07$  T,

$$R = \frac{7,6 \cdot 10^{10} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,07 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 237 \text{ m}.$$

La creación de un electroimán compacto (como en el ciclotrón) de un diámetro cerca de medio kilómetro, es un

problema que prácticamente no puede ser resuelto. Por esta causa, en el sincrofasotróon el campo magnético se crea en una cámara anular relativamente estrecha y *los protones que se aceleran se mueven por una circunferencia de radio constante*. La cámara de vacío del sincrofasotróon en la ciudad de Dubna tiene una anchura de cerca de medio metro. En Sérpujov, gracias a la aplicación de un nuevo método de enfoque del haz de protones, la anchura de la cámara es menor que 10 cm.

De esta singularidad del proceso de aceleración de protones en el sincrofasotróon, se desprende una serie de corolarios.

3. Ante todo, a diferencia del ciclotróon, en el sincrofasotróon el proceso de aceleración no puede comenzar "desde cero", es decir, en su cámara hay que introducir protones que ya sean relativistas. A la cámara del sincrofasotróon de Dubna llegan protones cuya aceleración inicial, adquirida en el acelerador lineal, alcanza una energía hasta de 9 MeV. En el sincrofasotróon de Sérpujov, la energía inicial de los protones es aún mayor: 100 MeV.

Segundo, para que al crecer la energía de las partículas el radio de la órbita no varíe, de acuerdo con (41.5) es preciso que al aumentar la cantidad de movimiento del protón, aumente la inducción del campo magnético, de forma que su razón sea una magnitud constante. Esta es la diferencia de principio entre el sincrofasotróon y el ciclotróon, en el que la inducción del campo magnético no varía en el proceso de aceleración de las partículas.

Por fin, es necesario cambiar también correspondientemente el período de variación de la polaridad de campo eléctrico de aceleración. En efecto, el período de rotación de la partícula  $T = 2\pi R/v$ . Como el radio de la órbita en el sincrofasotróon no varía, al crecer la velocidad de la partícula su período de rotación decrece. De manera análoga debe también decrecer el período de variación de la polaridad del campo eléctrico de aceleración.

4. Calculemos algunos parámetros característicos del sincrofasotróon. La energía cinética inicial del protón  $K_1 = 9$  MeV, la final  $K_2 = 10$  GeV. La inducción máxima del campo magnético en la holgura, donde se halla la cámara de vacío,  $B_{m\acute{a}x} = 1,26$  T.

El radio de la órbita se calcula según (41.11):

$$R = \frac{K_2}{ceB_{m\acute{a}x}} = \frac{10^{10} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,26 \cdot 3 \cdot 10^8} = 26,6 \text{ m.}$$

El período de rotación de la partícula

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi Rm}{p} = \frac{2\pi R\mathcal{E}}{pc^2}. \quad (41.12)$$

La cantidad de movimiento  $p = \frac{1}{c} \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2}$ , por consiguiente,

$$T = \frac{2\pi R \mathcal{E}}{c \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2}} = \frac{2\pi R}{c \sqrt{1 - \mathcal{E}_0^2/\mathcal{E}^2}}. \quad (41.13)$$

La energía inicial  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 + K_1 = 938 + 9 = 947$  MeV; el período inicial

$$T_1 = \frac{2\pi \cdot 26,6}{3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - (938/947)^2}} = 4,05 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 4,05 \text{ } \mu\text{s}.$$

Correspondientemente, la energía final  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 + K_2 = 0,938 + 10 = 10,938$  GeV y el período final

$$T_2 = \frac{2\pi \cdot 26,6}{3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - (0,938/10,938)^2}} = 0,57 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 0,57 \text{ } \mu\text{s}.$$

Así, pues, la frecuencia de variación de la diferencia de potencial de aceleración del campo eléctrico, deberá cambiar desde 0,247 MHz hasta 1,75 MHz.

El protón pasa por vuelta una vez por el campo eléctrico de aceleración con un potencial máximo de 2,2 kV. Para que su energía cinética alcance 10 GeV, el protón debe dar  $N = 10^{10}/2,2 \cdot 10^3 = 4,5 \cdot 10^6$  vueltas. Todo el ciclo de aceleración dura 3,3 s.

5. A diferencia del ciclotrón, que trabaja en ciclo permanente de aceleración, el sincrofasotrón funciona a impulsos. La cuestión radica en que a la cámara del ciclotrón se puede continuamente introducir iones que se acelerarán de modo permanente, ya que la inducción del campo magnético y el período de variación de la polaridad del campo eléctrico de aceleración no cambian durante el proceso de aceleración.

La introducción de las partículas con determinada energía en la cámara del sincrofasotrón, sólo es posible cuando el campo magnético es el mínimo, mientras que el período de variación del potencial de aceleración es el máximo. Si introducimos en la cámara las partículas con la energía prefijada en otro momento, cuando la inducción del campo magnético ha aumentado y el período de variación de la polaridad de campo de aceleración ha disminuido, dichas partículas no satisfarán la condición de sincronización y, por lo tanto, no se acelerarán.



Así, pues, en el sincrofasotrón se acelera sólo una porción determinada, o sea, un "conjunto" de partículas y hasta que el ciclo de aceleración de estas partículas no termina, no es posible introducir en la cámara una nueva porción de partículas.

6. Uno de los más importantes problemas es la aclaración de la posibilidad de crear en el sincrofasotrón un conjunto estable de partículas, que no se descomponga durante la aceleración. La posibilidad de crear semejante conjunto estable se desprende del principio de autoestabilidad de fase, descubierto en la Unión Soviética en 1944 por V. I. Véksler y en 1945 en los EE.UU. por E. Macmillan. La esencia de este principio consiste en lo siguiente.

Si en el sincrofasotrón se aceleraran sólo aquellas partículas cuya frecuencia coincide *con precisión* con la de variación del campo, no tendría sentido crear tal instalación, ya que la cantidad de semejantes partículas equilibradas es infinitamente pequeña. Véksler mostró que será acelerado un conjunto de partículas, para las que la condición de sincronización se cumple de forma aproximada:  $T_{\text{campo}} \approx T_{\text{ion}}$ . Primeramente, estas partículas se aceleran con mayor rapidez que las equilibradas y las adelantan, entonces el campo comienza a frenarlas; cuando su velocidad alcanza un valor algo menor que la de rotación de las partículas equilibradas, el campo de nuevo comienza a acelerarlas. Como resultado de este proceso, las partículas en el conjunto se aceleran, pero su energía no crece monótonamente, sino que oscila alrededor del valor de la energía de las partículas equilibradas. El número de partículas en el conjunto es mayor en varios órdenes que la cantidad de partículas equilibradas.

### § 41.7. Carga específica del electrón

1. Recibe el nombre de *carga específica* de una partícula la magnitud  $e/m_0$ , es decir, el cociente de la carga y la masa en reposo. La carga de la partícula puede ser determinada con suma precisión. Por esta causa, mediante los valores conocidos de la carga de la partícula y su carga específica, podemos calcular su masa en reposo.

Como muestra el experimento, la carga eléctrica de cualquier partícula elemental es siempre igual en magnitud absoluta a la carga del electrón (o es nula). La carga de todo ion es múltiple a la del electrón.

2. La carga específica del electrón puede ser hallada por múltiples métodos. Examinemos uno de ellos, el método de enfoque en un campo magnético longitudinal.

La instalación es un tubo oscilográfico que se ubica en el interior de un largo solenoide, que crea un campo magnético suficientemente homogéneo con inducción  $B$  (fig. 41.5). Los electrones, al desprenderse del cátodo, se aceleran en el

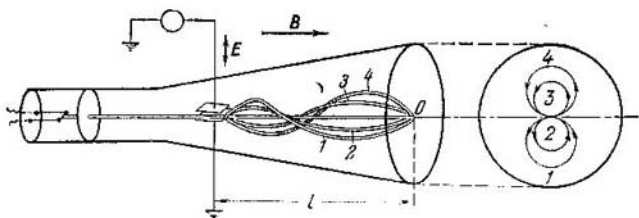


Fig. 41.5.

campo eléctrico del ánodo, cuyo potencial es igual a  $\varphi$ . La velocidad del electrón se halla de la condición  $e\varphi = mv^2/2$ .

3. Descompongamos el vector de velocidad del electrón en dos componentes: la transversal  $v_{\perp} = v \sin \alpha$  y la longitudinal  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo entre las direcciones de los vectores  $v$  y  $B$ . El campo magnético no actúa sobre la componente longitudinal; por lo tanto el recorrido del electrón a lo largo del campo

$$l = v_{\parallel} t = vt \cos \alpha.$$

Sobre la componente  $v_{\perp}$  actúa la fuerza de Lorentz, que si no existiera  $v_{\parallel}$  obligaría al electrón a moverse por una circunferencia. En fin de cuentas, el movimiento del electrón transcurre por una espiral. Para pequeños ángulos ( $\cos \alpha \approx 1$ ) las partículas se enfocarán, prácticamente, en un punto. En realidad, el enfoque surgirá a condición de que el electrón, después de pasar la distancia  $l \approx vt$ , puede pasar dicho recorrido hacia ambos lados una o varias veces, es decir, si  $t = nT_0 = 2\pi m_e n / eB$  (donde  $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Con la inducción mínima del campo, el electrón dará una vuelta, por consiguiente,  $l = 2\pi m_e v / eB$ . Poniendo  $v =$

$= \sqrt{2e \cdot \varphi / m_e}$ , obtendremos

$$\frac{e}{m_e} = \frac{8\pi^2 \varphi}{B^2 l^2}. \quad (41.14)$$

El potencial del ánodo, la inducción del campo magnético y la distancia entre los electrodos de control y la pantalla del tubo se determinan con facilidad experimentalmente o se calculan.

4. Como resultado de un análisis minucioso de todos los métodos de medición de la carga específica del electrón, se ha aceptado en la actualidad el siguiente valor

$$e/m_e = (1,7588047 \pm 0,0000049) \cdot 10^{11} \text{ C/kg.}$$

De aquí sigue, que la masa propia del electrón

$$m_{0e} = (9,109534 \pm 0,000047) \cdot 10^{-31} \text{ kg.}$$

### § 41.8. Carga específica del ion

1. Al determinar la carga específica del ion se tropieza con considerables dificultades, relacionadas con que en el haz de iones hay partículas con muy diferentes velocidades, lo que en alto grado dificulta su enfoque. Del haz hay que separar aquellos iones que tienen una misma velocidad. Con este fin, se hace uso con frecuencia del *filtro de velocidades*. En esta instalación (fig. 41.6), el vector de intensidad del campo eléctrico es perpendicular al vector de inducción del campo magnético. Sobre el ion positivo en movimiento por los campos eléctrico y magnético que se cruzan, actúan dos fuerzas: la eléctrica  $F_e = qE$ , que desplaza el ion hacia abajo, y la fuerza de Lorentz  $F_m = qvB$ , que lo desplaza hacia arriba. El ion vuela por el diafragma a ranura sólo en caso de que la dirección de su velocidad no varía; esto es posible sólo a condición de que la fuerza eléctrica equilibre la de Lorentz:  $F_e = F_m$  o bien  $qE = qvB$ . Así, pues, por el diafragma a ranura pasarán sólo aquellos iones cuya velocidad satisface la condición  $v = E/B$ . Los demás iones se filtrarán.

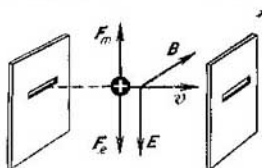


Fig. 41.6.

2. A continuación, los iones que tienen la misma velocidad se enfocan mediante campos eléctricos o magnéticos. En algunos espectrógrafos de masas, para el enfoque se emplea un campo transversal.

Después de salir del filtro de velocidades, los iones se mueven en un campo magnético transversal homogéneo. Su trayectoria es una semicircunferencia de radio  $r = mv/qB_{\perp}$

(véase (41.5)), donde  $q/m$  es la carga específica del ion\*,  $B_{\perp}$  la inducción del campo magnético transversal del espectrógrafo de masas. Como la velocidad de los iones y la inducción del campo magnético son magnitudes prefijadas, el radio de la semicircunferencia se define por completo mediante la carga específica del ion. Los haces con diversos valores de la carga específica del ion se enfocan en diversos puntos.

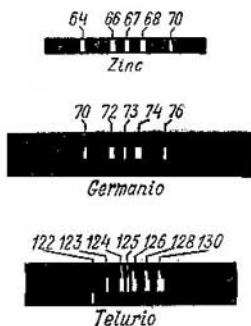


Fig. 41.7.

3. Si ubicamos en el lugar de enfoque de los haces una placa fotográfica, es posible obtener el llamado *espectro de masas* (las huellas de estos haces, fig. 41.7).

De la correlación  $q/m = v/rB_{\perp}$  se deduce que el desplazamiento de la huella del haz en el espectro de masas del punto de entrada del haz, es razón inversa de la carga específica del ion.

Para determinar la carga específica de cierto ion, primeramente hay que establecer en el espectrograma de masas las líneas de referencia con ayuda de haces de iones con carga específica conocida. Por regla, con este fin se hace uso de los iones de carbono u oxígeno.

Por medio del espectrógrafo de masas fue demostrado que muchas sustancias son mezclas de *isótopos* (§ 88.1). En la fig. 41.7 se muestra el espectrograma de masas de los isótopos de zinc, en los que las masas de los núcleos están relacionadas como 64 : 66 : 67 : 68 : 70, así como los espectrogramas de masas de germanio y telurio.

\* En los experimentos con iones  $v \ll c$  y  $m \approx m_0$ .

## § 41.9. Conductor con corriente en el campo magnético

1. La práctica muestra que sobre un conductor con corriente, ubicado en un campo magnético, actúa una fuerza cuya dirección se determina por la regla de la mano izquierda, la misma que sirve para determinar la dirección de la fuerza de Lorentz. La causa de la aparición de dicha fuerza está completamente clara. La corriente en el conductor es el movimiento ordenado de electrones. Sobre cada electrón en movimiento, el campo magnético actúa con una fuerza  $f = evB \sin \alpha$  (véase (41.1)). La fuerza que actúa sobre todo el conductor, es la suma vectorial de las fuerzas elementales de Lorentz que actúan sobre cada electrón.

2. El cálculo de esta fuerza, llamada *de Ampère*, en el caso general es muy dificultoso. Calculemos la fuerza con la que un campo magnético homogéneo de inducción  $B$  actúa sobre un conductor rectilíneo con corriente.

En estas condiciones, todos los electrones se mueven en una misma dirección, por lo que todas las fuerzas elementales de Lorentz, que actúan sobre electrones aislados, están dirigidas hacia un lado y, por lo tanto, en lugar de la suma vectorial pueden ser sumados los módulos de todas las fuerzas elementales. Si la velocidad media de los electrones es igual a  $\bar{v}$ , la longitud del conductor  $l$  y su sección  $S$ , la fuerza de Ampère

$$F = Nf = nSl \cdot \bar{v}B \sin \alpha.$$

Poniendo el valor de la intensidad de corriente según (39.17), obtenemos

$$F = ilB \sin \alpha, \quad (41.15)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre el conductor y el vector de inducción. La dirección de la fuerza de Ampère se determina por la regla de la mano izquierda (véase la fig. 41.1); la dirección de la corriente coincide con la del movimiento de las cargas positivas.

3. Halleemos la fuerza con la que dos conductores muy largos rectilíneos y paralelos actúan entre sí. Supongamos que la longitud de cada uno de los conductores  $l$  es mucho mayor que la distancia entre ellos  $a$ ; por los conductores pasa una corriente de intensidad  $i$ . Cada uno de los conductores, a una distancia  $a$  crea un campo magnético, cuya inducción con la condición  $l \gg a$ , puede ser calculada según la fórmula para la inducción del campo magnético de un conductor recto, infinitamente largo, con corriente (§ 40.7). Precisamente este

campo actúa sobre el segundo conductor con la fuerza de Ampère. Sustituyendo (40.31) en (41.15) y teniendo en cuenta que aquí  $\alpha = \pi/2$ , tendremos

$$F = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi a}.$$

Sobre la base de esta fórmula se introduce la definición de la unidad de intensidad de corriente en el Sistema Internacional de unidades:

El amperio es igual a la intensidad de una corriente invariable, que al pasar por dos conductores rectilíneos paralelos de longitud infinita y de área insignificante de sección transversal redonda, ubicados en el vacío a la distancia de 1 m el uno del otro, provocaría en cada sector de un conductor de 1 m de longitud una fuerza de interacción igual a  $2 \cdot 10^{-7}$  N.

Recomendamos al lector, que por su cuenta, se cerciore de que al pasar las corrientes en iguales direcciones los conductores se atraen, mientras que en direcciones opuestas, se repelen.

### § 41.10. Cuadro con corriente en el campo magnético

1. Ubiquemos en un campo magnético homogéneo un cuadro rectangular con corriente, de forma que el ángulo entre la dirección de la normal al cuadro y el vector de inducción magnética sea igual a  $\alpha$  (fig. 41.8, a). Haciendo uso de

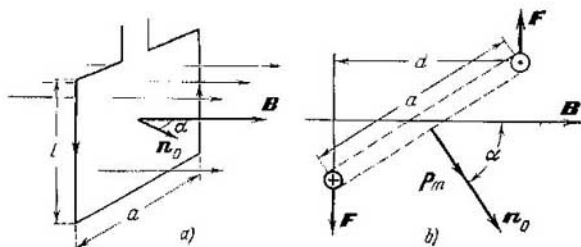


Fig. 41.8.

la regla de la mano izquierda, es fácil cerciorarse de que las fuerzas que actúan sobre los sectores del cuadro, perpendiculares al vector de inducción, crean un momento rotativo. Para calcular el valor de dicho momento, dirijámonos a la fig. 41.8, b, donde está representada la sección transversal del cuadro.

2. El momento del par de fuerzas, de acuerdo con la fórmula (22.14), es igual al producto de la fuerza de Ampère

por el brazo  $d$ :

$$M = Fd = Fa \operatorname{sen} \alpha,$$

donde  $a$  es la anchura del cuadro. Poniendo el valor de la fuerza de Ampère de (41.15)

$$M = iBa \operatorname{sen} \alpha = i S B \operatorname{sen} \alpha, \quad (41.16)$$

donde  $S = al$  es el área del cuadro. Según (40.23) el producto de la corriente por el área, contorneada por ésta, es el momento magnético del cuadro  $p_m$ . Así, pues,

$$M = p_m B \operatorname{sen} \alpha. \quad (41.17)$$

3. Comparando las expresiones (37.10) y (41.17), vemos que son en absoluto análogas. En el § 40.6 fue aclarado que un cuadro con corriente crea a su alrededor un campo magnético, semejante al campo de un dipolo eléctrico.

De esta manera, observamos una extensa analogía entre las propiedades del dipolo eléctrico  $p_e = ql$  y el "dipolo magnético"  $p_m = iSn_e$ , es decir, de un cuadro con corriente. Sobre esta base, sin demostración, haciendo sólo uso de la analogía, podemos según la fórmula (37.12), escribir la expresión para la energía del "dipolo magnético":

$$\mathcal{E} = -p_m B \cos \alpha. \quad (41.18)$$

Empleando esta misma analogía podemos afirmar que en un campo magnético heterogéneo, un cuadro con corriente será atraído a la región del campo más fuerte. La experiencia confirma esta suposición. La fuerza de atracción, según (37.41), es igual a

$$F = p_m \Delta B / \Delta l. \quad (41.19)$$

Ésta es proporcional al momento magnético del cuadro y al gradiente de la inducción del campo magnético.

## Capítulo 42

### SUSTANCIAS MAGNÉTICAS

#### § 42.1. Tres tipos de sustancias magnéticas

1. El lector sabe que sobre un trozo de hierro ubicado en el entorno de una bobina con corriente, actúa una considerable fuerza de atracción. También es conocido, que la

fuerza de interacción entre dos bobinas con corriente crece notoriamente si en su interior se coloca un núcleo de hierro. También poseen semejantes propiedades, además del hierro, diversas clases de aceros, así como el níquel, cobalto y algunas otras aleaciones: permalloy, alnico, magnico. Todas estas sustancias reciben el nombre de *ferromagnéticas*.

En la década del cincuenta del siglo pasado, Faraday mostró que todas las sustancias tienen propiedades magnéticas, pero el grado y el carácter de su interacción con el campo es distinto para diferentes materias. En relación con esto, distinguimos las sustancias con propiedades paramagnéticas, diamagnéticas y ferromagnéticas.

Por la intensidad de su interacción con el campo magnético, todas las sustancias pueden dividirse en dos clases.

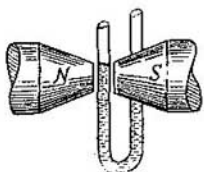


Fig. 42.1.



Fig. 42.2.

A las sustancias de débil magnetismo, se refieren todas las sustancias diamagnéticas y paramagnéticas, que a cualesquiera temperaturas interaccionan muy débilmente con el campo magnético. A las sustancias fuertemente magnéticas se refieren las sustancias ferromagnéticas y antiferromagnéticas, que a determinadas temperaturas interactúan fuertemente con el campo.

2. Reciben el nombre de *paramagnéticas* las sustancias que se atraen a la región del campo más fuerte. Si en un tubo de vidrio en U se echa un líquido paramagnético y una de sus ramas se ubica entre los polos de un electroimán fuerte, en esta rama el líquido asciende (fig. 42.1). Una barra de material paramagnético, colgada de un fino hilo, se orienta en el campo magnético a lo largo de las líneas de fuerza.

Por sus propiedades, las sustancias paramagnéticas recuerdan en cierto grado a las ferromagnéticas, pero la fuerza de su interacción con el campo es centenas y miles de veces



más débil. Por esta causa, para observar los efectos paramagnéticos son necesarios campos magnéticos muy fuertes. Tienen propiedades paramagnéticas el platino, aluminio, tungsteno, todos los metales alcalinos y alcalinotérreos; entre los gases el oxígeno y en débil grado, el óxido nítrico.

3. Denomínase *diamagnéticas* las sustancias que se expulsan del campo magnético. Por ejemplo, si entre los polos de un electroimán se enciende una vela, su llama será expulsada del campo (fig. 42.2). Una barrita de sustancia diamagnética, suspendida de un hilo en un campo magnético fuerte, se establece a través de las líneas de fuerza.

Señalemos, que las fuerzas que actúan sobre la sustancia diamagnética en un campo magnético son en uno-dos órdenes menores que las fuerzas que lo hacen sobre la materia paramagnética en ese mismo campo. Por esta causa, para observar los efectos diamagnéticos se requieren campos magnéticos muy fuertes. Entre las sustancias diamagnéticas podemos enumerar todos los gases (salvo el oxígeno), el agua, la plata, el oro, cobre, diamante, grafito, bismuto y muchos compuestos orgánicos.

### § 42.2. Momento magnético del átomo

1. A principios del siglo XIX, Ampère llegó a conclusión de que las propiedades magnéticas de la materia pueden ser explicadas si se supone que los átomos son imanes elementales microscópicos. No obstante, Ampère no pudo fundamentar el origen de los momentos magnéticos elementales. El modelo nuclear de la estructura del átomo, del que ya hicimos uso para explicar el mecanismo de la polarizabilidad deformativa (§ 38.5), nos ayudará a comprender el origen de los momentos magnéticos del átomo. En efecto, circulando por el átomo, el electrón es de por sí una corriente elemental que posee un momento magnético  $p_m^{\text{orb}}$ . Además, el electrón que circula por la órbita tiene un momento cinético, llamado *momento cinético orbital*  $L^{\text{orb}}$ . De acuerdo con (40.28) entre estas dos magnitudes debe existir la siguiente relación:

$$p_m^{\text{orb}} = \frac{e}{2m_e} L^{\text{orb}}. \quad (42.1)$$

Aquí,  $m_e$  es la masa en reposo del electrón,  $e$ , su carga.

El momento magnético del átomo se forma de los momentos magnéticos de los electrones que giran alrededor

del núcleo. Sin embargo, la práctica nos muestra que el momento magnético del núcleo es, aproximadamente, 2000 veces menor que el del electrón (§ 80.2). Por esta razón, al estudiar las propiedades magnéticas de la sustancia, se desprecia el momento magnético de núcleo y se considera que *el momento magnético del átomo* es igual a la suma vectorial de los momentos magnéticos de los electrones que circulan alrededor del núcleo. Intentemos apreciar la magnitud de este momento magnético.

2. Supongamos que en el espacio se ha destacado cierta dirección, por ejemplo, el eje  $z$ . Esto puede significar que a lo largo de este eje está dirigido cierto campo magnético. En la mecánica cuántica se demuestra que la proyección del momento cinético orbital sobre la dirección prefijada, puede tomar sólo ciertos valores determinados en absoluto:

$$L_z^{\text{orb}} = m\hbar, \quad (42.2)$$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck,  $m$ , un número entero (§ 72.4). Haciendo uso de la correlación (42.1), para la proyección del momento magnético orbital, que designaremos por  $\mu_{mz}^{\text{orb}}$ , obtendremos el siguiente valor:

$$\mu_{mz}^{\text{orb}} = \frac{e}{2m_e} L_z^{\text{orb}} = m \frac{e\hbar}{2m_e} = m\mu_B. \quad (42.3)$$

### 3. La magnitud

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = (9,274078 \pm 0,000036) \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (42.4)$$

recibe el nombre de *magnetón de Bohr*. Está constituida por las constantes naturales, es decir, carga y masa del electrón y constante de Planck y, por lo tanto, también es una constante natural.

El magnetón de Bohr es el valor mínimo, diferente del cero, de la proyección del momento magnético del electrón por una dirección tomada al azar. Pero como el momento magnético del átomo es igual a la suma vectorial de los momentos magnéticos de los electrones, podemos afirmar que la proyección del momento magnético del átomo sobre cierto eje bien es igual a cero, o bien es múltiple al magnetón de Bohr. Más abajo veremos que los experimentos confirman esta apreciación.

### § 42.3. Magnitudes que caracterizan el campo magnético en la sustancia

1. Para caracterizar el grado de polarización de un dieléctrico en el campo eléctrico, fue introducida una magnitud física especial, o sea, el vector de polarización, igual al momento dipolar de la unidad de volumen de un dieléctrico polarizado (§ 38.2). De forma análoga, introduzcamos una magnitud que caracterice el grado de imanación de la sustancia en el campo magnético, es decir, el vector de imanación.

Recibe el nombre de *vector de imanación*  $M$  el momento magnético de la unidad de volumen de una sustancia imanada. Para calcularlo, hay que hallar la suma vectorial de los momentos magnéticos de todos los átomos contenidos en la unidad de volumen de la sustancia imanada. Para simplificar los razonamientos, supongamos que la sustancia es homogénea y todos sus átomos tienen un mismo momento magnético  $p_m$ . Entonces, el vector de imanación

$$M = \frac{N p_m}{V} = n p_m, \quad (42.5)$$

donde  $n$  es la concentración de los átomos. La unidad de imanación coincide con la de intensidad del campo magnético:

$$[M] = [N p_m / V] = A \cdot m^2 / m^3 = A / m = [H].$$

2. Limitémonos a considerar el caso más sencillo, cuando una sustancia homogénea e isotrópica rellena el campo magnético. Esto puede ser realizado, si sobre el núcleo toroidal del material que investigamos se enrolla un arrollamiento por el que fluye la corriente. Como es natural, la sustancia del núcleo se imanará a cuenta de la acción del campo magnético de la corriente.

Resulta, que si la sustancia es paramagnética o diamagnética, el vector de imanación será proporcional a la intensidad de campo de imanación (§§ 42.4, 42.5):

$$M = \kappa_m H. \quad (42.6)$$

El coeficiente de proporcionalidad  $\kappa_m$  en la expresión (42.6) denominase *susceptibilidad magnética* de la materia. El lector se cerciorará con facilidad de que la susceptibilidad magnética es una magnitud adimensional.

3. El vector de imanación determina la inducción del campo magnético  $B_{\text{sub}}$  creado por la sustancia imanada. Por

analogía con la ligazón entre la inducción del campo de las corrientes y la intensidad de dicho campo ( $B_{\text{corr}} = \mu_0 H$ ), escribiremos la correlación entre la inducción del campo de la sustancia y su imanación:  $B_{\text{sus}} = \mu_0 M$ .

La inducción del campo magnético en la sustancia, que rellena por completo el campo magnético, es cierta suma de las inducciones del campo de las corrientes de imanación y del campo de la sustancia imanada:

$$B = B_{\text{corr}} + B_{\text{sus}} = \mu_0 (H + M). \quad (42.7)$$

Basándonos en (42.6), tenemos

$$B = \mu_0 (H + \kappa_m H) = \mu_0 (1 + \kappa_m) H = \mu_0 \mu H. \quad (42.8)$$

La magnitud

$$\mu = 1 + \kappa_m \quad (42.9)$$

es llamada *permeabilidad magnética* de la materia.

#### § 42.4. Diamagnetismo

1. Intentemos aclarar el mecanismo del efecto diamagnético. Para el análisis hagamos uso del modelo del átomo de helio. El núcleo de este átomo tiene una carga  $q = +2e$  y alrededor del núcleo giran dos electrones. La experiencia muestra que el átomo de helio no tiene momento magnético. Esto puede ser explicado al suponer que los dos electrones giran alrededor del núcleo a igual velocidad por órbitas idénticas, pero en direcciones opuestas. Entonces, sus momentos magnéticos orbitales serán iguales en magnitud, pero de signo opuesto y el momento magnético sumario del átomo resulta ser nulo (fig. 42.3).

2. Ubiquemos el átomo de helio en un campo magnético de inducción  $B_0 = \mu_0 H$ . Para simplificar los razonamientos, supongamos que el vector de inducción es perpendicular al plano de la órbita del electrón (fig. 42.4). En este caso, sobre el electrón actúan dos fuerzas: la de Coulomb de atracción del núcleo y la de Lorentz. La resultante comunica al electrón aceleración centrífuga. Las ecuaciones de los movimientos para los dos electrones toman el aspecto

$$F_{\text{Coul}} - F_{\text{Lor}}^{(1)} = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - ev_1 B_0 = \frac{mv_1^2}{r}, \quad (42.10)$$

$$F_{\text{Coul}} + F_{\text{Lor}}^{(2)} = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + ev_2 B_0 = \frac{mv_2^2}{r}.$$

Hay que prestar atención al hecho de que en estas ecuaciones suponemos que bajo la acción del campo magnético, sólo varía la velocidad de movimiento del electrón, pero que no cambia el radio de la órbita.

3. De las ecuaciones (42.10) se desprende que por la acción del campo magnético, la velocidad de movimiento del primer electrón disminuyó, la del segundo, creció. De manera correspondiente varían sus momentos magnéticos. Esto

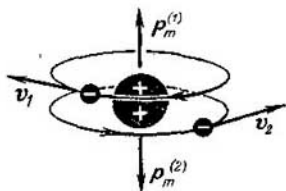


Fig. 42.3.

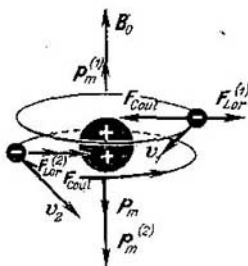


Fig. 42.4.

quiere decir que a causa del influjo del campo magnético externo al átomo se le induce un momento magnético:

$$p_m = p_m^{(2)} - p_m^{(1)} = \frac{ev_2 r}{2} - \frac{ev_1 r}{2} = \frac{er}{2} (v_2 - v_1). \quad (42.11)$$

Señalemos que el momento magnético inducido  $p_m$  está dirigido en sentido opuesto a la dirección del vector de inducción del campo externo (fig. 42.4).

La diferencia de velocidades será hallada de (42.10), si restamos de la igualdad inferior la superior:

$$eB_0(v_2 + v_1) = \frac{m}{r} (v_2^2 - v_1^2),$$

o bien, después de simplificar

$$v_2 - v_1 = eB_0 r / m = er\mu_0 H / m. \quad (42.12)$$

Poniendo esta igualdad en (42.11), obtenemos para el momento magnético inducido

$$p_m = e^2 r^2 \mu_0 H / 2m. \quad (42.13)$$

Tomando en consideración que los vectores  $p_m$  y  $H$  tienen direcciones opuestas, reescribimos (42.13) en forma vectorial:

$$p_m = -\frac{e^2 r^2 \mu_0}{2m} H. \quad (42.14)$$

4. El vector de imanación, según (42.5), es igual a

$$M = n p_m = -\frac{e^2 r^2 n \mu_0}{2m} H. \quad (42.15)$$

Así, pues, aquí el vector de imanación es en realidad proporcional a la tensión del campo de imanación (véase (42.6)). La susceptibilidad magnética es una magnitud negativa:

$$\chi_m = \frac{e^2 r^2 n \mu_0}{2m}.$$

Apreciemos la magnitud de la susceptibilidad magnética del helio. El radio de la órbita  $r = 0,5 \cdot 10^{-10}$  m, la concentración de átomos a presiones corrientes  $n = 2,69 \times 10^{25}$  m<sup>-3</sup>. Obtenemos

$$\chi_m = -\frac{1,6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 0,5^2 \cdot 10^{-20} \cdot 2,69 \cdot 10^{25} 4\pi}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^7} = -1,2 \cdot 10^{-9}.$$

Según los experimentos, el valor de la susceptibilidad magnética del helio  $\chi_m = -1,05 \cdot 10^{-9}$ . Teniendo en cuenta el carácter en extremo aproximado de nuestro modelo, hay que reconocer que semejante coincidencia del cálculo y el experimento es satisfactoria.

5. Mediante el modelo del átomo de helio hemos conseguido explicar el mecanismo de los fenómenos diamagnéticos. Generalizando, podemos afirmar que son diamagnéticas todas aquellas sustancias en las que cuando no hay campo magnético externo los átomos carecen de momento magnético.

Como los radios de las órbitas de los electrones no se diferencian en mucho en los átomos de diversas sustancias, las susceptibilidades magnéticas de distintas materias, en un mismo estado de agregación, son aproximadamente iguales. Por ejemplo, la susceptibilidad magnética del nitrógeno es igual a  $-6,76 \cdot 10^{-9}$ , del argón  $-10,9 \cdot 10^{-9}$ , del hidrógeno  $-2,25 \cdot 10^{-9}$ , etc. En los líquidos y sólidos la concentración de los átomos es unas 1000 veces mayor y, por lo tanto, también crece su susceptibilidad magnética. Así, la del agua es igual a  $-9 \cdot 10^{-6}$ , de la plata  $-25 \cdot 10^{-4}$ , etc.

## § 42.5. Paramagnetismo

1. El mecanismo de imanación de las sustancias diamagnéticas, que hemos examinado en el párrafo anterior, se reduce a la inducción al átomo de un momento magnético complementario, bajo la acción del campo magnético externo. Este fenómeno es característico para los átomos de cualquier sustancia, por consiguiente, todas las sustancias deben tener propiedades diamagnéticas. ¿Qué son entonces las sustancias paramagnéticas?

Resulta que a diferencia de las sustancias diamagnéticas, en las que los momentos magnéticos de los electrones dentro del átomo están compensados, las sustancias paramagnéticas tienen los momentos magnéticos no compensados. Bajo la acción del campo magnético externo, dichos momentos magnéticos giran, tendiendo a disponerse a lo largo de las líneas de fuerza. Como es lógico, el movimiento térmico viola este orden.

Como vemos, el mecanismo de imanación de las sustancias paramagnéticas es por completo análogo al mecanismo de polarización de los dieléctricos con moléculas polares (§ 38.6). Si razonamos del mismo modo que lo hicimos al deducir la fórmula (38.25), obtendremos la expresión para la imanación de las sustancias paramagnéticas:

$$M = \frac{n p_m^2 B_0}{3kT} = \frac{n p_m^2 \mu_0}{3kT} H. \quad (42.16)$$

2. La susceptibilidad magnética de las sustancias paramagnéticas es una magnitud positiva:

$$\chi_m = \frac{n p_m^2 \mu_0}{3kT}.$$

Como vemos, con una concentración invariable de los átomos (es decir, con densidad constante de la sustancia), la susceptibilidad magnética de las sustancias paramagnéticas varía en razón inversa a la temperatura absoluta (*ley de Curie*):  $\chi_m = \text{const}/T$ . Este fenómeno se confirma de modo experimental.

Señalemos que la expresión (42.16) es válida a condición de que  $p_m B_0 / kT \ll 1$ , o sea, si la energía del dipolo en el campo magnético  $\mathcal{E}_m = p_m B_0$  es mucho menor que la energía del movimiento térmico de la partícula  $\bar{\epsilon} = kT$ . Pero como  $p_m \approx \mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , mientras que la

inducción máxima posible del campo magnético  $B_{\text{máx}} \approx \approx 1,3 \text{ T}$ , a la temperatura ambiente esta condición siempre se cumple. Sólo a muy bajas temperaturas se puede obtener  $p_m B_0 / kT \approx 1$ ; con este fin, la sustancia paramagnética se debe enfriar hasta la temperatura

$$T \approx \frac{p_m B_0}{k} = \frac{\mu_B B_{\text{máx}}}{k} = \frac{9,27 \cdot 10^{-24} \cdot 1,3}{1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 1 \text{ K},$$

es decir, próxima al cero absoluto. En semejante caso la imanación de la sustancia paramagnética será cercana a la de saturación, ya que todos los momentos magnéticos de los átomos se dispondrán a lo largo del campo, mientras que el débil movimiento térmico no puede destruir dicho orden.

3. Apreciemos el valor de la susceptibilidad magnética de las sustancias paramagnéticas a la temperatura ambiente. Para los gases  $n = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ ; haciendo  $T \approx 300 \text{ K}$ , obtenemos

$$\chi_m \approx \frac{2,69 \cdot 10^{25} \cdot 9,27^2 \cdot 10^{-48} \cdot 4\pi}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 10^7} \approx 2,3 \cdot 10^{-7}.$$

El experimento nos da para el oxígeno a  $20^\circ \text{ C}$  un valor de la susceptibilidad magnética igual a  $18,6 \cdot 10^{-7}$ , para el óxido nítrico (NO),  $0,8 \cdot 10^{-7}$ . Para las sustancias paramagnéticas sólidas, la susceptibilidad debería ser, aproximadamente, 1000 veces mayor. El experimento nos da para el platino  $2,6 \cdot 10^{-4}$ , el sodio  $8,3 \cdot 10^{-5}$ , el litio  $2,3 \cdot 10^{-5}$ , y para otros materiales, valores mucho más pequeños.

Así, pues, la susceptibilidad magnética de las sustancias paramagnéticas es unas cien veces mayor que la de las sustancias diamagnéticas. Esto nos permite explicar, por qué causa en las sustancias paramagnéticas no se manifiestan las propiedades diamagnéticas. Resulta que el fuerte efecto paramagnético sobrecubre el débil diamagnético.

## § 42.6. Ferromagnetismo. Punto de Curie

1. A diferencia de las sustancias paramagnéticas y diamagnéticas, en las que el vector de imanación es proporcional a la intensidad del campo magnetizante, en las sustancias ferromagnéticas la imanación es una complicada función no lineal de la intensidad. La fig. 42.5 nos ofrece dicha dependencia para el níquel. Para que la representación sea más cómoda está violada la escala: la región de la intensidad



del campo de  $0.1 \cdot 10^3$  a  $2 \cdot 10^3$  A/m está extendida. Como vemos en la figura, la imanación del níquel crece primeramente con rapidez al aumentar la intensidad del campo magnético. A continuación, se alcanza la saturación magnética, cuando la imanación deja ya de depender prácticamente de la magnitud del campo magnetizante.

2. Como la imanación de la sustancia ferromagnética no es proporcional a la intensidad del campo magnetizante, las expresiones (42.6) y (42.8) pierden su sentido. Sin embargo, de manera formal, podemos hacer uso de ellas, to-

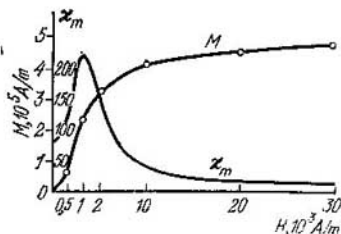


Fig. 42.5.

mando en consideración que para las sustancias ferromagnéticas, la susceptibilidad magnética  $\chi_m = M/H$  y la permeabilidad magnética  $\mu = B/\mu_0 H$  no son magnitudes constantes, sino que funciones bastante complicadas de la intensidad de campo magnetizante.

3. La siguiente importante distinción de las sustancias ferromagnéticas consiste en que si las propiedades paramagnéticas y diamagnéticas de la sustancia se manifiestan con cualquier estado de agregación, las ferromagnéticas sólo se observan en los cristales. En estado líquido o gaseoso, las sustancias ferromagnéticas se comportan como corrientes sustancias paramagnéticas. De aquí sigue, que las propiedades ferromagnéticas de ciertas sustancias, son determinadas no por propiedades singulares de sus átomos —éstos en nada se diferencian de los de las sustancias paramagnéticas—, sino que por la estructura especial de su red cristalina. Al cambiar la estructura de la red, también deben variar las propiedades magnéticas de las sustancias ferromagnéticas. Esto se confirma experimentalmente.

Resulta que para cada sustancia ferromagnética hay una temperatura determinada, *punto de Curie*, sobre la cual las propiedades ferromagnéticas desaparecen y la materia se convierte en una corriente sustancia paramagnética. Para el hierro el punto de Curie constituye  $770^{\circ}\text{C}$ , para el níquel,  $360^{\circ}\text{C}$ , mientras que para el permalloy (aleación del 70% de Fe y 30% de Ni), sólo  $70^{\circ}\text{C}$ .

4. Como mostró L. D. Landáu, el punto de Curie para las sustancias ferromagnéticas corresponde a la temperatura de la transición de fase de segundo género.

Durante las transiciones de fase de primer género varía la estructura de la materia; por ejemplo, al fundir un cristal el orden de largo alcance cambia por la ordenación próxima. Como resultado, varía la energía interna y la entropía del cuerpo, lo que requiere cierta energía, es decir, el calor de transición de fase (véase el cap. 36). Las transiciones de fase de segundo género, por ejemplo la desaparición de las propiedades ferromagnéticas de la sustancia al pasar tras

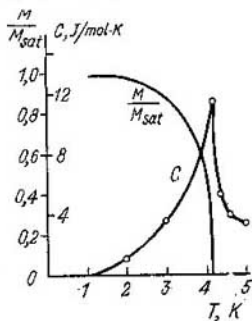


Fig. 42.6.

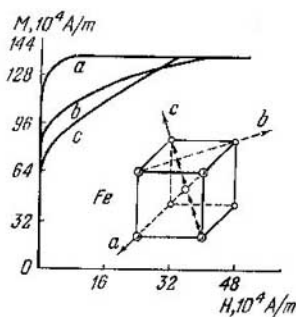


Fig. 42.7.

el punto de Curie, no se acompañan por el cambio del estado de agregación. En particular, la red cristalina no se destruye en este caso, aunque varía el tipo de simetría de ésta. Como resultado, las transiciones de fase de segundo género no están acompañadas por la variación de la entropía y la energía interna del cuerpo, por lo que aquí tampoco hay calor de transición de fase.

Landáu mostró que durante las transiciones de fase de segundo género, por salto cambian también tales características de la sustancia como la capacidad calorífica, el coeficiente de dilatación térmica, la compresibilidad, etc., lo que se confirma experimentalmente. En la fig. 42.6 se muestran las gráficas de variación de la imanación y la capacidad calorífica de cierta sustancia. Como vemos, a una temperatura de  $4,2 \text{ K}$  la imanación disminuye de modo brusco; por

lo tanto, esta temperatura corresponde al punto de Curie para la sustancia dada. A esta temperatura la capacidad calorífica en un principio crece con rapidez y después decrece.

5. El ferromagnetismo sólo es propio de los cristales y, como sabemos, éstos poseen anisotropía (§ 32.1), por lo que un monocristal de una sustancia ferromagnética debe tener anisotropía de imanación, o sea, sus propiedades magnéticas deben ser diferentes en distintas direcciones. Esta suposición se confirma por el experimento.

En la fig. 42.7 están representadas las gráficas de imanación de un monocristal de hierro, con red del tipo de cubo centrado por el volumen (§ 33.4). Resulta que por la dirección de la arista del cubo, la imanación de la sustancia, para el valor dado de la intensidad del campo, es la mayor (*a*), es menor por la dirección de la diagonal de la cara (*b*), mientras que la menor imanación se manifestará por la diagonal espacial del cubo (*c*). Por esta causa, la arista del cubo recibe el nombre de dirección de fácil imanación, en tanto que la diagonal del cubo, dirección de difícil imanación.

Es natural que en un policristal no se manifiesta la anisotropía de imanación, ya que los microcristales aislados están orientados caóticamente (§ 32.2).

### § 42.7. Histéresis

1. Una propiedad característica de las sustancias ferromagnéticas es la *histéresis*. El fenómeno consiste en que la imanación de la sustancia ferromagnética no sólo depende de la intensidad del campo magnetizante en el momento dado, sino que también de la imanación previa del modelo. Por esta razón, no se puede indicar qué imanación de la sustancia ferromagnética corresponde al valor dado de la intensidad del campo magnetizante, si no sabemos en qué estado se encontraba hasta dicho momento. Como es lógico, esto también se refiere a los valores de la susceptibilidad y permeabilidad magnéticas.

La gráfica de la fig. 42.5 caracteriza la marcha de la imanación previa, cuando la sustancia ferromagnética fue, primeramente, calentada por encima del punto de Curie y, por lo tanto, fue desimanada por completo y, a continuación, enfriada e imanada. La curva de imanación tendrá un espec-

to completamente diferente, si la sustancia ferromagnética estaba de antemano imanada.

2. Fabriquemos un núcleo de forma toroidal de una sustancia ferromagnética desimanada y enrollémosla uniformemente con un conductor. Variando la corriente en el arrollamiento, cambiaremos al mismo tiempo la intensidad de campo magnetizante. Sea que la intensidad del campo aumenta hasta el valor  $H_s$  (fig. 42.8). A este valor del campo

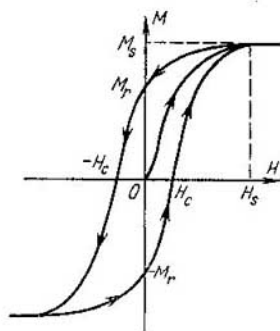


Fig. 42.8.

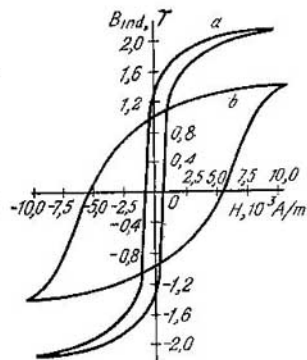


Fig. 42.9.

le corresponde la imanación de saturación, igual a  $M_s$ . Disminuyamos la corriente en el arrollamiento, con lo que decrecerá la intensidad de campo magnetizante. Nos cercioraremos de que la imanación del núcleo durante la desimanación será todo el tiempo mayor que durante el proceso de imanación.

Cuando la corriente en el arrollamiento sea igual a cero, también desaparecerá el campo imanador. Pero la imanación de la sustancia ferromagnética no se reducirá a cero, el núcleo conservará cierta *imanación remanente*  $M_r$ . Sólo en el caso, cuando por el arrollamiento pase una corriente en dirección opuesta y se cree un campo con intensidad  $-H_c$ , la imanación del núcleo se reducirá a cero. La intensidad del campo desimanador  $H_c$  es llamada *fuerza coercitiva*.

La curva que nos ofrece la fig. 42.8 recibe el nombre de *ciclo de histéresis* (o *lazo de histéresis*).

3. En función de la composición química del material, así como del carácter del tratamiento térmico y del maquinado de éste (temple, revenido, laminado, estampado en frío, etc.) hay materias ferromagnéticas con diferentes propiedades. Las sustancias con pequeños valores de la fuerza coercitiva se denominan materiales magnéticos "blandos", los materiales con grandes fuerzas coercitivas, "duros". En la fig. 42.9 están representados los lazos de histéresis de dos materiales: de hierro magnéticamente blando (*a*) y de acero templado altamente coercitivo (*b*).

La forma de la curva de histéresis determina la región de aplicación de una u otra sustancia ferromagnética. Los materiales magnéticamente blandos se emplean para construir núcleos de los electroimanes, en los que es importante tener un gran valor de la inducción máxima del campo y pequeña fuerza coercitiva. Estos mismos materiales se utilizan como núcleos de los transformadores y en las máquinas de corriente alterna (generadores, motores): gracias a su pequeña fuerza coercitiva éstos se reimanan con facilidad. Semejantes requisitos se presentan a los núcleos de los imanes de los aceleradores.

Los materiales magnéticamente duros son utilizados para fabricar imanes permanentes. Gracias al gran valor de la fuerza coercitiva e imanación remanente relativamente grande, estos imanes pueden crear tiempo prolongado fuertes campos magnéticos.

Los imanes permanentes fabricados de aleaciones altamente coercitivas, se emplean en los instrumentos de medida magnetoeléctricos, en los altavoces electrodinámicos y los micrófonos, en pequeños generadores (por ejemplo, para bicicletas), en microelectromotores, etc.

### § 42.8. Estructura por dominios de las sustancias ferromagnéticas

1. Siguiendo la teoría clásica de ferromagnetismo, propuesta por P. Weiss, podremos explicar las singularidades de las sustancias ferromagnéticas. De acuerdo con dicha teoría, a temperaturas inferiores al punto de Curie, la sustancia ferromagnética consta de regiones microscópicas, denominadas *dominios*, en cada uno de las cuales los mo-

mentos magnéticos de los átomos están dispuestos rigurosamente en una misma dirección, correspondiente al sentido de una ligera imanación (§ 42.6). De esta forma, cada uno de los dominios esta imanado hasta la saturación independientemente de si hay o no campo magnético externo y de su magnitud.

Las dimensiones de los dominios alcanzan  $10^{-2} \dots 10^{-3}$  cm, por lo que éstos pueden ser observados con un microscopio. Para poder observar los dominios, sobre la

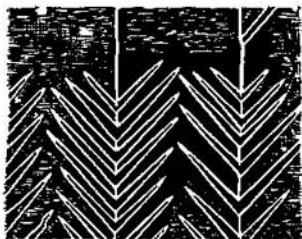


Fig. 42.10.

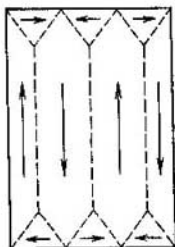


Fig. 42.11.

superficie pulida de la sustancia ferromagnética se echa una gota de aceite, en la que están suspendidas diminutas partículas de polvo ferromagnético (método de Akúlov—Bitter). Las partículas de polvo ferromagnético se concentran por los límites de los dominios, donde el campo magnético es más heterogéneo (fig. 42.10).

Quando no hay campo magnético externo, en un monocristal los dominios se disponen de modo que sus campos magnéticos se cierran entre sí, mientras que el campo externo sumario resulta ser nulo. En la fig. 42.11 estos dominios están representados de forma esquemática. Las direcciones de los vectores de imanación dentro de los dominios se muestran con flechas. Como indicaran L. D. Landáu y E. M. Lífshits, semejante sistema de dominios en un monocristal caracteriza el estado con la energía mínima del campo magnético, lo que según la termodinámica asegura el equilibrio estable de este sistema.

2. Basándonos en estas representaciones vamos a explicar el mecanismo de imanación de un modelo policristalino. El policristal consta de granos aislados, en los que las direcciones de imanación ligera están orientadas en desorden. Cada grano está dividido en varios dominios dirigidas a lo largo de la línea de imanación ligera (fig. 42.12, a).

Al conectar un campo magnético débil, siempre habrá múltiples dominios, en los que la dirección del vector de

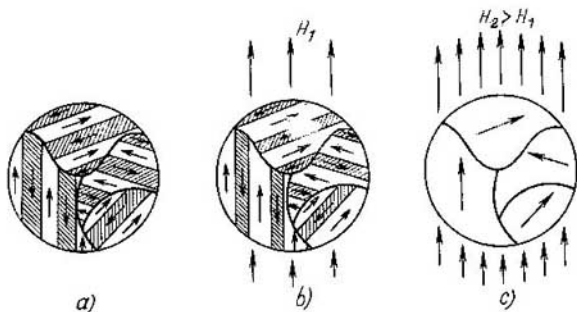


Fig. 42.12.

imanación coincidirá con la del campo externo. Estos dominios poseerán el mínimo de energía y, por lo tanto, estarán en estado de equilibrio estable. Los dominios vecinos tienen el máximo de energía. Por esta razón, desde el punto de vista energético es ventajoso si los momentos magnéticos de algunos átomos varían su dirección y se unen a aquellos dominios, cuya energía es mínima. Este proceso denominamos *desplazamiento de los límites de los dominios* (fig. 42.12, b).

A medida que crece la intensidad del campo magnético externo, los límites de los dominios se desplazan más fuertemente. Con ello, las paredes de los dominios comienzan a tropezar en su recorrido con los defectos del cristal, es decir, dislocaciones, inclusiones, etc. (§ 32.4). Estos defectos dificultan la variación de la dirección del momento magnético en los átomos dispuestos cerca del defecto (obstaculizan el desplazamiento de las paredes del dominio). Con el aumento del crecimiento del campo, la energía potencial de los

átomos (dipolos magnéticos) cerca del defecto crecerá hasta tal grado, que superará la energía de activación (§ 34.3). Entonces, los momentos magnéticos de los átomos en las proximidades del defecto, varían por salto su dirección por la opuesta, con otras palabras, la pared del dominio por un salto se separa de su lugar y se desplaza hasta el siguiente defecto. De esta forma, el proceso de imanación de una sustancia policristalina no transcurre uniformemente, sino que a saltos. Este fenómeno recibe el nombre de *efecto de Burkhausem*.

Dicho efecto puede ser descubierto de modo experimental. A un haz de alambres de níquel se acerca un imán; se produce la imanación por salto del níquel, lo que provoca la variación por salto del campo magnético. Gracias al fenómeno de la inducción electromagnética (véase el cap. 43) en el arrollamiento, enrollado en el haz de níquel, surgen impulsos de corriente que se oyen bien por un teléfono.

El carácter irregular del proceso de imanación de una sustancia ferromagnética policristalina lleva a pérdidas irreversibles de energía (desplazamiento de las dislocaciones y otros defectos, aparición de ondas elásticas, cuya energía se transforma en interna, etc.). Por lo tanto, también el proceso de imanación en campos fuertes transcurre irreversiblemente. Cuando el campo magnético disminuye, la estructura de la sustancia no se restablece: durante la desimanación, los dominios tendrán otra forma y orientación en comparación con el proceso de imanación. Esta es la causa del efecto de histéresis.

3. En campos suficientemente fuertes, todas las paredes de los dominios se desplazan hacia los límites de los granos cristalinos y cada uno de éstos quedará imanado a lo largo de aquella dirección de imanación fácil que con la dirección del campo externo forma el menor ángulo (fig. 42.12, c). Si aumentamos aún más la intensidad del campo imanador, los momentos magnéticos de los granos comenzarán a girar, disponiéndose a lo largo del campo. Este proceso requiere campos fuertes, a causa de lo cual la imanación cambia poco en esta región y el crecimiento de la curva de imanación se retarda.

Por fin, cuando los momentos magnéticos de todos los granos se dispongan a lo largo del campo, llega la saturación magnética, es decir, con el crecimiento del campo externo, la imanación de la sustancia deja de crecer.



4. Como vemos, haciendo uso de la representación acerca de la estructura de dominios de las sustancias ferromagnéticas, pueden ser explicadas todas las particularidades del proceso de su imanación. El punto de Curie resulta ser la temperatura, más arriba de la cual la estructura de dominio se destruye.

Queda responder a dos preguntas. Ante todo hay que explicar qué fuerzas provocan el que en el interior del dominio, los momentos magnéticos de todos los átomos se disponen de forma espontánea a lo largo de la dirección de imanación fácil. Además, hay que encontrar las causas del por qué unas sustancias tienen propiedades ferromagnéticas y otras no. A estas preguntas sólo puede dar respuesta la teoría cuántica de los fenómenos magnéticos.

#### § 42.9. Experimento de Einstein—de-Haas

1. En los párrafos anteriores hicimos uso de la representación acerca de que los átomos de las sustancias paramagnéticas y ferromagnéticas tienen momento magnético y en el campo magnético externo estos momentos se orientan a lo largo del campo. En el § 42.2 hemos aclarado que la razón entre el momento magnético orbital y el momento cinético orbital es igual a la mitad de la carga específica del electrón. Es muy importante comprobar estas representaciones experimentalmente. La idea de semejante experimento fue propuesta por Einstein en 1915 y ese mismo año, junto con de-Haas, lo realizó.

La esencia del experimento es la siguiente. Suspendamos una barrita de material ferromagnético de un fino hilo y ubiquémosla en una bobina de forma que el eje de la barrita y de la suspensión coincidan exactamente con la dirección del vector de inducción de campo imanador. Haciendo pasar la corriente por el arrollamiento de la bobina, imanamos la barrita hasta la saturación y, seguidamente, variando la dirección de la corriente en la bobina, imanamos la barrita hasta la saturación en sentido opuesto (fig. 42.13). El proceso de reimanación consiste en que las direcciones de los momentos magnéticos de los átomos varían por los opuestos. Pero junto con la variación de la dirección del momento magnético, cambia la del momento de cantidad de movimiento de los electrones.

El sistema de electrones e iones positivos, que forman la red cristalina de la barrita, es cerrado ya que sobre él no actúa ningún momento mecánico. Pero entonces, de acuerdo con la conocida ley de conservación (§ 22.7), el momento sumario de cantidad de movimiento de los electrones y la red iónica no debe variar. Pero como durante la reimanación de la barrita el momento de cantidad de movimiento de los electrones cambia, correspondientemente en la propia barrita

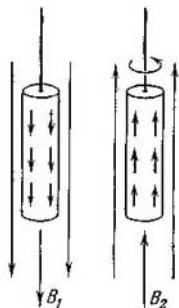


Fig. 42.13.

debe surgir un momento de cantidad de movimiento tal que su suma algebraica conserve su valor inicial; gracias a esto la barrita gira alrededor de su eje de manera paralela al campo.

De esta forma quedó experimentalmente demostrado que los átomos tienen un momento magnético provocado por el movimiento intraatómico de los electrones. La presencia del momento magnético provoca, de acuerdo con (42.1), la aparición del momento mecánico de cantidad de movimiento.

2. Ese mismo año, S.J. Barnett mostró que existe un efecto que, en cierto sentido, es opuesto al de Einstein—de-Haas. Barnett descubrió que

si una barrita de hierro se pone en rápido movimiento, ésta se imana. De este experimento también puede ser hallada la razón entre el momento magnético y el momento de cantidad de movimiento.

3. Un minucioso análisis de los resultados de los experimentos mostró que tanto en el experimento de Einstein —de-Haas, como en el de Barnett, la razón entre el momento magnético y el momento de cantidad de movimiento tiene el signo esperado, que corresponde a la carga negativa de los electrones, pero el valor numérico resultó ser dos veces mayor que el obtenido según la fórmula (42.1), es decir

$$p_m/L = e/m_e \quad (42.17)$$

Se puede suponer la siguiente explicación del resultado obtenido. Supongamos que el electrón tiene no sólo momento magnético orbital, para el cual la correlación (42.1) es válida, sino que además, otro momento magnético, *de spin*, para el cual se cumple la correlación (42.17). Si además

tenemos en cuenta, que los momentos magnéticos orbitales pueden ser compensados, los resultados de los experimentos de Einstein — de-Haas y de Barnett se explican con facilidad.

Resulta que la existencia del momento magnético de spin en el electrón, se desprende directamente del experimento de Stern — Gerlach.

### § 42.10. Experimento de Stern—Gerlach

1. En 1921 O. Stern y W. Gerlach realizaron un experimento destinado a la medición directa de los momentos magnéticos de los átomos de diversos elementos químicos.

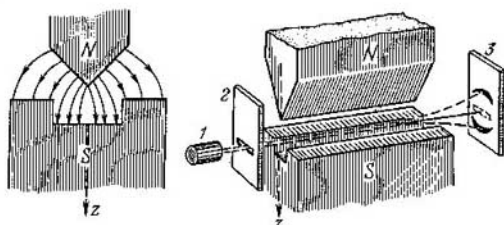


Fig. 42.14.

Con este fin, un haz de átomos se hace pasar por un campo magnético con fuerte heterogeneidad, es decir, con gran valor del gradiente  $\Delta B/\Delta z$ . Para obtener tan considerable gradiente se hizo uso de un electroimán con zapatas polares de especial forma (fig. 42.14).

Los átomos de metal, al evaporarse en el horno 1, pasan por el diafragma 2 formando un haz estrecho. Cuando no hay campo magnético dicho haz no deja huellas en el centro de la placa fotográfica 3. Si conectamos el campo magnético, a lo largo del eje  $z$  sobre el átomo actúa la fuerza  $F_z = p_{mz} \frac{\Delta B}{\Delta z}$  (véase (41.9)), donde  $p_{mz}$  es la proyección del momento magnético en el eje  $z$ . Bajo la acción de dicha fuerza, los átomos se desplazan hacia arriba o hacia abajo, en función del sentido de la proyección del momento magnético: a lo largo del eje o en dirección opuesta. Midiendo el valor del desplazamiento y conociendo el gradiente de la

inducción del campo, puede ser calculada la proyección del momento magnético del átomo.

2. De acuerdo con las representaciones clásicas, cualesquiera orientaciones del momento magnético respecto del eje  $z$  son igualmente probables, de forma que la proyección del momento magnético puede tomar todo valor desde  $-p_m$  hasta  $+p_m$ , incluido el nulo. De modo correspondiente variará la fuerza que actúa sobre los átomos. Como en el haz hay muchos átomos, en correspondencia con las representaciones clásicas, el haz debe dispersarse por una ancha franja. ¡Resultó que nunca surge semejante franja dispersal! Así, pues, la suposición acerca de la orientación igualmente probable de los momentos magnéticos en direcciones arbitrarias, sobre la que se basa la física clásica, no corresponde a la realidad.

3. El experimento mostró que los átomos de ciertas sustancias no se desvían por completo en el campo magnético, por ejemplo los de mercurio. Esto significa que estos átomos no tienen momentos magnéticos; por lo tanto, todas estas sustancias deben ser diamagnéticas, lo que corresponde a la realidad.

Un resultado de particular interés, fue obtenido en los experimentos con los metales alcalinos litio, sodio, potasio (así como el aluminio y algunos otros). Aquí el haz atómico se dividió en dos, que se desplazaron a una misma magnitud, pero en sentidos opuestos (fig. 42.14). De aquí se desprende que la proyección del momento magnético del átomo dado sobre el eje  $z$  puede tener *sólo dos* valores iguales en magnitud y de sentido opuesto. Después de medir el valor de esta desviación, puede ser mostrado que en el caso dado la proyección del momento magnético del átomo es igual al magnetón de Bohr:

$$p_{mz} = \pm \mu_B. \quad (42.18)$$

### § 42.11. Spin del electrón

1. Analicemos con más detalle el resultado obtenido con los metales alcalinos, en el ejemplo del litio, que es el tercer elemento en el sistema periódico de Mendeléiev, por lo que alrededor de su núcleo giran tres electrones (§ 73.2). Pero, al mismo tiempo, como todos los metales alcalinos, el litio es un elemento monovalente. Esto nos hace llegar a la conclusión de que uno de los electrones de litio en algo se dife-

rencia de los otros dos. Como será mostrado en el § 73.1, dos electrones de litio se encuentran en la misma órbita que los dos electrones de helio, mientras que el tercer electrón se encuentra en otra órbita.

Los electrones que se hallan en la órbita de helio, nada aportan al momento magnético del átomo, ya que sus momentos magnéticos están compensados (§ 42.4). Por consiguiente, el momento magnético del átomo surge a cuenta del momento magnético no compensado del electrón de valencia. Pero como los átomos de todos los metales alcalinos tienen un electrón de valencia, todos ellos deben poseer un momento magnético no compensado. En consecuencia, todos los metales alcalinos deben ser sustancias paramagnéticas, lo que en realidad se observa.

2. Sin embargo, un análisis atento nos muestra que dicho momento magnético no compensado, de ninguna manera puede ser momento orbital.

En 1925, S. Goudsmit y G. Uhlenbeck, como resultado del análisis de una serie de dificultades existentes en la física atómica (entre otras, al explicar los resultados del experimento de Stern y Gerlach), llegaron a la conclusión de que el electrón debe tener su propio momento de cantidad de movimiento, que fue llamado *spin* (o espín del inglés spin, rotación alrededor de su propio eje) (§ 72.5).

3. Aclaremos el papel del *spin* en el origen del ferromagnetismo. Ya. I. Frénkel y W. Heisenberg mostraron que durante la interacción electrostática de los electrones, la energía de interacción en la sustancia consta de dos partes: la energía del campo de Coulomb y de otra componente, que caracteriza el llamado efecto de *interacción*, que es puramente mecanocuántico y no tiene análogo clásico (§ 74.3).

Resulta que con la orientación paralela de los spines la energía del efecto de interacción es negativa, lo que corresponde a las fuerzas de atracción. Pero, como sabemos, el mínimo de energía es la condición del equilibrio estable de un sistema (§ 19.6). Por lo tanto, a consecuencia de la acción de las fuerzas de intercambio, los spines de los átomos deberían disponerse en una misma dirección, si el movimiento térmico no lo obstaculizara.

En las sustancias paramagnéticas la energía del efecto de interacción es menor que la del movimiento térmico, a causa de lo cual estas sustancias no pueden imantarse de

modo espontáneo. En lo que atañe a las sustancias ferromagnéticas, a temperaturas inferiores al punto de Curie la energía del efecto de interacción es mucho mayor que la del movimiento térmico, por lo que todos los spines de un gran grupo de átomos se orientan en la dirección de fácil imanación, por lo que se crean regiones de imanación espontánea, es decir, dominios.

### § 42.12. Antiferromagnetismo

1. Al estudiar las propiedades de las sustancias ferromagnéticas, Landáú llegó en 1933 a la conclusión de que debían existir sustancias, en las que a bajas temperaturas los momentos magnéticos se orientan no de forma paralela,

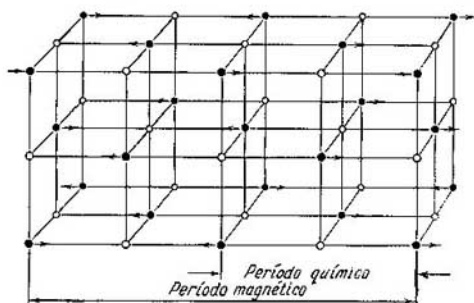


Fig. 42.15.

como ocurre en las sustancias ferromagnéticas, sino antiparalela, es decir, los momentos magnéticos en dos átomos vecinos están dispuestos entre sí de manera opuesta. En 1938 fue descubierto experimentalmente que los compuestos  $MnO$ ,  $MnS$ ,  $Cr_2O_3$ ,  $NiCr$  y una serie de otros, poseen en realidad propiedades antiferromagnéticas.

En la fig. 42.15 está representado el esquema de la red cristalina del óxido manganesoso ( $MnO$ ). Los átomos de oxígeno, designados con círculos claros sin flechas, no tienen momento magnético; con círculos negros, los átomos paramagnéticos de manganeso; con flechas se representan las direcciones de sus momentos magnéticos. Vemos que en el

cristal hay dos períodos: el de la red (período químico) igual a la longitud de la arista del cubo, trasladando el cual paralelamente se puede construir toda la red cristalina, y el período magnético, igual a la longitud de la arista del cubo, con el desplazamiento del cual es posible construir la red magnética. Haciendo uso de la difracción de los neutrones (§ 69.2), se pudo demostrar de forma experimental que el período de la red magnética es dos veces mayor que el período de la red cristalina.

2. Para las sustancias antiferromagnéticas existe una temperatura, análoga a la de Curie para los ferromagnéticos, más arriba de la cual se destruye el orden magnético representado en la fig. 42.15, con lo cual, la sustancia se convierte en una sustancia paramagnética corriente. Esta temperatura  $T_N$  recibe en nombre de *punto de Néel*; éste, como el de Curie, es la temperatura de transición de fase de segundo género.

Pero si por encima del punto de transición de fase, la conducta de las sustancias ferromagnéticas y antiferromagnéticas es aproximadamente la misma, es decir, se convierten en paramagnéticas, por debajo de dicha temperatura se comportan en absoluto de diferente manera. A una temperatura inferior a la del punto de Curie, las sustancias ferromagnéticas, gracias a la imanación espontánea y la formación de dominios, la susceptibilidad magnética crece a saltos centenares e incluso miles de veces y, a continuación, hasta temperaturas próximas al cero absoluto, la susceptibilidad magnética depende poco de la temperatura. A temperaturas por debajo del punto de Néel, en las sustancias antiferromagnéticas surge un orden magnético, aumenta la cantidad de los momentos antiparalelos y la imanación disminuye bruscamente; en correspondencia disminuye también la susceptibilidad magnética. A medida que disminuye la temperatura, el orden magnético se hace más perfecto, ya que decrece la energía de las oscilaciones térmicas que obstaculizan la orientación ordenada de los momentos magnéticos. Por consiguiente, a medida que la temperatura de la sustancia antiferromagnética se acerca al cero absoluto, su susceptibilidad magnética también tiende a cero (fig. 42.16).

3. Imaginémos una cierta sustancia con orden antiferromagnético, en la que la mitad de los átomos de manganeso se ha sustituido por otros átomos paramagnéticos con mayor momento magnético, por ejemplo, los de hierro. En la

fig. 42.17 estos átomos están representados por círculos negros de mayor diámetro, con la flecha más larga. A una temperatura por debajo del punto de Néel, esta sustancia se imantará espontáneamente, ya que la diferencia de los momentos magnéticos de dos átomos paramagnéticos vecinos no será igual a cero.

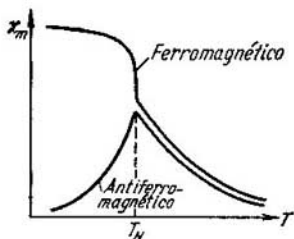


Fig. 42.16.

Los materiales con semejantes propiedades existen en realidad, y se llaman ferritas, mientras que sus propiedades magnéticas reciben el nombre de ferromagnetismo. Las ferritas se obtienen mediante la síntesis de polvos, constituidos por óxidos de hierro ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) y óxidos de otros metales (litio, níquel, manganeso, etc.), bien mezclados.

En función de la composición y el carácter de maquinado pueden ser obtenidas ferritas con las más diversas propiedades. Por ejemplo, la fuerza coercitiva de las ferritas de níquel-zinc es, aproximadamente,  $1 \text{ A/m}$ . mientras que la de las ferritas

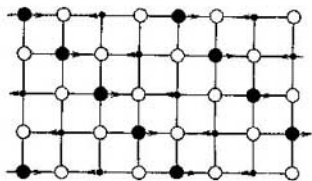


Fig. 42.17.

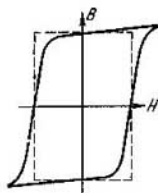


Fig. 42.18.

de cobalto, cerca  $2 \cdot 10^5 \text{ A/m}$ . Para las ferritas magnesio-manganesas el lazo de histéresis es cercano al rectangular (fig. 42.18), lo que permite emplearlas como elementos de las memorias en los computadores.

La inducción magnética en las ferritas es mucho menor que en las sustancias ferromagnéticas metálicas. Pero ellas, poseen una gran ventaja: si las últimas son buenas conducto-



ras de la corriente eléctrica, las ferritas tienen conductividad relativamente baja. Esto permite usarlas en calidad de núcleos en dispositivos que funcionan bajo corrientes de alta frecuencia, en los que los núcleos de hierro no se pueden utilizar.

### Capítulo 43

## INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

### § 43.1. Descubrimiento de Faraday

1. Basándose en el fenómeno de que alrededor de un conductor con corriente surge un campo magnético, Faraday llegó en 1821 a la conclusión de que mediante un campo magnético es posible crear corriente en el conductor. Esto certifica una nota hecha ese año por Faraday en su diario: "Transformar el magnetismo en electricidad". No obstante, sólo al pasar diez años, después de búsquedas intensas, consiguió resolver este problema. Faraday descubrió que si sobre cierto núcleo se enrollan dos arrollamientos y si en uno de ellos se varía la intensidad de la corriente (por ejemplo, cerrando y abriendo el circuito), en el segundo arrollamiento (llamado secundario) surge la corriente.

Más adelante, estableció que la corriente en el arrollamiento secundario se amplifica bruscamente, si el núcleo es de hierro. A continuación, resultó que el arrollamiento con corriente puede ser sustituido por un imán y, entonces, la corriente en la bobina aparece bien al desplazar ésta respecto del imán, o bien al revés, desplazando el imán en la bobina.

3. Después del descubrimiento de Faraday comenzó una nueva era tanto en la teoría del electromagnetismo, como en su aplicación práctica. Fue definitivamente fundamentada la unidad de los fenómenos eléctricos y magnéticos, lo que estimuló la creación de la teoría del campo electromagnético, lo que pudo realizar Maxwell en la década del setenta del siglo pasado. Por otro lado, el descubrimiento de Faraday sirvió de base para el desarrollo de la electrotecnia moderna, ya que todas las máquinas eléctricas modernas se basan en el fenómeno de la inducción electromagnética.

## § 43.2. Fenómeno de inducción electromagnética y fuerza de Lorentz

1. El mecanismo de surgimiento de la corriente inducida en un conductor en movimiento, se explica con ayuda de la fuerza de Lorentz. Sea que un conductor en el que hay cargas positivas y negativas libres se mueve a velocidad  $v$  perpendicularmente al vector de inducción  $B$  (fig. 43.1). En este caso, sobre las cargas actúa la fuerza de Lorentz  $F_m = evB$ , dirigida a lo largo del conductor, según la regla de la mano izquierda (§ 41.1).

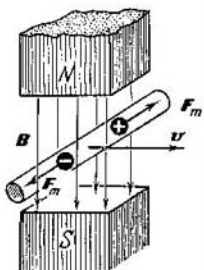


Fig. 43.1.

A causa de la acción de la fuerza de Lorentz se produce la división de las cargas: las cargas positivas se acumulan en un extremo del conductor, las negativas, en otro. Estas cargas crean en el interior del conductor un campo electrostático coulombiano. Si el conductor está abierto, el movimiento de las cargas bajo la acción de la fuerza de Lorentz transcurrirá hasta el momento, cuando la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga desde el campo de Coulomb equilibre la fuerza de Lorentz.

Como vemos, la acción de las fuerzas de Lorentz es análoga a la de cierto campo eléctrico, que estuviera dirigido en dirección opuesta al campo de Coulomb. Como este campo no está provocado por la distribución de las cargas, sino que por fuerzas no electrostáticas (en nuestro caso por las fuerzas de Lorentz), decimos que dicho campo es exterior. La intensidad de este último

$$E^* = F_m/e = vB. \quad (43.1)$$

2. Conectemos un conductor, que se mueve por un campo magnético, con una carga externa como se muestra en la fig. 43.2, a. Por el conductor fluirá la corriente y los electrones libres se pondrán en movimiento a lo largo del conductor, a una velocidad  $w$ . El vector de la velocidad sumaria (véase (3.20))

$$V = v + w.$$

También cambiará la fuerza que actúa sobre el electrón: además de la resultante  $F_v$ , dirigida a lo largo del conductor, aparecerá la resultante  $F_w$ , en sentido opuesto al vector  $v$  (fig. 43.2, b). El módulo de esta fuerza

$$F_w = ewB. \quad (43.2)$$

La fuerza de Lorentz, que en este caso actúa sobre el electrón,

$$F_m = F_v + F_w.$$

Como es lógico, es perpendicular al vector  $V$ .

3. La experiencia muestra, que entonces la diferencia de potencial será menor que con el circuito abierto; del

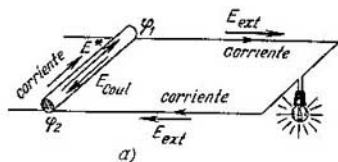


Fig. 43.2.

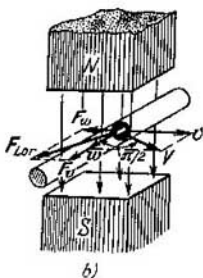


Fig. 43.3.

modo correspondiente disminuirá también la intensidad del campo de Coulomb en el interior del conductor.

La intensidad de campo exterior sólo se determina por la velocidad del conductor y la inducción del campo magnético. Por lo tanto, dicha intensidad no variará al cerrarse el circuito. Así, pues, si en un conductor abierto son iguales las intensidades de los campos de Coulomb y exterior en el circuito cerrado la intensidad del primero será menor que la del segundo (fig. 43.2, a).

4. Prestemos ahora atención a la dirección de movimiento de los portadores de corriente. Esta se determina por la dirección de movimiento de las cargas positivas a lo largo del campo, es decir, de la región con mayor potencial a la de potencial más bajo.

En el sector externo de la red, las cargas positivas se mueven de la región con potencial  $\varphi_1$  a la región con potencial  $\varphi_2$ , bajo la acción del campo eléctrico con intensidad  $E_{\text{ext}}$ . El trabajo realizado por este campo al desplazarse la carga,

$$A_{\text{ext}} = q (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (43.3')$$

En el sector interior, las cargas positivas se mueven de la región de bajo potencial  $\varphi_2$  a la de potencial más alto  $\varphi_1$ . Esto es posible a causa de que, en el caso dado, las fuerzas exteriores (fuerzas de Lorentz) son mayores que las de Coulomb, que se oponen al movimiento de las cargas. El trabajo realizado al desplazar la carga por el sector interior del circuito, es igual a la diferencia de los trabajos realizados por los campos exterior y de Coulomb; las fuerzas coulombianas son conservativas, por lo que su trabajo no depende de la forma de la trayectoria (§ 18.7). Así, pues, el trabajo para el desplazamiento de la carga en el sector interior del circuito

$$A_{\text{int}} = ql (E^* - E_{\text{Coul}}) = qlvB - q (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (43.3'')$$

### § 43.3. Fuerza electromotriz de la inducción

1. Haciendo uso de las ecuaciones (39.11) y (43.4), obtenemos la expresión para la fem de la inducción

$$\mathcal{E} = E^*l = vBl. \quad (43.4)$$

Señalemos, que hemos examinado el caso cuando el vector de velocidad es perpendicular al vector de inducción del campo magnético. Dejamos al lector la posibilidad de demostrar que en el caso general

$$\mathcal{E} = Blv \sin \alpha, \quad (43.5)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre las direcciones del vector de velocidad y el vector de inducción del campo magnético.

2. Calculemos el trabajo realizado al desplazarse la carga por un circuito cerrado. Comparando las expresiones (43.3') (43.3'') y (43.4), obtenemos

$$A_{\text{cerr}} = A_{\text{ext}} + A_{\text{int}} = q (\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + qlvB - q (\varphi_1 - \varphi_2) = qlvB = q\mathcal{E} = A_{\text{e.ext.}}$$

De aquí se desprende, que

$$\mathcal{E} = A_{\text{cerr}}/q. \quad (43.6)$$

Así, pues, vemos que el trabajo para el desplazamiento de la carga por un circuito cerrado es igual al trabajo de las fuerzas exteriores. Esto nos permite dar otra definición a la noción de fem: *la fuerza electromotriz* es igual a la razón entre el trabajo que se realiza al desplazar la carga una vez por el circuito cerrado y la magnitud de la carga que se desplaza.

#### § 43.4. Fenómeno de inducción en un conductor inmóvil

1. Para aclarar el mecanismo del fenómeno de la inducción electromagnética en un conductor inmóvil, vamos a hacer uso del esquema representado en la fig. 43.3. Aquí,

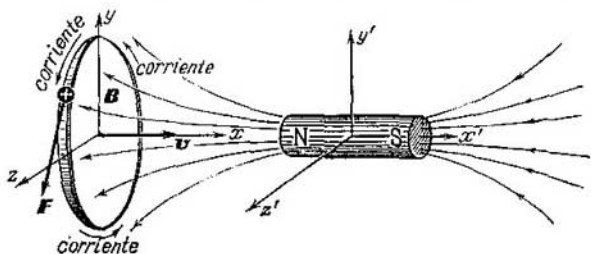


Fig. 43.4.

el sistema de referencia  $xyz$  está ligado con un conductor cerrado, mientras que el sistema de referencia  $x'y'z'$ , con la fuente del campo magnético, por ejemplo, con un imán permanente. Supongamos que el conductor y el imán se aproximan uno al otro a una velocidad  $v$ .

En el sistema de referencia  $xyz$ , ligado al conductor, las cargas están inmóviles respecto del sistema de referencia, por lo que la fuerza de Lorentz no puede actuar sobre ellas. Pero a pesar de todo, al acercarse el imán al conductor en éste surge corriente. Este resultado corresponde por completo al principio de relatividad, de acuerdo con el cual todos los

sistemas inerciales de referencia son equivalentes y los fenómenos (en el caso dado, la corriente) son sólo determinados por la velocidad relativa de aproximación del conductor y el imán. Pero, ante todo, nos interesa qué fuerzas producen, en el caso dado, la circulación de las cargas por el conductor.

2. Sabemos, que el movimiento de las cargas puede surgir bien por la acción de fuerzas eléctricas o bien de Lorentz. Como en el sistema de referencias  $xyz$ , relacionado con el conductor, las fuerzas de Lorentz no actúan, llegamos a la conclusión de que la corriente en el conductor se provoca por un campo eléctrico inducido, que en el sistema  $x'y'z'$  no existe.

El campo eléctrico inducido tiene ciertas singularidades:

a) *Este campo no es coulombiano*, es decir, no se provoca por cierta distribución de las cargas, sino que por el acercamiento del imán al conductor (o sea, de la fuente del campo magnético).

b) A diferencia de las líneas de fuerza del campo de Coulomb, que empiezan en las cargas positivas y terminan en las negativas, *las líneas de fuerza del campo inducido se cierran en sí mismas*. Por esta causa, semejante campo recibe el nombre de *rotacional*.

c) *El campo inducido no es conservativo*, ya que el trabajo realizado por este campo al desplazarse las cargas por el circuito cerrado no es igual a cero. Por consiguiente, la característica energética del campo inducido no es el potencial, sino que la fuerza electromotriz de la inducción.

### § 43.5. Intensidad del campo inducido

1. Halleemos la intensidad del campo eléctrico inducido. En el sistema de referencia  $x'y'z'$  (fig. 43.3) sobre la carga actúa la fuerza de Lorentz  $F_m' = qvB'$ , en el sistema  $xyz$ , la fuerza eléctrica  $F_e = qE$ . La correlación entre estas fuerzas la hemos obtenido en el § 40.2, a saber:  $F' = F \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Así, pues,  $qvB' = qE \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , o bien

$$E = \frac{vB'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (43.7)$$

2. La fuerza electromotriz en el sistema  $x'y'z'$  es numéricamente igual al trabajo realizado por las fuerzas exteriores (en el caso dado, las fuerzas de Lorentz) al desplazarse una carga unitaria:  $\mathcal{E}' = F'l/q = vB'l$ . En el sistema de referencia  $xyz$ , la fem es numéricamente igual al trabajo efectuado por el campo eléctrico inducido al desplazarse una vez la carga unitaria por el circuito cerrado, es decir,

$\mathcal{E} = Fl/q = El$ . Pero la longitud del conductor en los dos sistemas es la misma, ya que está dispuesto de forma perpendicular a la dirección del movimiento; la intensidad del campo inducido será expresada por la fórmula (43.7). Así, pues,

$$\mathcal{E} = \frac{vB'l}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\mathcal{E}'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (43.8)$$

Por regla, durante los fenómenos de la inducción electromagnética, la velocidad de movimiento de los conductores es mucho menor que la de la luz y, prácticamente, en ambos sistemas de referencia la fem coincide.

### § 43.6. Campo electromagnético y principio de la relatividad

1. El análisis del fenómeno de la inducción electromagnética, desde el punto de vista de dos sistemas inerciales de referencia diferentes, de nuevo nos lleva a la misma conclusión que obtuvimos en el § 40.3, o sea, que la división de un campo electromagnético único en las resultantes eléctrica y magnética depende del sistema de referencia en que se describe el campo. En efecto, en el sistema de referencia, respecto del cual las cargas están en reposo (véase la fig. 40.2), la interacción entre ellas se realiza mediante el campo que llamamos electrostático. En dicho sistema de referencia no hay campo magnético. En el otro sistema de referencia, con relación al que las cargas están en movimiento, la interacción entre ellas se lleva a cabo mediante el campo que puede ser dividido en dos componentes: eléctrica y magnética. Podemos decir, que en este sistema hay dos campos, eléctrico y magnético, y que la interacción entre las cargas en este sistema de referencia es realizada con ayuda de los dos campos.

Con un caso análogo tropezamos en la instalación representada en la fig. 43.3. En el sistema de referencia ligado con el imán, sólo hay campo magnético y el movimiento de las cargas en el conductor surge a cuenta de las fuerzas de Lorentz. En el sistema de referencia, relacionado con el conductor, además del campo magnético hay un campo eléctrico rotacional, que es el que crea la corriente.

2. De nuevo llegamos a la conclusión de que los "campos eléctricos y magnéticos no existen independientemente del estado del movimiento en el sistema de coordenadas". Esta enunciación, perteneciente a Einstein, la hemos tomado de

su primera obra acerca de la teoría de la relatividad, que vio la luz en 1905 con el título "La electrodinámica de los cuerpos en movimiento".

Según Einstein, para calcular la fuerza que actúa sobre un cuerpo cargado, hay que multiplicar la magnitud de la carga por la intensidad del campo eléctrico en aquel punto, donde se encuentra el cuerpo cargado. Con esto, la expresión para la intensidad del campo eléctrico debe ser transformada respecto del sistema de referencia, con relación al cual el cuerpo que se investiga está en reposo.

### § 43.7. Ley de inducción de Faraday

1. Nos queda considerar el fenómeno de la inducción electromagnética en el caso cuando tanto el conductor, en el que surge la corriente de inducción, como la fuente de campo magnético están en reposo en el sistema dado de referencia. En el experimento de Faraday con dos bobinas, enrolladas en cierto núcleo, por el arrollamiento secundario la corriente surge sólo en el caso si varía el campo magnético creado por la corriente en el arrollamiento primario. Notemos, que el procedimiento de variación del campo magnético no juega ningún papel. Podemos desplazar una bobina respecto de otra, con ayuda de un interruptor conectar y desconectar la corriente en el arrollamiento primario, se puede cambiar la intensidad de la corriente en dicho arrollamiento con ayuda de un reóstato, el resultado será el mismo: con cualquier variación del campo magnético en el arrollamiento secundario surge corriente de inducción. Ya sabemos que en un conductor cerrado la circulación de las cargas se provoca por el campo eléctrico inducido. De este modo, llegamos a la conclusión de que cualesquiera variaciones del campo magnético son acompañadas del surgimiento de un campo eléctrico rotacional. Esta interpretación del fenómeno de inducción fue propuesta por Maxwell y resultó ser muy fructífera.

2. Transformemos la fórmula (43.5) de forma que sea válida para calcular la fem de inducción en aquellos casos, cuando el conductor está inmóvil y el campo magnético varía. Con este fin es preciso introducir una nueva característica escalar del campo magnético: *el flujo del vector de la inducción magnética*, o de forma más breve, *el flujo magnético*  $\Phi$ .



Supongamos que una superficie plana  $abcd$  de área  $S$  se encuentra en un campo magnético homogéneo perpendicularmente a las líneas de fuerza (fig. 43.4, a). Se llama flujo del vector de inducción  $B$  por el área  $S$  dada, el producto de estas magnitudes:

$$\Phi = BS. \quad (43.9)$$

La unidad de flujo magnético en el SI es un *weber* (Wb), que es el flujo magnético que atraviesa una superficie de

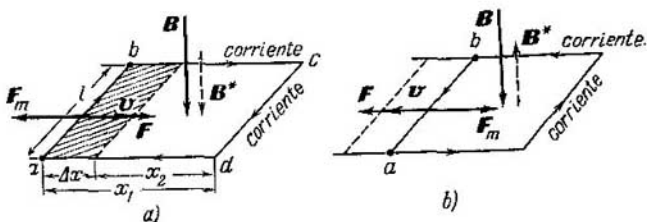


Fig. 43.5.

área  $1 \text{ m}^2$ , dispuesta perpendicularmente a las líneas de fuerza de un campo magnético homogéneo con inducción  $1 \text{ T}$ :  $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot 1 \text{ m}^2$ .

3. Al desplazar el conductor  $ab$  a una velocidad  $v = dx/dt$ , en el circuito se induce una fem de inducción  $\mathcal{E} = Blv = Bl \, dx/dt$ . La expresión en el numerador se transforma del modo siguiente:  $Bl \, dx = -BdS = -d\Phi$ . El signo menos ha aparecido a causa de que el flujo magnético decrece. La fem de inducción

$$\mathcal{E} = -d\Phi/dt. \quad (43.10)$$

4. Esta expresión se ha deducido para el caso cuando el conductor se mueve respecto de las fuentes del campo magnético. En este caso particular, las expresiones (43.10) y (43.5) son equivalentes, con cualquiera de ellas se puede calcular el valor de la fem. Pero la expresión (43.10) también es válida para describir los fenómenos de inducción electromagnética con el conductor inmóvil y la inducción del campo magnético surge por la variación del flujo magnético.

Así, pues, en todos los casos de inducción electromagnética, *la fem es igual a la derivada del flujo magnético en el tiempo, tomada con signo contrario*. Esta es la ley de Faraday para la inducción.

### § 43.8. Regla de Lenz

1. Aclaremos el sentido del signo en la expresión (43.10). Consideremos la fem positiva, si la dirección del campo eléctrico inducido forma con la del vector  $B$  un sistema dextrógiro (fig. 43.4, *a*). Al moverse el conductor, el flujo magnético decrece, la derivada de éste  $d\Phi/dt < 0$  y la fem  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt > 0$ .

El lector se convencerá con facilidad de que al variar la dirección de movimiento del conductor por la opuesta, el flujo magnético crecerá, su derivada  $d\Phi/dt > 0$  y la fem cambia, correspondientemente, de signo (fig. 43.4, *b*).

2. El signo de la fem y la dirección de la corriente inducida que le corresponde, pueden ser hallados mediante una regla general que E.J. Lenz formuló en 1833. Para deducir esta regla, nos dirigiremos de nuevo a la fig. 43.4, donde con una flecha de trazos está designada la dirección del vector de inducción  $B^*$  del campo magnético, creado por la corriente inducida. En el caso, cuando el flujo magnético decrece, las direcciones de los vectores  $B$  y  $B^*$  coinciden, lo que obstaculiza la disminución del campo magnético (fig. 43.4, *a*). En el segundo caso, cuando el flujo crece, el vector  $B^*$  está dirigido en sentido opuesto al vector  $B$ , lo que se opone al crecimiento del campo magnético (fig. 43.4, *b*). De esta forma, *la corriente inducida tiene una dirección tal, con la que su campo magnético obstaculiza la variación del flujo magnético que provoca la inducción*. Este es el contenido de la regla de Lenz.

### § 43.9. Inducción electromagnética y ley de la conservación de la energía

1. La regla de Lenz está estrechamente ligada con la ley de la conservación de la energía y, en realidad, es un corolario de esta ley general de la naturaleza. En efecto, el campo eléctrico inducido, desplazando las cargas por el circuito, realiza trabajo. Pero éste es medida de la variación de la energía (§§ 16.4 y 21.1). ¿Qué transformaciones de la

energía acompañan al fenómeno de la inducción electromagnética?

Hasta el momento, teníamos en cuenta sólo el trabajo de una de las componentes de la fuerza de Lorentz, es decir, la fuerza exterior  $F_v = evB$ . El trabajo de esta fuerza durante el tiempo  $\Delta t$ :

$$A_v = F_v w \Delta t = evBw \Delta t.$$

Pero la segunda componente de la fuerza de Lorentz  $F_w = ewB$ , durante ese mismo intervalo de tiempo, efectúa trabajo negativo, ya que esta fuerza está dirigida en sentido opuesto al desplazamiento  $\Delta x = v \Delta t$ :

$$A_w = -F_w v \Delta t = -ewBv \Delta t.$$

El trabajo completo de la fuerza de Lorentz, como es natural, será igual a cero (§ 41.1).

2. Como sobre cada electrón actúa una fuerza  $F_w$  dirigida contra el movimiento del conductor, su suma crea una fuerza de frenado  $F_{\text{fren}} = NF_w$ ; donde  $N = nSl$  es la cantidad total de electrones libres en el conductor en movimiento. El movimiento uniforme del conductor a una velocidad  $v$  se asegura por la fuerza externa  $F = -F_{\text{fren}}$ , aplicada al conductor por el lado de motor primario.

El trabajo de esta fuerza durante el tiempo  $t$ , es igual a

$$A_{\text{mec}} = Fvt = NF_w vt = nSl \cdot ewB \cdot vt.$$

Tomando en consideración que la intensidad de la corriente  $i = enSw$  (véase (39.17)), y la carga  $q = it$  (véase (39.15)) obtenemos

$$A_{\text{mec}} = qBlv. \quad (43.11)$$

El trabajo del campo inducido durante el mismo tiempo (véase (39.5), (43.5))

$$A_{\text{eléc.}} = q \mathcal{E} = qBlv. \quad (43.12)$$

3. Así, pues, no habiendo pérdidas, el trabajo de la fuerza externa resulta ser igual al trabajo realizado por el campo inducido durante el desplazamiento de las cargas en el circuito. Es decir, el fenómeno de la inducción electromagnética, desde el punto de vista energético, es el proceso de transformación de la energía mecánica en la del campo eléctrico inducido. Este es el principio sobre el que se basa el funcionamiento de los generadores de inducción de corriente eléctrica.

### § 43.10. Autoinducción

1. Calculemos el flujo magnético que atraviesa el arrollamiento de un solenoide. Por definición, el flujo que atraviesa una espira es igual al producto del área, que abarca la espira, por la inducción del campo magnético, o sea,  $BS$ . Como el solenoide tiene  $w$  espiras, el flujo completo

$$\Phi = wBS. \quad (43.13)$$

Pero  $w = nl$ , donde  $l$  es la longitud del solenoide y  $n$ , el número de espiras por unidad de longitud. Por otro lado, de acuerdo con (40.32) y (42.8),  $B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 in$ . Sustituyendo en (43.13),

$$\Phi = \mu\mu_0 n^2 Sli = Li. \quad (43.14)$$

2. La magnitud  $L$ , que para un solenoide largo es igual a

$$L = \mu\mu_0 n^2 Sl, \quad (43.15)$$

recibe el nombre de *inductancia* del solenoide. La unidad de inductancia es un *henry* (H), igual a la inductancia de un solenoide en el que con una corriente de 1 A se crea un flujo magnético de 1 Wb:  $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb}/1 \text{ A}$ .

Si en el campo no hay materiales ferromagnéticos, así como en el caso cuando semejante material ha alcanzado el estado de saturación magnética, la inductancia de un solenoide se determina sólo por sus dimensiones y el espesor del arrollamiento y no es función de la intensidad de la corriente.

3. De la expresión (43.14) sigue, que en el caso cuando la corriente en el arrollamiento del solenoide no varía, tampoco cambia el flujo magnético que lo atraviesa y, por lo tanto, aquí no se produce ninguna clase de fenómenos de inducción. Si varía la corriente, de forma correspondiente variará el flujo magnético y en el solenoide surgirá una fem de inducción. En nuestro caso, la corriente induce una fem en el propio circuito por el que ella fluye, por lo que dicho fenómeno es llamado *autoinducción*. La fem que en este caso surge será hallada comparando las expresiones (43.10) y (43.14):

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (43.16)$$

Así, pues, la fem de autoinducción es proporcional a la velocidad de variación de la corriente en el arrollamiento, o sea, a la derivada de la intensidad de la corriente en el tiempo.

4. El signo de la fem de autoinducción se determina según la regla de Lenz. Si la corriente en el circuito crece, el campo inducido debe oponerse a este crecimiento, por lo que el signo de la fem de autoinducción es contrario al de la diferencia de potencial en los extremos del arrollamiento. Si la corriente en el circuito decrece, el campo inducido debe obstaculizar a esta disminución y, por consiguiente, el signo de la fem será el mismo que el de la diferencia de potencial en los extremos del arrollamiento.

### § 43.11. Energía del campo electromagnético

1. En los §§ 37.7 y 38.4 fue mostrado que el campo eléctrico es portador de energía, que se distribuye en el campo con una densidad volumétrica

$$w_e = \frac{\Delta W_e}{\Delta V} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon \epsilon_0}.$$

Deduzcamos expresiones análogas para la energía del campo magnético.

Sea que en cierta bobina, la corriente crece desde cero hasta cierto valor  $I$ ; respectivamente, el flujo magnético también crecerá desde cero hasta el valor  $\Phi = LI$  (fig. 43.5). Como hemos visto en el párrafo anterior, en

tal caso surge una fem de autoinducción que se opone al crecimiento de la corriente. Por lo tanto, la fuente externa de corriente debe realizar trabajo en contra del campo inducido, a causa de lo cual la energía de la fuente de corriente se transforma en la energía del campo magnético. La variación de la energía del campo magnético es igual en módulo al trabajo elemental que se realiza al desplazarse la carga  $dq$  por el circuito cerrado:

$$dW_m = -\Delta A = -dq \mathcal{E}. \quad (43.17)$$

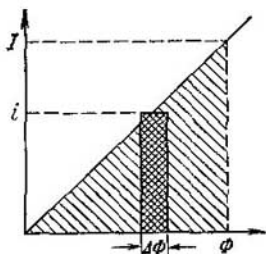


Fig. 43.6.

Teniendo en cuenta que  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$  (véase (43.10)), y la corriente  $i = dq/dt$  (véase (39.13)), tenemos

$$dW_m = dq \frac{d\Phi}{dt} = i d\Phi. \quad (43.18)$$

En la gráfica (fig. 43.5), esta magnitud está representada por el área del rectángulo sombreado. La energía total del campo es numéricamente igual al área del triángulo sombreado:

$$W_m = \frac{1}{2} I \Phi = LI^2/2. \quad (43.19)$$

Este mismo resultado será obtenido integrando:

$$W_m = \int_0^I i d\Phi = \int_0^I Li di = LI^2/2.$$

2. Como mostró Maxwell, la energía del campo magnético está distribuida por todo el volumen del campo, de manera que la densidad de energía

$$w_m = \frac{\Delta W_m}{\Delta V} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (43.20)$$

Para deducir esta correlación, expresemos en (43.19) la inductancia según la fórmula (43.15) y la corriente, por la intensidad del campo según (40.32); obtenemos

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 n^2 V \cdot H^2}{2 \cdot n^2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V.$$

De aquí sigue directamente (43.20).

3. De forma análoga a como en el § 37.8 fue obtenida la expresión para la fuerza de interacción entre las placas del condensador (37.26), podemos calcular la fuerza, con la que una placa metálica se atrae por los polos de un electroimán:

$$F = - \frac{B^2}{2\mu\mu_0} S. \quad (43.21)$$

Esta expresión es válida sólo en el caso, cuando la inducción del campo magnético en la holgura entre el núcleo del electroimán y la placa no se diferencia de la inducción del campo en el núcleo, con otras palabras, si el flujo magnético no se dispersa. Con este fin, la holgura debe ser muy estrecha, de forma que su anchura sea mucho menor que el diámetro del núcleo del electroimán.

4. Ya hemos indicado reiteradamente, que la división de un campo electromagnético único en las componentes eléctrica y magnética se determina por el sistema de referencia. Por esta razón, la expresión para la densidad de la energía del campo electromagnético, también se debe escribir en la forma

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (43.22)$$

Y sólo en ciertos casos particulares, examinados más arriba, uno u otro sumando puede resultar nulo.

### § 43.12. Conexión de un circuito con inductancia

1. Confeccionemos un circuito de corriente continua formado por dos ramificaciones paralelas. En una de ellas conectamos en serie una lámpara de incandescencia y una bobina con gran inducción  $L$  y resistencia óhmica  $R$ , mientras que en la segunda una lámpara igual y un resistor con la misma resistencia. Al cerrar el interruptor observaremos que en el circuito con el resistor la lámpara se enciende de inmediato, mientras que en el circuito con la bobina, la lámpara se enciende gradualmente y sólo después de cierto tiempo  $\Delta t$  se encenderá normalmente. Es decir, en el circuito con inductancia la corriente crece de forma gradual, como se muestra en la fig. 43.6.

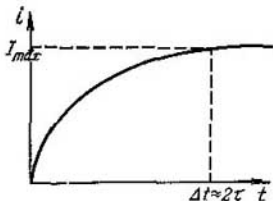


Fig. 44.1.

La causa reside en que al crecer la corriente, en la bobina surge una fem de autoinducción que, de acuerdo con la ley de Lenz, obstaculiza el crecimiento de la corriente. Para este circuito la ley de Ohm se escribe del modo siguiente:

$$i = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_L}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{L}{R} \frac{\Delta i}{\Delta t}.$$

Sólo después de pasar el tiempo  $\Delta t$ , la corriente alcanza su máximo valor  $I_{m\acute{a}x} = \mathcal{E}/R$  y su crecimiento cesa.

2. Apreciemos el tiempo de crecimiento de la corriente. De acuerdo con la ley de la conservación de la energía, el trabajo ejecutado por la fuente de corriente al desplazarse la carga por el circuito, en parte se dirige a la variación de la energía interna del conductor (calor de Joule), en parte, al aumento de la energía del campo magnético:

$$A = Q + W_m,$$

bien

$$\mathcal{E} I_m \Delta t = I_m^2 \Delta t + L I_{m\acute{a}x}^2 / 2,$$

donde  $I_{m\acute{a}x} = \mathcal{E}/R$  es la corriente máxima en el circuito,  $I_m$ , la intensidad media de la corriente en el transcurso del intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Suponiendo con aproximación que  $I_m \approx I_{m\acute{a}x}/2 = \mathcal{E}/2R$ , obtenemos

$$\frac{\mathcal{E}^2 \Delta t}{2R} \approx \frac{\mathcal{E}^2 R \Delta t}{4R^2} + \frac{L \mathcal{E}^2}{2R^2}.$$

De aquí se desprende, que la corriente en el circuito alcanza su valor máximo después de un intervalo de tiempo igual, aproximadamente, a

$$\Delta t \approx 2L/R = 2\tau. \quad (43.23)$$

Como al cargar el condensador (§ 39.8), la expresión  $\tau = L/R$  recibe el nombre de *constante de tiempo* para un circuito constituido de una bobina y un resistor o de otra forma, *tiempo de relajación*. Esta magnitud es la característica del intervalo de tiempo, en el transcurso del cual en la red se establece una corriente continua.

## Capitulo 44

### CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA DE LOS SÓLIDOS

#### § 44.1. Base experimental de la teoría electrónica de conductividad de los metales

1. Ya más de una vez hemos hecho uso de la representación acerca de que la conductividad de los metales está condicionada por los electrones libres, que con facilidad pueden desplazarse entre los iones, situados en los nudos de la red cristalina. Examinemos ahora los experimentos, que se basan en esto.

Los primeros experimentos fueron realizados por E. Riecke en 1901. Tres cilindros, dos de cobre y uno de aluminio, con las caras bien rectificadas, se colocaban uno sobre otro, uniéndolos después a una fuente de corriente. Durante un año por los conductores fluía una corriente de  $\sim 0,1$  A, de forma que la carga total que pasó por el conductor era superior a  $3,5 \cdot 10^6$  C. Sin embargo, en los conductores no se produj ningún cambio químico. De aquí se desprende que la corriente en los metales está condicionada por el movimiento de partículas que no están relacionadas con la estructura química de los metales. Los iones no pueden ser esas partículas, ya que éstos son diferentes en cada sustancia, por lo que tales pueden sólo ser los electrones.



2. El experimento decisivo fue realizado en 1916 por T. Stuart y R. Tolmen, que midieron la carga específica de las partículas, que aseguran la conductividad de los metales. La esencia del experimento consistía en lo siguiente. Sobre una bobina se enrollaba un largo conductor, unido a un galvanómetro (fig. 44.1). La bobina se ponía en rápida rotación, frenándola después con rapidez.

Durante el proceso de frenado el sistema de referencia, relacionado con el conductor, es no inercial. Como fue

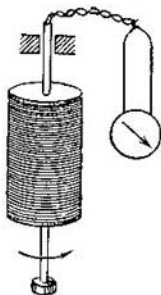


Fig. 44.2.

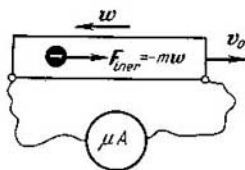


Fig. 44.3.

mostrado (§§ 24.1—24.3), en los sistemas no inerciales de referencia sobre los cuerpos actúa una fuerza de inercia  $F_{iner} = -mw$ , donde  $w$  es la aceleración del sistema de referencia. Bajo la acción de esta fuerza, las partículas libres, que se encuentran en el metal, se desplazarán en la dirección de movimiento del conductor, del mismo modo que el pasajero se desplaza cuando el vagón se frena bruscamente. En tal caso, en el conductor surge corriente, cuya dirección depende del signo de dichas partículas (fig. 44.2). La fuerza de inercia es aquí la fuerza exterior, por lo que la fem

$$\mathcal{E} = A_{c. ext}/q = F_{iner}l/q = -mw l/q, \quad (44.1)$$

donde  $q$  es la carga de la partícula libre,  $m$ , su masa,  $l$ , la longitud del conductor.

Como la longitud del conductor y la magnitud de la aceleración durante el frenado son conocidas, la carga específica de la partícula puede ser determinada midiendo la fem.

No obstante, resultó que la medición de la fem está relacionada con grandes errores, mientras que con mayor precisión es posible medir la carga total  $Q$  que pasa por el galvanómetro durante el frenado del conductor.

3. De acuerdo con la definición de la intensidad de corriente (39.13), podemos escribir:  $Q = it$ , donde  $t$  es el tiempo de frenado. Pero según la ley de Ohm

$$i = \mathcal{E}/R = -m\omega l/qR,$$

donde  $R$  es la resistencia sumaria del conductor y el galvanómetro. La aceleración

$$w = (v - v_0)/t = -v_0/t,$$

ya que después del frenado el conductor se para.

Así, pues, la carga específica de la partícula es igual a

$$q/m = v_0 l / QR. \quad (44.2)$$

El signo de la carga de la partícula se determina según el signo de la carga  $Q$  que pasa por el galvanómetro.

4. El experimento mostró que las partículas libres que aseguran la conductividad en los metales, tienen carga negativa. Su carga específica resultó ser iguala: para el cobre  $1,60 \cdot 10^{11}$  C/kg, la plata  $1,49 \cdot 10^{11}$  C/kg, el aluminio  $1,54 \cdot 10^{11}$  C/kg. Como vemos la divergencia entre los resultados obtenidos y la carga específica del electrón, igual a  $1,76 \cdot 10^{11}$  C/kg, constituye del 9 al 15 %, lo que para tan complicados experimentos no sale de los márgenes de los errores. De aquí, con suficiente certeza, se puede afirmar que la corriente en los metales es el resultado del movimiento ordenado de los electrones libres.

#### § 44.2. Efecto Hall

1. En el § 39.2 fue deducida la dependencia entre la densidad de la corriente y la concentración de los electrones libres en el conductor. Resultó, que con ayuda del fenómeno descubierto en 1880 por E. Hall, dicha concentración se puede medir.

La esencia del efecto Hall consiste en lo siguiente. Hagamos una placa de material homogéneo (por ejemplo, metal) en forma de un paralelepípedo y mediante cierta fuente de corriente creamos en dicha placa un campo eléctrico

co homogéneo a lo largo del eje de abscisas; entonces por la placa, en esa misma dirección, fluirá la corriente. Cualquier plano, perpendicular al eje de abscisas, es una superficie equipotencial y la diferencia de potencial entre las caras 1 y 2 es igual a cero (fig. 44.3). Si ubicamos dicha placa en un campo magnético de forma que el vector de inducción  $B$

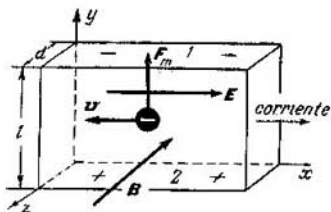


Fig. 44.4.

sea paralelo al eje de la  $z$ -coordenada, entre las caras 1 y 2 surgirá una diferencia transversal de potencial, llamada tensión (o diferencia de potencial) de Hall:

$$\Delta\varphi_H = R_H i B / d, \quad (44.3)$$

donde  $d$  es el grosor de la placa,  $i$ , la intensidad de corriente y  $B$ , la inducción del campo magnético. La magnitud  $R_H$  es la *constante de Hall*.

2. La causa de la aparición de la diferencia transversal de potencial radica en lo siguiente. El movimiento ordenado de los electrones en la placa transcurre en la dirección perpendicular al vector de inducción del campo magnético, a una velocidad media  $\bar{v}$ . Sobre los electrones en movimiento actúa la fuerza de Lorentz  $F_m = eB\bar{v}$  (41.1), que los desplaza a la cara superior de la placa (fig. 44.3). Como resultado, en las caras de la placa se crea una carga excesiva: en la superior, negativa y en la inferior, positiva. De este modo, a lo largo del eje de ordenadas comienza a actuar un campo eléctrico de intensidad  $E_y$ , que se opone al desplazamiento de los electrones hacia la cara superior. El equilibrio se restablece cuando la fuerza eléctrica equilibre la de Lorentz. De aquí sigue que  $F_m = F_e$  o bien

$$eB\bar{v} = eE_y. \quad (44.4)$$

La tensión de Hall

$$\Delta\varphi_H = E_y l = \bar{v}Bl. \quad (44.5)$$

Expresando en (39.17) la velocidad media del movimiento ordenado de electrones por la intensidad de corriente  $\bar{v} = i/(enS) = i/(endl)$  y poniéndola en (44.5) obtenemos

$$\Delta\varphi_H = \frac{1}{en} \frac{iB}{d}. \quad (44.6)$$

3. Comparando (44.3) y (44.6), vemos que la constante de Hall es determinada por la concentración de electrones y la carga de los portadores de la corriente:

$$R_H = 1/en. \quad (44.7)$$

Así, pues, después de determinar en el experimento la constante de Hall, calcularemos con facilidad la concentración de electrones libres en la sustancia.

Tabla 44.1

	Constante de Hall $R_H \cdot \text{m}^3/\text{C}$	Conductividad específica $\gamma, \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$	Concentración de electrones de conducción $n = \frac{1}{eR_H}, \text{m}^{-3}$
Aluminio	$0,30 \cdot 10^{-10}$	$4,08 \cdot 10^7$	$20,8 \cdot 10^{28}$
Cobre	$0,55 \cdot 10^{-10}$	$6,41 \cdot 10^7$	$11,4 \cdot 10^{28}$
Litio	$1,70 \cdot 10^{-10}$	$1,17 \cdot 10^7$	$3,67 \cdot 10^{28}$
Sodio	$2,50 \cdot 10^{-10}$	$2,48 \cdot 10^7$	$2,50 \cdot 10^{28}$
Óxido de zinc	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$3,0 \cdot 10^2$	$3,9 \cdot 10^{28}$
	Concentración de átomos $n_0 = \frac{\rho N_A}{A}, \text{m}^{-3}$	Número medio de electrones libres por átomo $\nu = n/n_0$	Movilidad de los electrones $b = \gamma R_H, \text{m}^2\text{B}^{-1}\text{s}^{-1}$
Aluminio	$6,03 \cdot 10^{28}$	3,46	$1,2 \cdot 10^{-3}$
Cobre	$8,49 \cdot 10^{28}$	1,34	$3,5 \cdot 10^{-3}$
Litio	$4,60 \cdot 10^{28}$	0,80	$2,0 \cdot 10^{-3}$
Sodio	$2,54 \cdot 10^{28}$	0,99	$6,2 \cdot 10^{-3}$
Óxido de zinc	$\sim 4 \cdot 10^{28}$	$\sim 10^{-5}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$

4. Recibe el nombre de *movilidad*  $b$  de la *partícula* la razón entre la velocidad media de su movimiento ordenado y la intensidad del campo eléctrico (véase (39.26)):

$$b = \bar{v}/E = \gamma/en = \gamma R_H. \quad (44.8)$$

De forma que conociendo la conductividad específica del metal y la constante de Hall, puede ser hallada la movilidad de los electrones de conducción. Para ciertos metales se aducen en la tabla 44.1 los resultados de los experimentos. Aquí  $\rho$  es la densidad del metal,  $A$ , su masa atómica,  $N_A$ , la constante de Avogadro (§ 26.9).

5. De la tabla vemos que los metales monovalentes—litio y sodio—tienen por término medio cerca de un electrón libre por átomo; el aluminio trivalente, cerca de tres electrones libres; el cobre, que puede ser tanto mono como bivalente, tiene algo menos de electrón y medio por átomo.

La movilidad de los electrones es pequeña y, por consiguiente, también lo es la velocidad de su movimiento ordenado. En efecto, la intensidad del campo eléctrico en los metales rara vez es mayor que 1 V/m y la velocidad media del movimiento ordenado  $\bar{v} = bE$  no supera 1 mm/s, siendo con frecuencia mucho menor.

Las mediciones de la constante de Hall fueron realizadas en extenso intervalo de temperaturas. Resultó que en los metales la constante de Hall no es función de la temperatura y, por consiguiente, la concentración de electrones libres no depende de la temperatura. Esto significa, que el movimiento térmico no juega papel alguno en la formación de los electrones libres en los metales.

6. Mucho más complicados fenómenos se observan al realizar el experimento de Hall con sustancias, llamadas *semiconductores*: selenio, silicio, germanio, los óxidos de una serie de metales, etc. En la tabla 44.1 se dan los datos característicos de un semiconductor, el óxido de zinc. Vemos que la constante de Hall es aquí mayor que para los metales unas  $10^6$  veces; la conductividad específica,  $10^8$  veces menor; aproximadamente la concentración de los electrones libres es una cantidad igual de veces menor; por consiguiente, en este caso, sólo una cantidad insignificante de átomos está ionizada. Pero lo principal no es todo esto. La particularidad principal de los semiconductores consiste en que la constante de Hall decrece bruscamente al aumentar la tempera-

tura, por lo que la concentración de los electrones libres crece al aumentar la temperatura del semiconductor. La segunda particularidad característica de los semiconductores radica en que el efecto Hall tiene signo opuesto: para las mismas

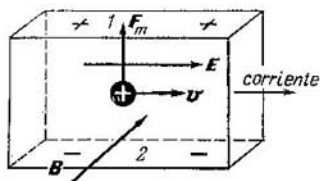


Fig. 44.5.

direcciones de la corriente y la inducción de campo magnético como en la fig. 44.3, la cara superior de la placa tiene carga positiva (fig. 44.4). La única explicación razonable puede ofrecerse, si suponemos que la conductividad de estas sustancias se realiza a cuenta del movimiento de cargas

no negativas, sino positivas (§ 77.2).

Llegamos a una paradoja que la teoría electrónica clásica no puede explicar. Con mayor detalle, la teoría cuántica de la conductividad de los semiconductores será estudiada en el cap. 77.

### § 44.3. Gas electrónico

1. En 1900, P. Drude creó la teoría electrónica de la conductividad de los metales. Dicha teoría fue posteriormente desarrollada por H. Lorentz sobre la base de la estadística de Maxwell—Boltzmann. Desde el punto de vista de la teoría de Drude—Lorentz el conjunto de los electrones libres puede ser considerado como cierto gas ideal, al que fue dado el nombre de *gas electrónico*. Drude y Lorentz postularon que las propiedades del gas electrónico eran análogas a las de un gas perfecto corriente.

Más adelante veremos que la analogía entre el gas electrónico y el ideal es muy simplificada y, precisamente para los metales, conduce a una serie de dificultades (véase el cap. 75). Sin embargo, en este capítulo, vamos a considerar el conjunto de electrones de conducción como un gas ideal, lo que nos permitirá explicar por métodos elementales el mecanismo de una serie de fenómenos que transcurren en los metales y semiconductores.

2. La energía media de movimiento térmico de los electrones se calcula en la teoría clásica por la misma fórmula con la que calculábamos la energía cinética media de las

moléculas de un gas ideal monoatómico (véase (26.8)):

$$\bar{\epsilon} = m\bar{u}^2/2 = 3/2 kT.$$

A la temperatura ambiente ( $T \approx 300$  K)

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 10^6 \text{ m/s.}$$

3. Desde el punto de vista de las representaciones cuánticas, para calcular la energía cinética media del electrón de conducción hay que hacer uso de la fórmula (16.26). Para la velocidad del movimiento caótico de dichos electrones, tenemos

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{2\bar{\epsilon}}{m}} = \sqrt{\frac{\hbar^2 n^{2/3} \cdot 2}{2m \cdot m}} = \frac{\hbar n^{1/3}}{m} \approx \frac{10^{-34} \cdot 10^{10}}{10^{-30}} \approx 10^6 \text{ m/s.}$$

Esto es en un orden mayor que según el cálculo clásico. La temperatura del gas electrónico

$$T_{\text{elec}} = \frac{2\bar{\epsilon}}{3k} = \frac{2\hbar^2 n^{2/3}}{2m \cdot 3k} \approx \frac{10^{-68} \cdot 10^{20}}{3 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ K,}$$

o que es en dos órdenes mayor que la temperatura de la red. Pero, a pesar de todo, el intercambio de calor entre el gas electrónico y la red cristalina no transcurre (§ 44.6).

4. Vemos que la velocidad media del movimiento térmico de los electrones supera la velocidad media de su movimiento ordenado (§§ 39.2 y 44.2) ¡unas  $10^9$  veces! Sobre esta base podemos representarnos el mecanismo de surgimiento de la corriente. Mientras en el conductor no haya campo eléctrico, los electrones se mueven desordenadamente en todas las direcciones. Al aparecer el campo, los electrones comienzan a desplazarse lentamente en la dirección opuesta a la de las líneas de fuerza. Con frecuencia, este movimiento lento y ordenado recibe el nombre de "deriva"; prácticamente no influye en el movimiento térmico de las partículas.

No hay que confundir la velocidad de deriva de los electrones con la velocidad de la corriente eléctrica. Por velocidad de la corriente se entiende la velocidad de transmisión de la energía eléctrica a lo largo de los conductores. La experiencia y la teoría muestran que la velocidad de la corriente es muy grande y es igual a la de propagación de las ondas electromagnéticas (§ 59.1). La energía desde la fuente al consu-

midor es transmitida por el campo electromagnético, mientras que el conductor, con los electrones en deriva, sólo sirve de "guía" para el flujo de energía.

#### § 44.4. Deducción de la ley de Ohm de la teoría electrónica

1. Con ayuda del modelo del gas electrónico podemos aclarar, por qué en los metales y semiconductores se cumple la ley de Ohm. La idea de la deducción consiste en lo siguiente.

Al no haber campo eléctrico en el conductor, la energía cinética de un electrón concreto  $K_{0i} = mu_i^2/2$ , donde  $u_i$

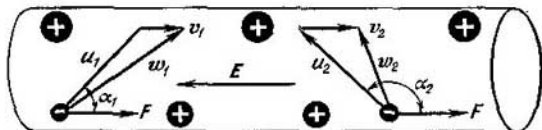


Fig. 44.6.

es la velocidad de movimiento térmico del electrón con el número  $i$ . A cuenta del campo eléctrico de una intensidad  $E$ , surge la deriva de los electrones en contra del campo a una velocidad media de  $\bar{v}$ . Al final del recorrido libre, la velocidad del movimiento de deriva del electrón dado será igual a  $v_i$ , su velocidad total respecto de la red iónica,  $w_i = u_i + v_i$ , mientras que la energía cinética  $K_i = mw_i^2/2$ .

Como vemos en la fig. 44.5,  $w_i^2 = u_i^2 + 2u_iv_i \cos \alpha_i + v_i^2$ , por lo que la energía cinética del electrón al final del recorrido

$$K_i = \frac{1}{2}mw_i^2 = \frac{1}{2}mu_i^2 + mu_iv_i \cos \alpha_i + \frac{1}{2}mv_i^2.$$

Así, pues, la variación de la energía cinética de un electrón concreto a cuenta de la acción del campo eléctrico por la longitud del recorrido libre

$$\Delta K_i = K_i - K_{0i} = mu_iv_i \cos \alpha_i + \frac{1}{2}mv_i^2. \quad (44.9)$$

Para obtener el incremento medio de la energía cinética de los electrones  $\overline{\Delta K}$  es preciso mediar (44.9) por todos los



números, para lo que hay que escribir dicha expresión para cada electrón, sumarlas todas y dividir las por el número de electrones  $N$ :

$$\begin{aligned}\overline{\Delta K} &= \frac{1}{N} (\Delta K_1 + \Delta K_2 + \dots + \Delta K_N) = \\ &= \frac{1}{N} (mu_1 v_1 \cos \alpha_1 + mu_2 v_2 \cos \alpha_2 + \dots \\ &\dots + mu_N v_N \cos \alpha_N) + \frac{1}{N} \left( \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \dots + \frac{mv_N^2}{2} \right).\end{aligned}$$

Pero para la enorme cantidad de electrones, en movimiento por completo desordenado en todas las posibles direcciones, los cosenos recorren todos los valores de  $+1$  a  $-1$ , por lo que la suma en el primer paréntesis se reduce a cero. Designando:

$$v^2 = \frac{1}{N} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2),$$

obtenemos

$$\overline{\Delta K} = \frac{1}{2} m v^2, \quad (44.10)$$

donde  $v$  es la velocidad final promedia de deriva del electrón. Tomando en consideración que con  $E = \text{const}$  la deriva es un movimiento uniformemente acelerado, para la velocidad media de deriva  $\bar{v} = v/2$  (§ 4.6).

2. Como ya sabemos, la variación de la energía cinética es igual al trabajo de la fuerza (§ 16.14):

$$\Delta K_i = A_i = F l_i = e F l_i,$$

donde  $l_i$  es la proyección del desplazamiento del electrón dado en la dirección de acción de la fuerza. Como se deduce de la fig. 44.5, durante el tiempo del recorrido libre  $\Delta t_i$  la proyección

$$l_i = u_i \Delta t_i \cos \alpha_i + \frac{1}{2} v_i \Delta t_i.$$

Aquí, se ha tenido en cuenta que el electrón se mueve uniformemente acelerado y la velocidad media de su recorrido libre es igual a  $v_i/2$ . Para mediar la magnitud del trabajo por todos los electrones, sumemos de nuevo todos los trabajos y

dividámoslos por el número de electrones:

$$\overline{\Delta K} = \overline{A} = \frac{eE}{N} [(u_1 \Delta t_1 \cos \alpha_1 + u_2 \Delta t_2 \cos \alpha_2 + \dots \\ \dots + u_N \Delta t_N \cos \alpha_N) + \frac{1}{2} (v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \dots + v_N \Delta t_N)].$$

Por las consideraciones indicadas más arriba, la suma en el primer paréntesis es igual a cero.

Si por definición introducimos *el tiempo medio del recorrido libre*

$$\tau = \frac{1}{Nv} (v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \dots + v_N \Delta t_N),$$

la expresión para el incremento medio de la energía cinética tomará el aspecto

$$\overline{\Delta K} = \frac{1}{2} eE v \tau. \quad (44.11)$$

3. Si igualamos (44.10) y (44.11), obtenemos  $v = eE\tau/m$ , mientras que para la velocidad media de deriva

$$\bar{v} = eE\tau/(2m). \quad (44.12)$$

Considerando, que la velocidad térmica  $\bar{u}$  es, aproximadamente,  $10^8 \dots 10^9$  veces mayor que la de deriva, determinamos la longitud media del recorrido libre del electrón:

$$\lambda = \bar{u}\tau. \quad (44.13)$$

Entonces, la velocidad media de deriva

$$\bar{v} = eE\lambda/(2m\bar{u}),$$

mientras que la movilidad del electrón (39.26)

$$b = \bar{v}/E = e\tau/(2m) = e\lambda/(2m\bar{u}). \quad (44.14)$$

Comparando (44.14) con los valores de las movilidades obtenidas de modo experimental, veremos que la longitud media del recorrido libre del electrón es igual a  $10^{-7} \dots 10^{-8}$  m, lo que es 100—1000 veces mayor que las distancias entre los nudos de la red cristalina de los metales. Las causas de este fenómeno serán aclaradas en el § 75.9, donde examinaremos la teoría cuántica de la conductividad de los metales.

4. Poniendo (44.12) o (44.12') en la expresión para la densidad de corriente (39.18), obtendremos

$$j = \frac{e^2 n \tau}{2m} E = \frac{e^2 n \lambda}{2m \bar{u}} E. \quad (44.15)$$

La concentración de los electrones y el tiempo de su recorrido libre no dependen en los metales de la intensidad del campo eléctrico. De aquí se desprende que la densidad de corriente en los metales es proporcional a la intensidad de corriente, lo que significa que esta es la *ley de Ohm* (39.24).

Para la conductividad específica y la resistencia específica

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{e^2 n \tau}{2m} = \frac{e^2 n \lambda}{2m u}, \\ \rho &= \frac{1}{\gamma} = \frac{2m}{e^2 n \tau} = \frac{2m u}{e^2 n \lambda}. \end{aligned} \quad (44.16)$$

El análisis de las expresiones (44.16) permite aclarar ciertas singularidades de los metales y semiconductores, en particular la dependencia entre conductividad y la temperatura y la estructura de la red cristalina.

#### § 44.5. Conductividad de los metales y los semiconductores

1. Como sabemos de la práctica, la conductividad de los metales es unos cinco órdenes mayor que la de los semiconductores. La causa de esta enorme diferencia puede ser explicada con ayuda de la teoría electrónica.

En todos los sólidos, las distancias entre los nudos de la red cristalina son aproximadamente iguales, por lo que las longitudes medias del recorrido libre de los electrones de conducción no pueden ser muy diferentes para diversos sólidos. Por otro lado, la constante de Hall para los metales es menor que para los semiconductores  $10^5$  veces, por consiguiente, tantas veces mayor será la concentración de los electrones de conducción. Precisamente tantas veces mayor será también su conductividad específica (tabla 44.1), lo que en absoluto concuerda con la fórmula (44.16).

2. La resistencia específica de los metales puros es varias veces menor que la de las aleaciones (tabla 44.2).

En el § 75.9, sobre la base de representaciones cuánticas aclararemos la causa de la dependencia entre la conductividad del cuerpo y el grado de perfección de su red cristalina. Resulta que la presencia en la red de impurezas y defectos, así como las singularidades de las oscilaciones térmicas de las partículas del sólido, provocan la disminución de la

Tabla 44.2

		$\rho$ (a 0°C), $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{in}$	$\alpha$ (de 0°C a 100°C), $10^{-3} \text{K}^{-1}$
Metales	Aluminio	0,0245	4,5
	Hierro	0,089	6,5
	Cobre	0,0156	4,3
	Platino	0,0984	3,92
	Rodio	0,043	4,4
	Níquel	0,0614	6,8
	Cromo	0,127	—
Aleaciones	Platino—rodio (90/10)	0,187	1,66
	Níquel—cromo (80/20)	1,03	1,0
	Acero	0,12 ... 0,45	3,3 ... 1,5
	Constantán	0,48	0,02

longitud del recorrido libre del electrón y, por lo tanto, la disminución de la conductividad.

3. La experiencia muestra que al aumentar la temperatura y al haber impurezas, la resistencia de los semiconductores disminuye bruscamente lo que en principio los distingue de los metales. La causa reside en que cuando en los semiconductores hay impurezas o al aumentar la temperatura, crece de forma considerable la concentración de los electrones de conducción, lo que se deduce de los experimentos para determinar la constante de Hall en estas sustancias. El aumento de la concentración de los electrones de conducción, sobrecubre el efecto de la disminución de la longitud del recorrido libre y la resistencia decrece.

En lo que concierne a la causa de que en los metales la concentración de electrones de conducción no depende de la temperatura y las impurezas, mientras que en los semiconductores sí depende, ésta no puede ser explicada por la teoría electrónica clásica. En el cap. 75 serán expuestas las nociones cuánticas acerca de dicho efecto.

#### § 44.6. Deducción de la ley de Joule—Lenz

1. En el § 39.7 obtuvimos la expresión (39.33) para calcular la variación de la energía interna de un conductor por el que pasa corriente. No obstante, el mecanismo del calen-

tamiento del conductor no fue explicado. La teoría electrónica explica este fenómeno del modo siguiente.

Acelerado por el campo eléctrico, el electrón adquiere al final del recorrido libre una energía cinética excesiva  $\overline{\Delta K}$  y choca con un ion, cuya masa es miles de veces mayor que la del electrón.

Como resultado de la colisión, la energía excesiva del electrón se transmite al ion, por lo que éste comienza a oscilar con mayor intensidad. Así, pues, el crecimiento de la energía interna de un conductor con corriente es el resultado del bombardeo de la red iónica con los electrones, acelerados por el campo.

2. La cantidad de calor es calculada de la forma siguiente. Sea  $l$  la longitud del conductor y  $S$ , su sección transversal; la cantidad total de electrones de conducción en él  $N = nSl$ , donde  $n$  es su concentración. Durante el tiempo  $t$  el electrón sufre  $Z = t/\tau = \bar{u}t/\lambda$  choques. La cantidad de calor que en tal caso transmite el gas electrónico a la red cristalina

$$Q = NZ\overline{\Delta K}. \quad (44.17)$$

Poniendo los valores de las magnitudes, obtenemos

$$Q = nSl \frac{\bar{u}t}{\lambda} \frac{mv^2}{2} = nSl \frac{\bar{u}t}{\lambda} \frac{e^2 E^2 \lambda^3}{2m\bar{u}^2}. \quad (44.18)$$

Pero la intensidad del campo se puede expresar por la tensión en el sector, haciendo uso de la expresión (39.10):  $E = u/l$ ; al mismo tiempo, según (44.16)  $e^2 n \lambda / 2m\bar{u} = 1/\rho$ , donde  $\rho$  es la resistencia específica.

Así, pues,

$$Q = \frac{S}{\rho l} u^2 t = \frac{u^2 t}{R} = i^2 R t. \quad (44.19)$$

3. El mecanismo de transmisión de la energía del gas electrónico a la red cristalina no es tan sencillo como fue más arriba descrito. En verdad, ¿por qué al chocar el electrón contra el ion, a éste se le transmite precisamente la energía excesiva del movimiento ordenado y no una energía mayor o menor? Por un lado sabemos que, aun al no haber corriente en el conductor, los electrones de conducción poseen una enorme energía cinética, que se aprecia por la fórmula para la energía de una partícula localizada (§ 16.7). Si tenemos en cuenta que la concentración de electrones de conducción en los metales  $n \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$  (§ 44.2), obtenemos

$$\overline{K} = \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m} \approx \frac{10^{-68} \cdot 2 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31}} \approx 10^{-19} \text{ J} \approx 1 \text{ eV}.$$

El valor medio del exceso de energía cinética del movimiento ordenado del electrón bajo la acción de los campos eléctricos, con una intensidad de un orden de  $E \approx 1 \text{ V/m}$ , es igual a

$$\overline{\Delta K} = \frac{e^2 E^2 \lambda^2}{2m\mu^2} \approx \frac{1,6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 1 \cdot 10^{-18}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^6} \approx 10^{-30} \text{ J} \approx 10^{-11} \text{ eV.}$$

Así, pues, la energía excesiva del movimiento ordenado del electrón constituye una pequeñísima parte de su energía total ( $\overline{\Delta K}/\bar{K} \approx 10^{-11}$ ). ¿Por qué precisamente ese exceso de energía origina el efecto térmico?

Por otro lado, basándonos en las leyes de la conservación de la energía y la cantidad de movimiento (§§ 17.2—17.4), es posible mostrar que al chocar el electrón con el ion, sólo una pequeña parte de la energía cinética del electrón  $K_{\text{elec}}$  se transforma en la energía cinética del ion  $K_{\text{ion}}$ .

Es fácil cerciorarse de que durante el choque inelástico  $\Delta K_{\text{ion}}/K_{\text{elec}} = m/(M + m)$ , mientras que con el elástico  $\Delta K_{\text{ion}}/K_{\text{elec}} = 4mM/(m + M)^2$ , donde  $m$  y  $M$  son las masas del electrón y el ion, respectivamente. Teniendo en cuenta que  $m/M \approx 10^{-4}$ , vemos que prácticamente  $\Delta K_{\text{ion}}/K_{\text{elec}} \approx m/M \approx 10^{-4}$ . ¿Por qué se transmite no esta parte de la energía del electrón, sino que sólo  $10^{-11}$  de su energía, es decir, mucho menos?

4. Cualitativamente, este fenómeno se explica de la forma siguiente. Los electrones de conducción y la red cristalina forman algo así como dos «gases», cuántico y clásico, que llenan un mismo volumen. Sus temperaturas son muy diferentes. La de la red de un orden de 300 . . . 500 K, la del gas electrónico  $T_{\text{gas}} = \hbar^2 n^{2/3}/3 km \approx 3 \cdot 10^4 \text{ K}$  (§ 44.3). A pesar de tan grande diferencia de temperaturas, cuando no hay corriente entre el gas electrónico y la red no hay intercambio de calor. La cuestión reside en que gracias al principio de incertidumbre, la energía de los electrones de conducción no puede ser menor que la magnitud  $\bar{K} = \hbar^2 n^{2/3}/2m$  (véase (16.26)), que expresa el valor mínimo de la energía de una partícula localizada.

De forma notoria cambia la situación al haber corriente. A cuenta de la acción del campo eléctrico, los electrones adquieren la energía cinética excesiva del movimiento ordenado. Y aunque ese exceso de energía es muy pequeño y el incremento correspondiente de la temperatura es sólo

$$\Delta T_{\text{elec}} = \frac{2\overline{\Delta K}}{3k} \approx \frac{2 \cdot 10^{-30}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ K,}$$

es dicho exceso el que precisamente viola el equilibrio termodinámico. Surge el proceso de intercambio de calor entre el gas electrónico «recalentado» y la red cristalina, y el exceso de energía, que recibe el gas electrónico del campo eléctrico, es transmitido a la red. Esto provoca el calentamiento del conductor, es decir, el desprendimiento de calor de Joule—Lenz.

### § 44.7. Diferencia de potencial de contacto

1. A finales del siglo XVIII, A. Volta observó que entre dos metales en contacto surge una diferencia de potencial de contacto. El origen de este salto de potencial puede ser explicado por la teoría electrónica.

Examinemos dos metales con diferente concentración de electrones ( $n_1 > n_2$ ). Como en el lugar de contacto los dos metales tienen igual temperatura, la velocidad media del movimiento térmico de los electrones será igual en dicho lugar. Para simplificar los razonamientos, supongamos que la longitud del recorrido libre de aquellos es, aproximadamente, igual. A cuenta del movimiento térmico de los electrones, se produce su difusión (§§ 25.4, 25.5). El número de electrones que pasan del primer metal al segundo, es igual a una sexta parte del número de electrones que se encuentran en una capa de grosor  $\lambda$ , es decir,  $N_1 = \frac{1}{6} n_1 S \lambda$ . Del segundo metal al primero pasan  $N_2 = \frac{1}{6} n_2 S \lambda$  electrones. Pero de acuerdo con el planteamiento,  $n_1 > n_2$  por lo que el segundo metal adquirirá más electrones de los que transmite al primero.

Así, pues, como resultado de la difusión de los electrones, un metal tendrá carga positiva y otro, negativa. El campo eléctrico que surge en tal caso, se opondrá a la difusión. La difusión juega aquí un papel semejante al que jugaría un campo exterior que actuara en el lugar de contacto. El paso de los electrones de un metal a otro cesará, cuando la diferencia de potencial creada equilibre la fem del campo exterior.

2. Vamos a apreciar la diferencia de potencial por contacto, partiendo de las siguientes consideraciones. La corriente en la capa de contacto

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e(N_1 - N_2)}{\tau} = \frac{e\lambda S}{6\tau} (n_1 - n_2) = \frac{eS\bar{u}}{6} (n_1 - n_2).$$

Según la ley de Ohm, la diferencia de potencial es igual al producto de la corriente por la resistencia en las capas en contacto:  $R = R_1 + R_2 = \rho_1 \lambda / S + \rho_2 \lambda / S$ , donde  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son sus resistencias específicas. Teniendo en cuenta (44.16), tendremos

$$R = \frac{2m\bar{u}}{e^2 S} \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

Así, pues,

$$\Delta\varphi = iR = \frac{m\bar{u}^2(n_1 - n_2)}{3e} \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right). \quad (44.20)$$

Poniendo  $m\bar{u}^2 = 3kT$  y realizando sencillas transformaciones, obtenemos

$$\Delta\varphi = \frac{kT}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right). \quad (44.21)$$

Vemos que la diferencia de potencial por contacto sólo depende de la temperatura y la composición química de los metales. Las nociones cuánticas de este fenómeno están expuestas en el § 78.1.

### § 44.8. Termoelectricidad

1. Confeccionemos un circuito cerrado de dos metales y mantengamos en todos los puntos de la red la misma temperatura. Resulta que con esta condición, a cuenta de los saltos de potencial de contacto, no puede surgir corriente en el circuito, ya que la fem es en él nula:

$$\mathcal{E} = \Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{21} = \frac{kT}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} - \frac{n_1}{n_2} \right) = 0.$$

Basándonos en los principios primero y segundo de termodinámica, podríamos haber previsto dicho resultado. En efecto, la corriente realiza trabajo, por consiguiente, para su creación es necesaria una fuente de energía. Ésta tampoco puede ser la energía del medio ambiente, ya que de acuerdo con el segundo principio de termodinámica, el intercambio de calor entre los cuerpos a igual temperatura no transcurre (véase el cap. 28).

2. Otro resultado, diferente por completo, se obtendrá si las temperaturas de las zonas de contacto (soldaduras) son diferentes. Sea, por ejemplo,  $T_1 > T_2$ . Entonces la expresión para la fem toma la forma

$$\mathcal{E} = \Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{21} = \frac{k}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right) (T_1 - T_2). \quad (44.22)$$

Aquí vemos que la fem no es igual a cero; por esta causa en el circuito surge corriente termoeléctrica. Este fenómeno fue descubierto por Seebeck en 1821.



La expresión (44.22) se puede escribir así:

$$\mathcal{E} = \alpha (T_1 - T_2) = \alpha \Delta T. \quad (44.23)$$

Aquí,  $\alpha = \frac{k}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right)$  es una magnitud constante que caracteriza las propiedades del contacto de los dos metales dados, la fem  $\mathcal{E}$  recibe el nombre de *fuerza termoelectromotriz* o fem térmica, y  $\Delta T$  es la diferencia de temperatura de las dos soldaduras.

3. La fem térmica que surge durante el contacto de dos metales es muy pequeña. Aunque la fórmula (44.22) ha sido obtenida con ayuda de aproximaciones bastante arbitrarias, puede ser utilizada para la apreciación cualitativa del valor de dicha fem térmica. Tomando las concentraciones  $n_1$  y  $n_2$  ( $\Delta T = 1$  K), por ejemplo, para el cobre y el aluminio de la tabla 44.1, obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{k}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right) \approx \frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{1,61 \cdot 10^{-19}} \left( \frac{21}{11} - \frac{11}{21} \right) \approx \\ &\approx 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ V/K} = 120 \mu\text{V/K}. \end{aligned}$$

El experimento nos ofrece para este par termoelectrónico de metales una magnitud 30 veces menor:  $\alpha = 3,4 \mu\text{V/K}$ .

Si uno de los metales se sustituye por un semiconductor, la fuerza termoelectromotriz ha de aumentar de forma notoria, ya que la concentración de electrones en los metales y semiconductores se diferencia en 4—5 órdenes. Aquí ya no es posible hacer uso de la fórmula (44.22) incluso para los cálculos cualitativos, pero el hecho de que el par termoelectrónico (o termopila) «metal — semiconductor» nos ofrece una fem térmica considerablemente mayor que el par termoelectrónico «metal—metal», se ha confirmado mediante experimentos.

4. Por regla, los pares termoelectrónicos se utilizan para medir temperaturas, en particular en aquellos casos, donde el empleo de los termómetros de dilatación (de líquido) (por ejemplo, de mercurio) está excluido. Las ventajas de los termómetros de par termoelectrónico es su alta sensibilidad; la posibilidad de unirlos a los autorregistradores, que de modo automático registran la variación de la temperatura según el tiempo; pequeñas dimensiones, baja capacidad calorífica propia, así como una amplia gama de las temperaturas que se miden, desde  $+2000^\circ \text{C}$  hasta  $-200^\circ \text{C}$ .

Los pares termoelectrónicos también pueden ser utilizados como fuentes de corriente. Pero su rendimiento es muy bajo (menos del 1%) y su fem, pequeña. No obstante, eligiendo tipos determinados de semiconductores y uniendo las termopilas en serie, formando termocolumnas, puede ser obtenida una fem suficientemente grande, del orden de varias decenas de voltios. Semejantes termocolumnas fueron creadas bajo la dirección de A. F. Ioffe. Pueden funcionar mediante cualquier fuente de calor, por ejemplo, un quinqué y alimentar un receptor de radio.

5. Desde el punto de vista de termodinámica, la termopila es muy parecida a una máquina térmica (véase el cap. 29). Aquí, hay dos cuerpos a diferentes temperaturas, que juegan el papel de foco caliente

y frío, mientras que como sustancia de trabajo se hace uso del gas electrónico. A diferencia de una máquina térmica corriente, donde parte de la energía interna del foco caliente se convierte en mecánica, en la termopila se transforma en la energía de la corriente eléctrica.

6. Como sabemos, si a la máquina térmica se suministra energía mecánica de una fuente externa, ella trabajará en el régimen de bomba térmica (o instalación frigorífica; véase el § 29.8). Por analogía, podíamos esperar que si por una termopila se hace pasar la corriente de una fuente externa, entre las soldaduras deberá surgir diferencia de temperatura. Semejante efecto se observa en los experimentos y recibe el nombre de *efecto Peltier*, en honor del científico que en 1834 lo descubrió.

Para obtener una mayor diferencia de temperatura aquí también hay que utilizar termopila de semiconductores. Los frigoríficos termoeléctricos, en los que se hace uso del efecto de Peltier en los semiconductores, fueron creados en 1954 por un grupo de científicos del Instituto de semiconductores de Leningrado, que dirigía el académico A. F. Ioffe.

#### § 44.9. Trabajo de salida

1. Los electrones que se mueven en el interior del metal, pueden, a veces, salir de sus límites, formando sobre el metal una "nube electrónica". Parte de estos electrones retorna de nuevo al metal, otros de nuevo lo abandonan. Este fenómeno es muy parecido a la evaporación de los líquidos (§§ 35.1, 35.2). La superficie del metal y la nube electrónica forman una capa eléctrica doble, análoga al condensador plano. El grosor de esta capa es igual a varias distancias interatómicas ( $d \approx 10^{-10} - 10^{-9} \text{m}$ ). La diferencia de potencial en esta capa se denomina *salto superficial en la frontera metal - vacío* o bien *diferencia de potencial de contacto* entre el metal y el vacío.

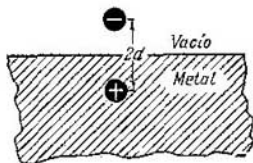


Fig. 44.6.

Para apreciar esta magnitud realizamos el siguiente cálculo aproximado. Imaginémonos que un electrón ha salido del metal; entonces en este último surgirá una carga positiva, igual en módulo a la carga del electrón. Esta carga positiva, recibe el nombre de "imagen eléctrica" del electrón (fig. 44.6). Resulta que la interacción del electrón con el metal es igual a la interacción entre el electrón y su "imagen", es decir, se reduce a la interacción de cargas puntuales, lo que nosotros ya sabemos hacer. De acuerdo con (37.4), para

el salto de potencial de contacto, tenemos (para  $d \approx 5 \times 10^{-10} \text{m}$ )

$$\varphi_{\text{cont}} \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2d} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 36\pi \cdot 10^9}{4\pi \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} \approx 1,4 \text{ V.}$$

2. Para que el electrón que se encuentra en el metal pueda salir de sus límites, es preciso que realice trabajo contra las fuerzas de atracción de su "imagen" y contra las fuerzas de repulsión de la nube electrónica de carga negativa. Este trabajo se llama *trabajo de salida*  $A_0$  y es igual a aquella energía mínima que hay que transmitir al electrón de conducción para que pueda salir del metal al vacío:

$$A_0 = e\varphi_{\text{cont}}. \quad (44.24)$$

El cálculo aproximado nos da para el trabajo de salida  $A_0 \approx \approx 1,5 \text{ eV} = 2,4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , que según el orden de su valor corresponde a los datos experimentales:

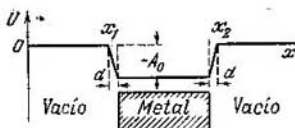


Fig. 44.7.

	$A_0$ , eV		$A_0$ , eV
Litio, sodio, potasio	2,3	Calcio	2,7
Zinc	4,2	Cesio	1,9
Tungsteno	4,5	Bario sobre tungsteno	1,1
Platino	5,3	Cesio sobre tungsteno	1,4
Bario	2,5		

3. La energía potencial del electrón de conducción en el metal, es menor que la de un electrón libre. Suponiendo que la energía potencial del electrón en el vacío es igual a cero, obtenemos que su energía en el metal  $U = -A_0 = -e\varphi_{\text{cont}}$ . Esta energía puede ser representada gráficamente, trazando por el eje de abscisas la coordenada del electrón y en el eje de ordenadas, la energía potencial (fig. 44.7). Aquí, el grosor de la nube "electrónica"  $d$  está muy exagerado. La gráfica tiene la forma de un pozo, que recibe el nombre de "pozo de potencial" (o barrera de potencial). Por regla, cuando se desea indicar que el electrón en el metal tiene energía

potencial negativa, suele decirse que el electrón se encuentra en un "pozo de potencial".

4. Para que el electrón de conducción salga de los límites del metal, es preciso que su energía cinética sea mayor que el trabajo de salida (o, por lo menos, igual a él). El electrón puede recibir esa energía por diversas vías.

Una de ellas es la iluminación del metal. Al recibir energía de la onda luminosa, el electrón puede efectuar el trabajo de salida. Este fenómeno recibe el nombre de *emisión fotoeléctrica* (efecto fotoeléctrico externo), que será examinada en los §§ 68.1—68.3.

La segunda vía consiste en el bombardeo de la superficie del metal con partículas que tengan una energía de varios centenares de electronvoltios.

El tercer método es el aumento de la temperatura del metal. El fenómeno de la salida de electrones de un cuerpo caliente se denomina *emisión termoiónica* (§ 47.1).

#### Capítulo 45

## CAPACIDAD CALORÍFICA Y CONDUCTIVIDAD TÉRMICA DE LOS SÓLIDOS

### § 45.1. Capacidad calorífica

1. Como fue mostrado en los §§ 27.4, 27.5, hay que distinguir para los gases las capacidades caloríficas isócara  $c_V$  e isóbara  $c_p$ , que se diferencian considerablemente entre sí ( $\gamma = c_p/c_V \approx 1,7 \div 1,4$ ). En los sólidos estas capacidades caloríficas se diferencian muy poco: del 3% para el cobre y oro al 8 % para los metales alcalinos. Por este motivo, en adelante no vamos a diferenciar estas magnitudes y hablaremos sencillamente de la capacidad calorífica de los sólidos.

Al analizar la expresión para la energía interna del gas ideal, llegamos a la conclusión de que ella puede ser representada como la suma de las energías cinéticas de las moléculas más un sumando constante, ya que la suma de las energías potenciales de las moléculas y su energía en reposo, es una magnitud constante (§ 27.1). Un cuadro distinto por com-

pleto, advertimos en el sólido. Aquí, las partículas oscilan en los nudos de la red cristalina, y en los procesos oscilatorios la energía cinética se convierte permanentemente en potencial y viceversa. Por consiguiente, los valores medios de la variación de las energías potencial y cinética de las partículas, son iguales entre sí:

$$\overline{\Delta e_p} = \overline{\Delta e_k} = \frac{3}{2} k \Delta T. \quad (45.1)$$

La energía media de las oscilaciones de la partícula es la suma de los valores medios de sus energías potencial y cinética, por lo que

$$\overline{\Delta e} = \overline{\Delta e_p} + \overline{\Delta e_k} = 3k \Delta T. \quad (45.2)$$

2. La energía interna de un kilomol de una sustancia corriente, es igual al producto de la energía media de las oscilaciones de un átomo por la constante de Avogadro. Haciendo uso de la correlación (45.2), obtenemos

$$\Delta U_m = N_A \overline{\Delta e} = 3N_A k \Delta T = 3R \Delta T, \quad (45.3)$$

donde  $R$  es la constante universal de los gases (§ 26.9).

La capacidad calorífica de un mol es, por definición, igual a

$$C_m = \frac{\Delta U_m}{\Delta T} = 3R = 24,9 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 5,95 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}}. \quad (45.4)$$

Hemos obtenido la ley de Dulong — Petit, establecida por ellos en 1819:

*La capacidad calorífica molar de los cuerpos cristalinos químicamente simples es aproximadamente igual a 6 cal/(mol · K).*

3. El calor específico es la razón entre la capacidad calorífica molar y la masa atómica del elemento:

$$c = \frac{C_m}{A} = \frac{3R}{A} = \frac{3N_A k}{N_A m_0} = \frac{3k}{m_0}, \quad (45.5)$$

donde  $m_0$  es la masa de un átomo.

La capacidad calorífica volumétrica es la razón entre la capacidad calorífica molar y el volumen molar:

$$C = \frac{C_m}{V_m} = \frac{3N_A k}{N_A v} = \frac{3k}{v}, \quad (45.6)$$

donde  $v$  es el volumen de una célula elemental del cristal.

En la fig. 45.1. se dan las capacidades caloríficas de ciertas sustancias: aisladores y metales. El análisis de los datos

experimentales nos lleva a la conclusión de que la ley de Dulong — Petit es muy aproximada: se cumple sólo a temperaturas suficientemente altas. A bajas temperaturas la capacidad calorífica de los sólidos disminuye con rapidez y cerca del cero absoluto tiende a cero.

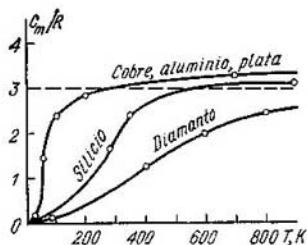


Fig. 45.1.

fig. 45.1. Una teoría más precisa, basada en las representaciones cuánticas, fue creada en 1912 por Debye. En particular demostró que para cada sustancia existe una temperatura característica determinada  $\Theta_D$  (temperatura de Debye), a partir de la cual se cumple la ley de Dulong—Petit:

$$\Theta_D = \frac{2\hbar a}{kd}, \quad (45.7)$$

donde  $a$  es la velocidad del sonido,  $d$ , la distancia característica entre las partículas en la red cristalina.

Calculemos la temperatura de Debye para el aluminio ( $a = 6400$  m/s,  $d = 0,4$  nm):

$$\Theta_D = \frac{2 \cdot 10^{-34} \cdot 6400}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 4 \cdot 10^{-10}} = 230 \text{ K},$$

lo que coincide bien con los datos experimentales (véase la fig. 45.1). Los pequeños valores de la capacidad calorífica del diamante a temperaturas bastante altas, significan que para él la temperatura de Debye es mucho mayor que 1200 K (en realidad  $\Theta_D \approx 2000$  K); esto se explica por el gran valor de la velocidad del sonido en el diamante y las pequeñas distancias entre los átomos ( $a = 1,6 \cdot 10^4$  m/s,  $d = 0,154$  nm).

## § 45.2. Capacidad calorífica de los metales

Es completamente inesperado el resultado que indica que la ley de Dulong — Petit es aplicable a los metales y semiconductores. En efecto, en la fórmula (45.3) supusimos que la energía interna del cristal sólo se determina por la energía

de las oscilaciones de las partículas en los nudos de la red. Pero en los metales y semiconductores hay electrones de conducción, los que consideramos en su conjunto como un gas ideal. Por consiguiente, aquí la energía interna debe ser igual a la suma de las energías de la red y del gas electrónico.

Suponiendo que la energía media del movimiento térmico de los electrones  $\bar{\epsilon}_{\text{elec}} = \frac{3}{2} kT$  y la cantidad de electrones libres que corresponde a un átomo es igual a  $\nu$ , obtenemos para un mol:

$$\begin{aligned} \Delta U_m &= N_A \bar{\Delta \epsilon}_{\text{red}} + \nu N \bar{\Delta \epsilon}_{\text{elec}} = N_A (3k\Delta T + \frac{3}{2}\nu k \Delta T) = \\ &= 3R \Delta T (1 + \frac{1}{2}\nu). \end{aligned}$$

De aquí se desprende la expresión para la capacidad calorífica molar:

$$C_m = 3R (1 + \frac{1}{2}\nu). \quad (45.8)$$

Haciendo uso de los resultados de la tabla 44.1 tendremos que la aportación de los electrones de conducción en la capacidad calorífica de los semiconductores es insignifican- temente pequeña, ya que aquí  $\nu \approx 10^{-5}$ . En lo que se refiere a los metales (§ 75.3), su capacidad calorífica debe en mucho superar a la de los aisladores. En efecto, de acuerdo con (45.8), para el aluminio  $C_m = 7,4 R$ , para el cobre  $C_m = 5R$ , para el litio  $C_m = 4,2 R$ , etc. Sin embargo, esto no corresponde a los datos experimentales, según los cuales la ley de Dulong — Petit es también válida para los metales.

### § 45.3. Conductividad térmica de los aisladores

1. Si en los extremos de una barra se mantiene cierta diferencia de temperatura, transcurrirá la transmisión de energía en forma de calor del extremo caliente al frío. Sea  $l$  la longitud de la barra y  $S$ , el área de su sección transversal. Designemos por  $T_1$  la temperatura del sector caliente y la del frío,  $T_2$ , el eje de abscisas será dirigido a lo largo de la barra. La magnitud  $\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}$  recibe el nombre de *gradiente de temperatura*. Muestra la rapidez de variación de la temperatura a lo largo de la barra. La magnitud  $\Delta Q/(S \Delta t)$  indica que cantidad de calor se transporta por la unidad de área del corte transversal en la unidad de tiempo y denominase *flujo térmico*.

Resultó que el flujo térmico es proporcional al gradiente de temperatura (ley de Fourier):

$$\frac{Q}{S\Delta t} = -K \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

El signo menos ha aparecido a causa de que el flujo térmico es una magnitud positiva, mientras que el gradiente de temperatura, negativa.

Tabla 45.1

Sustancia	Velocidad del sonido $\alpha$ , km/S	Conductividad térmica $K$ , W/(m·K)	$d$ , nm	$\frac{3ka}{d^2}$
Plásticos	2,0 ÷ 2,6	0,1 ÷ 0,4	0,5	0,3
Ladrillo	3,6	0,6 ÷ 1,1	—	—
Vidrio	5,7 ÷ 4,3	1,0 ÷ 0,8	0,5	0,9 ÷ 0,7
Cloruro sódico	4,75	7,1	0,282	2,4
Hielo (−5°C)	3,23	2,2	0,32	1,3
Agua (20°C)	1,47	0,61	0,31	0,64
Acetona (25°C)	1,17	0,16	0,5	0,19
Tetracloruro de carbono	0,93	0,11	0,5	0,15

La magnitud  $K$  se llama *coeficiente de conductividad térmica* o, simplemente, *conductividad térmica* de la sustancia, cuya unidad en el SI es W/(m·K). Los valores característicos de la conductividad térmica de ciertos aisladores se aducen en la tabla 45.1.

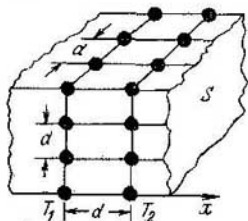


Fig. 45.2.

2. Para el análisis del mecanismo de la conductividad térmica, vamos a examinar dos capas vecinas de átomos (fig. 45.2). Supongamos que la temperatura de la capa izquierda es igual a  $T_1 = T$ , de la derecha  $T_2 = T - \Delta T$ . Respectivamente, las partículas dispuestas en dichas capas tienen las energías medias

$\bar{\epsilon}_1 = 3kT$  y  $\bar{\epsilon}_2 = 3k(T - \Delta T)$ . Como las oscilaciones de las partículas en una capa son más intensas que en la otra, se produce la transmisión de energía de la capa izquierda a la derecha.



Una partícula transmite la energía  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = -3k\Delta T$ . Una capa de área  $S$  contiene  $N = S/d^2$  partículas, donde  $d$  es la distancia entre ellas.

Por lo tanto, la cantidad de calor  $Q = N\Delta\varepsilon = -3kS\Delta T/d^2$ . El flujo térmico

$$\frac{Q}{S\Delta t} = -\frac{3k\Delta T}{d^2\Delta t} = -\frac{3k}{d^2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\Delta T}{\Delta x} = -\frac{3ka}{d^2} \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (45.10)$$

La magnitud  $a = \Delta x/\Delta t$  es la velocidad de transmisión de las oscilaciones térmicas. En principio, ésta no se diferencia de la velocidad de transmisión de capa a capa de cualesquiera otras oscilaciones elásticas, o sea, de la velocidad del sonido.

Comparando (45.9) y (45.10), vemos que el coeficiente de conductividad térmica

$$K = \frac{3ka}{d^2} = \frac{3kad}{v} = Cad, \quad (45.11)$$

donde  $C$  es la capacidad calorífica de la unidad de volumen de la sustancia (§ 45.1).

La expresión (45.11) permite explicar de forma cualitativa la causa de la anisotropía de la conductividad térmica en ciertos monocristales (§ 32.1). La esencia del problema se reduce a que en ellos la distancia entre los átomos y la velocidad del sonido son diferentes en diversas direcciones, por lo que la conductividad térmica también resulta ser distinta.

3. En la última fila de la tabla 45.1 se aduce la conductividad térmica calculada según la fórmula (45.11). Como vemos, para los plásticos, los cuerpos amorfos y líquidos se obtiene buena coincidencia de la teoría con la práctica. Para los cristales, nuestra teoría simplificada ofrece valores de la conductividad térmica que son varias veces menores que los experimentales.

Esto se puede explicar haciendo uso de las consideraciones que expuso Debye en 1914. Las ondas sonoras que percibe el oído humano, tienen una frecuencia en una gama aproximada de 20 Hz ÷ 20 kHz y ultrasonido, de 20 kHz. . . 100 MHz. Estas ondas se propagan por los cristales prácticamente sin dispersarse, de manera análoga a como la luz, sin dispersarse, pasa por medios transparentes como el vidrio o agua. Las oscilaciones térmicas tienen una frecuencia mucho más alta, de un orden de  $10^{10}$  ÷  $10^{13}$  Hz (hipersonidos). Resulta, que las ondas de frecuencia tan alta se dispersan con intensidad, lo mismo que la luz se dispersa en medios turbios. Mientras más intensiva sea la dispersión de las ondas sonoras, que corresponden a las oscilaciones térmicas del cristal, más lentamente transcurre el proceso de transmisión del calor y menor es la conductividad de la sustancia.

Apoyándose en estas representaciones, Debye obtuvo la siguiente expresión para la conductividad térmica

$$K = \frac{1}{3} C_a \Lambda, \quad (45.12)$$

donde  $\Lambda$  es la distancia media que la onda sonora pasa sin dispersión. Si introducimos la noción de que las ondas sonoras se propagan en forma de ciertas porciones elementales, llamadas cuantos del campo sonoro o bien *fonones*, ésta será la *longitud media de recorrido libre de un fonón*. Comparando con (45.11), vemos que  $\Lambda \approx 3d$ .

4. La dispersión de las ondas sonoras por las heterogeneidades de la red cristalina, es análoga a la de los electrones de conducción (§ 44.5). La heterogeneidad de la red es el resultado de la presencia de defectos, así como del carácter singular de las oscilaciones térmicas de las partículas en los nudos de la red (§ 75.9). En los cuerpos amorfos y los líquidos hay ordenación próxima de empaquetamiento de las partículas, por lo que tienen gran cantidad de defectos; por esta razón, aquí la conductividad térmica será pequeña, lo que es confirmado por el experimento (véase la tabla 45.1). En los cristales, donde la ordenación del empaquetamiento es mucho más alta y menor la cantidad de defectos, la onda puede pasar sin dispersión una distancia mayor. Los cálculos nos ofrecen para el cloruro sódico a  $0^\circ \text{C}$  un valor de  $\Lambda = 2,3 \text{ nm} \approx 8d$ , para el cuarzo a lo largo del eje óptico a esa misma temperatura  $\Lambda = 4,0 \text{ nm} \approx 13d$ , etc. Este hecho nos explica la diferencia entre el experimento y el cálculo por la fórmula (45.11).

Con el crecimiento de la temperatura de la sustancia, aumentan las oscilaciones de las partículas en los nudos de la red cristalina y disminuye la distancia que las ondas sonoras pasan sin dispersión. Esto debería llevar a la disminución de la conductividad térmica, lo mismo que al crecer la temperatura disminuye la conductividad eléctrica (§ 44.5). El experimento confirma esta deducción, pero a temperaturas relativamente altas. A temperaturas bajas la conductividad térmica decrece a cuenta de la disminución brusca de la capacidad calorífica (§ 45.1).

## § 45.4. Conductividad térmica de los metales

1. Los datos comparativos de la conductividad térmica y la conductividad específica de ciertos metales a  $T = 273 \text{ K}$  se dan en la tabla 45.2.

Tabla 45.2

Sustancia	$K, \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$	$\gamma, \Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$	$K/\gamma T$
Cobre	385	$64,1 \cdot 10^8$	$2,2 \cdot 10^{-8}$
Aluminio	228	$40,8 \cdot 10^8$	$2,1 \cdot 10^{-8}$
Sodio	135	$23,8 \cdot 10^8$	$2,1 \cdot 10^{-8}$

Como vemos, la conductividad térmica de los metales es muy grande. Ella no se reduce a la de la red, por consiguiente, aquí debe actuar un mecanismo más de transmisión del calor. Resulta, que en los metales puros la conductividad térmica se realiza por completo, prácticamente, a cuenta del gas electrónico y sólo en los metales y aleaciones fuertemente impuros, en los que la conductividad es pequeña, la aportación de la conductividad térmica de la red es considerable.

Para la deducción, examinemos dos capas de metal, el grosor de cada una de ellas es igual a la longitud media del recorrido libre del electrón. Durante el tiempo  $\tau = \lambda/\bar{u}$  de una capa a otra pasan  $N = 1/6 nS\lambda$  electrones. Los que pasan de la capa izquierda a la derecha, transportan una energía  $W_1 = N\bar{\varepsilon}_1$ ; el flujo inverso, una energía  $W_2 = N\bar{\varepsilon}_2$ . De acuerdo con la teoría clásica, la energía media del electrón  $\bar{\varepsilon} = 3/2 kT$ . De aquí se desprende:

$$Q = W_1 - W_2 = N(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2) = 1/6 nS\lambda \cdot 3/2 k (T_1 - T_2). \quad (45.13)$$

El flujo térmico

$$\frac{Q}{S\Delta t} = \frac{1}{4} n\lambda k \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}.$$

Como  $x_2 - x_1 = 2\lambda = 2\bar{u}\Delta t$ , donde  $\bar{u}$  es la velocidad media del movimiento térmico de los electrones,

$$\frac{Q}{S\Delta t} = -\frac{1}{2} n\lambda\bar{u}k \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (45.14)$$

Comparando (45.14) y (45.9), hallamos la expresión para el coeficiente de conductividad térmica del gas electrónico:

$$K = 1/2 n \lambda \bar{u} k. \quad (45.15)$$

2. Por esta fórmula no podemos calcular la conductividad térmica, ya que no conocemos la longitud del recorrido libre del electrón. Sin embargo, dividiendo (45.15) (por (44.16)), obtenemos

$$\frac{K}{\gamma} = \frac{n\lambda\bar{u}k \cdot 2m\bar{u}}{2e^2 n \lambda} = \frac{km\bar{u}^2}{e^2}.$$

Pero  $\overline{m\bar{u}^2} = 3kT$ , entonces

$$\frac{K}{\gamma} = \frac{3k^2 T}{e^2} = 2,23 \cdot 10^{-8} T. \quad (45.16)$$

La expresión obtenida, recibe el nombre de *ley de Wiedemann — Franz* en honor de los científicos que en 1853 descubrieron que a una misma temperatura, la razón entre la conductividad térmica y la conductividad eléctrica específica es igual para todos los metales. La dependencia de esta razón de la temperatura fue mostrada por Lorentz.

3. Comparando los datos experimentales de la tabla 45.2 con la fórmula (45.16), podemos cerciorarnos de que, prácticamente, la conductividad térmica de los metales se determina por completo por la del gas electrónico, que a temperaturas lejanas del cero absoluto, supera centenas de veces la conductividad térmica de la red cristalina.

De este modo, vemos que la teoría electrónica clásica nos permite no sólo explicar de forma cualitativa el mecanismo de la conductividad térmica de los metales, sino que obtener también correlaciones cuantitativas, es decir, la ley de Wiedemann — Franz, que concuerda bien con el experimento.

4. Examinemos los resultados. La idea de Drude — Lorentz, según la cual el conjunto de los electrones de conducción en los metales puede ser considerado como un gas ideal, resultó ser muy fructífera. Sobre esta base fue posible explicar una serie de fenómenos, relacionados con la conductividad eléctrica y la conductividad térmica de los metales. En todos estos casos, suponíamos que el gas electrónico se somete a la estadística de Maxwell — Boltzmann, como un gas monoatómico ideal corriente, por lo que la energía media del movimiento térmico del electrón libre  $\bar{\varepsilon}_{\text{elec}} = \frac{3}{2} kT$ .

Pero semejante suposición, que permite a la perfección explicar, por ejemplo, las singularidades de la conductividad térmica de los metales (ley de Wiedemann — Franz), no permite obtener valores correctos de la capacidad calorífica de los metales. La justeza de la ley de Dulong — Petit para los metales puede ser explicada introduciendo la suposición de que el gas electrónico no toma parte en la capacidad calorífica, pero entonces no se puede explicar las particularidades de la conductividad térmica de los metales.

Esta contradicción nos muestra que la teoría electrónica clásica es en principio infundada. La solución de este problema fue hallado apoyándose en las ideas de la mecánica cuántica y retornaremos a él en el cap. 75.

## CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA DE LOS ELECTRÓLITOS

### § 46.1. Disociación electrolítica

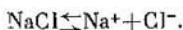
1. La experiencia muestra que *los electrolitos*, o sea, las disoluciones de sales, ácidos o álcalis en el agua, son buenos conductores de la corriente eléctrica. El flujo de la corriente por los electrolitos se acompaña por *la electrólisis*, es decir, la depositación de la sustancia en los electrodos sumergidos en la disolución. Esto quiere decir, que a diferencia de los metales, que poseen conductividad electrónica, los electrolitos son conductores cuya conductividad surge a cuenta del movimiento de los *iones*.

Tanto el agua destilada, como las sustancias que se diluyen en estado sólido (tipo cristal iónico), no contienen iones libres y, por lo tanto, son buenos aisladores. Esto significa, que los iones aparecen sólo en el proceso de interacción de las moléculas de la sustancia diluida con las moléculas de agua. El proceso de descomposición de las moléculas de la sustancia diluida en iones, bajo la acción del solvente, recibe el nombre de *disociación electrolítica*.

2. La causa de la disociación consiste en que la molécula de agua tiene un gran momento dipolar ( $p_e = 6,1 \cdot 10^{-30}$  C·m), por lo que a distancias de un orden de las distancias entre las moléculas en los líquidos ( $r \approx 5 \cdot 10^{-10}$  m), a su alrededor surge un campo eléctrico fuerte. De acuerdo con (10.11), tenemos

$$E \approx \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{6,1 \cdot 10^{-30} \cdot 36\pi \cdot 10^9}{4\pi \cdot 5^3 \cdot 10^{-30}} \approx 4 \cdot 10^8 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

La energía de interacción de un ion de sodio o cloro con la molécula de agua es igual, aproximadamente, a la energía de interacción de los iones en la molécula NaCl. Por esta razón, durante el proceso de disolución de la sal, a cuenta de las colisiones térmicas, transcurre la descomposición de las moléculas en iones:



Las flechas muestran que el proceso transcurre en dos direcciones: junto con *la disociación* de las moléculas en dos

iones se produce el proceso inverso, o sea, *la recombinación* de los iones en una molécula neutra.

Los iones positivos, que se desplazan hacia el cátodo, reciben el nombre de *cationes*, los negativos, *aniones*, es decir, que se mueven hacia el ánodo.

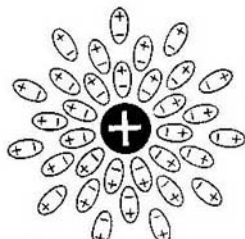


Fig. 46.1.

Señalemos que si las moléculas de la sustancia diluida no se disocian en iones, la disolución no es conductor. Como ejemplo podemos enumerar las disoluciones de azúcar y glicerina, que son buenos aisladores.

3. Las moléculas de agua rodean el ion, formando a su alrededor el llamado *solvato* (fig. 46.1). En primer lugar, esto dificulta la recombinación de los iones y con pequeñas concentraciones de la disolución, todas las moléculas de la sustancia disuelta resultan estar disociadas. En segundo lugar, se dificulta el movimiento de los iones, en realidad por la disolución está en movimiento no un ion negativo, sino el solvato, una especie de bola que consta del ion y de la cubierta de solvato, formada por varias capas de moléculas del solvente.

## § 46.2. Ley de Ohm y conductividad de los electrólitos

1. Si ubicamos en un electrólito dos electrodos y entre ellos se crea diferencia de potencial a cuenta de una fuente de corriente, surge el movimiento orientado de los solvatos. Los de carga positiva se moverán hacia el cátodo a una velocidad  $v_+$ , los negativos, hacia el ánodo a una velocidad  $v_-$ . Por analogía con (39.18) obtenemos la expresión para la densidad de corriente en el electrólito:

$$j = q_+ n_+ v_+ + q_- n_- v_- \quad (46.1)$$

Donde  $q$  es la carga del ion,  $n$ , la concentración de iones.

De la ley de la conservación de la carga eléctrica, sigue que la suma de las cargas de los iones positivos y negativos debe ser igual a cero,

$$q_+ n_+ = q_- n_- = qn = \alpha qn_0. \quad (46.2)$$

Aquí  $n_0$  es la concentración de moléculas de la sustancia disuelta; el coeficiente de disociación  $\alpha = n/n_0$  es la razón entre la concentración de los iones y la concentración de las moléculas de la sustancia.

La densidad de corriente

$$j = qn (v_+ + v_-). \quad (46.3)$$

2. La velocidad del movimiento ordenado de los solvatos puede ser hallada partiendo de las siguientes consideraciones. Sobre el solvato actúa una fuerza eléctrica  $F_e = qE$  y una fuerza de resistencia del rozamiento  $T = 6\pi\eta r v$ , donde  $r$  es el radio del solvato y  $\eta$ , la viscosidad del líquido (§ 11.8). El solvato se mueve uniformemente cuando la fuerza de resistencia equilibra la fuerza eléctrica:  $qE = 6\pi\eta r v$ . De aquí obtenemos la expresión para la velocidad de los solvatos

$$v = \frac{qE}{6\pi\eta r} \quad (46.4)$$

y para su movilidad (véase (39.26))

$$b = \frac{v}{E} = \frac{q}{6\pi\eta r}. \quad (46.5)$$

De (46.5) y (46.3) se desprende que para los electrolitos debe cumplirse la ley de Ohm:

$$j = qn (b_+ + b_-) E = \gamma E, \quad (46.6)$$

lo que confirman los experimentos.

3. La conductividad del electrolito es igual a

$$\gamma = qn (b_+ + b_-) = \frac{\alpha q^2 n_0}{6\pi\eta} \left( \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right). \quad (46.7)$$

Es mucho menor que la conductividad de los metales. Las disoluciones de ácidos tienen la mayor conductividad, ya que el radio del solvato, formado alrededor del ion de hidrógeno (protón), es 5 ÷ 10 veces menor que los radios de otros solvatos.

Al crecer la temperatura, la conductividad de los electrolitos aumenta con bastante rapidez. La causa reside en que al subir la temperatura, crece el grado de disociación de la disolución y disminuye la viscosidad del electrolito.

### § 46.3. Leyes de Faraday

1. El ion es una partícula (átomo, molécula, grupo de átomos) que ha perdido o unido uno o varios electrones. Si la valencia del elemento dado es igual a  $Z$ , la carga del ion  $q = Ze$ .

El número de iones que se depositan en el electrodo es igual a la carga total  $Q$  que ha pasado por el electrólito, dividida por la carga del ion:

$$N = Q/q = Q/Ze.$$

Para el elemento químico, la masa del ion  $m_0$  es igual a la masa atómica del elemento  $A$ , dividida por la constante de Avogadro  $N_A$ . La masa de la sustancia depositada en el electrodo, es igual a la masa del ion multiplicada por el número de iones:

$$m = m_0 N = \frac{A}{N_A} \frac{Q}{Ze} = \frac{1}{N_A e} \frac{A}{Z} Q. \quad (46.8)$$

2. La expresión (46.8) contiene dos leyes que Faraday formuló en 1832, apoyándose en una serie de experimentos.

*Primera ley de Faraday:* la masa de la sustancia depositada en el electrodo es proporcional a la carga eléctrica que pasa por el electrólito:

$$m = KQ = Kit, \quad (46.9)$$

donde  $m$  es la masa de la materia,  $Q$ , la carga,  $i$ , la intensidad de corriente y  $t$ , el tiempo. La magnitud  $K = m/Q$  muestra qué masa de la sustancia se deposita en el electrodo, cuando por el electrólito pasa una carga igual a un culombio. Recibe el nombre de *equivalente electroquímico* de la sustancia.

*Segunda ley de Faraday:* los equivalentes electroquímicos de los elementos, son razón directa de sus equivalentes químicos:

$$K = \frac{1}{F} \frac{A}{Z}; \quad (46.10)$$

donde  $A$  es la masa atómica;  $Z$ , su valencia;  $A/Z$ , el equivalente químico, es decir, la razón entre la masa atómica del elemento y su valencia.

3. La constante de Faraday

$$F = N_A e = 9,648455 \cdot 10^4 \text{C/mol}$$



es numéricamente igual a la carga eléctrica que debe pasar por el electrólito para que en el electrodo se deposite un mol de sustancia monovalente. En efecto, si en la expresión (46.8) hacemos  $Z = 1$  y  $m = A$ , obtenemos  $Q = F$ . Para liberar la sustancia de valencia  $Z$  por el electrólito debe pasar la carga  $Q = ZF$ .

Hallando mediante el experimento la constante de Faraday y conociendo la constante de Avogadro, podemos calcular la carga de un ion monovalente, igual a la del electrón, por la fórmula

$$e = F/N_A. \quad (46.11)$$

#### § 46.4. Elemento galvánico

1. La experiencia muestra que si sumergimos en un electrólito una placa metálica, entre ellos se crea diferencia de potencial. Este fenómeno es análogo al surgimiento de la diferencia de potencial de contacto entre dos metales (§ 44.7), con la sola distinción de que en el electrólito dicha diferencia de potencial está condicionada por la difusión de los iones, en vez de la de los electrones, como sucede al hacer contacto dos metales.

La difusión de los iones está acompañada de una reacción química entre el metal y el electrólito, lo que provoca la variación de la energía interna de las sustancias que toman parte en la reacción. La variación de la energía es proporcional al número de los átomos del metal que han reaccionado, es decir, es proporcional a la masa de metal que se ha diluido en el electrólito:

$$\Delta U = \lambda m,$$

donde  $U$  es la energía interna,  $\lambda$ , la energía específica de la reacción química,  $m$ , la masa de la sustancia (§§ 20.4, 36.7).

2. Resulta que la reacción química transcurre sólo en el caso, cuando el circuito está cerrado y por él pasa la corriente. En este caso se produce la transformación de la energía, desprendida a cuenta de las reacciones químicas, en la energía de la corriente eléctrica.

Haciendo uso de estas consideraciones, podemos calcular la fem del elemento galvánico. De la ley de la conservación de la energía se deduce que la energía de las reacciones químicas, que transcurren en el ánodo y cátodo, es igual al tra-

bajo realizado por las fuerzas exteriores al desplazarse la carga por el circuito:

$$\Delta U_{\text{án}} + \Delta U_{\text{cát}} = A_{\text{e.ext}} = Q\mathcal{E}. \quad (46.13)$$

En los elementos galvánicos sirve de cátodo, por regla, el zinc y durante su disolución en el electrolito se desprende energía, es decir,  $\Delta U_{\text{cát}} > 0$ . Las reacciones de reducción en el ánodo se acompañan por la absorción de energía,  $\Delta U_{\text{án}} < 0$ . Haciendo uso de las correlaciones (46.12) y (46.13), obtenemos

$$\lambda_{\text{cát}} m_{\text{cát}} - \lambda_{\text{án}} m_{\text{án}} = Q\mathcal{E}. \quad (46.14)$$

Pero según la ley de Faraday  $m/Q = K$ , es decir, al equivalente electroquímico. Así, pues,

$$\mathcal{E} = \lambda_{\text{cát}} K_{\text{cát}} - \lambda_{\text{án}} K_{\text{án}}. \quad (46.15)$$

3. Para apreciar el valor de la fem del elemento, tendremos en cuenta que la energía específica de interacción del zinc con el ácido sulfúrico  $\lambda = 6,96 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$  y el equivalente electroquímico del zinc  $K = 3,39 \cdot 10^{-7} \text{ kg/C}$ . Despreciando la reacción en el ánodo obtenemos, aproximadamente,

$$\mathcal{E} \approx \lambda K = 6,96 \cdot 10^6 \cdot 3,39 \cdot 10^{-7} = 2,36 \text{ V}.$$

Para la pila de Grenet y el acumulador ácido (de plomo), el experimento ofrece  $\mathcal{E} \approx 2 \text{ V}$ , para los acumuladores alcalinos 1,8 V, para la pila de Leclanché 1,3 V. Como vemos, hemos apreciado de modo correcto el valor de la magnitud.

## Capítulo 47

### CORRIENTE EN EL VACÍO

#### § 47.1. Emisión termoelectrónica

1. Si cierto volumen se bombea hasta obtener alto vacío, obtendremos un perfecto aislador, ya que en dicho volumen no hay cargas eléctricas libres. No obstante, en el vacío se puede crear conductividad de forma artificial, si en él introducimos las cargas libres de cualquier fuente. Con este fin,

se aplica el fenómeno de la *emisión termoelectrónica*, es decir, la emisión de electrones de la superficie de un metal caliente.

Este fenómeno se puede observar con ayuda del siguiente instrumento. En una ampolla de vidrio se fijan dos electrodos: un fino hilo que sirve de cátodo y un electrodo cilíndrico, el ánodo, (fig. 47.1, a). En la ampolla se crea alto enrarecimiento. De manera esquemática, esta válvula se representa como está mostrado en la fig. 47.1, b.

2. Conectemos la válvula al circuito representado en la fig. 47.2. Aquí Int. es el interruptor, BC, la batería de cal-

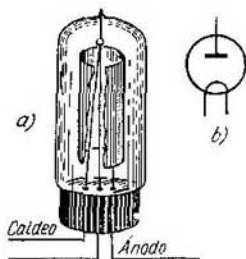


Fig. 47.1.

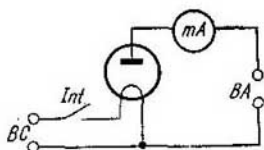


Fig. 47.2.

deo, BA, la batería anódica, mA, el miliamperímetro. Si abrimos el interruptor en el circuito no habrá corriente, incluso al elevar el potencial del ánodo a  $300 \div 400$  V. Al cerrar el interruptor, el hilo que nos sirve de cátodo, se pone incandescente. Con ello en el circuito aparece corriente. De aquí deducimos que del cátodo incandescente salen partículas con carga negativa. La medición de su carga específica llevó a la conclusión de que dichas partículas son *electrones*. Recibieron el nombre de *termoelectrones*.

3. La emisión termoelectrónica es análoga a la evaporación de líquidos (§§ 35.1, 35.2). Lo mismo que las moléculas, cuya energía es mayor que la de evaporación se desprenden del líquido, los electrones cuya energía es mayor que el trabajo de salida, salen del metal. Al crecer la temperatura, el número de semejantes partículas crece con mucha rapidez.

Por fin, lo mismo que sobre la superficie del líquido se forma el vapor saturado, alrededor del cátodo aparece la *nube de electrones*.

4. Mediante la emisión termoelectrónica, puede ser resuelto el problema de la transformación directa de la energía interna de los cuerpos calientes en la energía de la corriente eléctrica. Para ello, en un canal cilíndrico, que sirve de ánodo, se ubica el cátodo en forma de una barra incandescente que se calienta a cuenta de reacciones químicas o nucleares hasta alta temperatura. Los electrones que se emiten de la superficie del cátodo se captan por el ánodo, por lo que entre ellos se crea diferencia de potencial y por la carga exterior fluye la corriente.

### § 47.2. Diodo y su característica

1. La válvula estudiada en el párrafo anterior se denomina *válvula electrónica de dos electrodos* o con brevedad, *diodo*.

Estas válvulas encuentran aplicación con caldeo directo o indirecto. En las primeras, el filamento de caldeo de tungsteno juega, al mismo tiempo el papel de cátodo. Para obte-

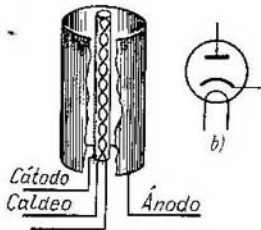


Fig. 47.3.

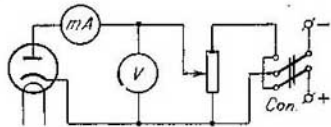


Fig. 47.4.

ner una emisión considerable, el filamento se calienta hasta temperaturas de  $2000 \div 2500$  K. En las válvulas de caldeo indirecto el cátodo es un tubo de níquel cubierto de una capa de óxido de bario, estroncio o calcio. El trabajo de salida de la superficie de semejante cátodo es varias veces menor que el de tungsteno. Esto permite reducir la temperatura de caldeo hasta 1000 K. El calentamiento del cátodo se asegura mediante una pequeña espiral ubicada en el interior del tubo (fig. 47.3, a). La válvula con caldeo indirecto se representa en los esquemas como se muestra en la fig. 47.3, b).

2. Confeccionemos el circuito representado en la fig. 47.4. El resistor está conectado al esquema de tal modo

que, desplazando el contacto móvil, se puede variar el potencial del ánodo de cero (posición inferior del contacto) hasta la tensión en los polos de la batería anódica. El resistor conectado según este esquema recibe el nombre de *potenciómetro*. El conmutador Con. permite obtener en el ánodo bien potencial positivo respecto de cátodo (con la posición en el esquema), o bien negativo, si el contacto se traslada a la posición superior.

Variando uniformemente el potencial de ánodo y anotando cada vez el valor del potencial anódico y la intensidad de corriente, obtendremos los valores de una función que expresa la dependencia entre la corriente y el potencial. La gráfica de dicha función es llamada *característica corriente - tensión* del diodo. En la fig. 47.5 están representadas tres características confeccionadas con diversas temperaturas del cátodo.

3. Ante todo vemos la *no linealidad* de la característica. Esto quiere decir, que la variación de la corriente no es proporcional al cambio del potencial del ánodo, con otras palabras, no se cumple la ley de Ohm. La causa radica en lo siguiente.

Como sabemos (véase (39.18)), la densidad de corriente  $j = env$ . En los metales y electrólitos la concentración de las cargas libres (electrones o iones) no depende de la corriente, mientras que la velocidad media de movimiento de las cargas es proporcional a la intensidad del campo. De aquí se desprende la ley de Ohm (§ 44.4). En la válvula electrónica el problema es otro por completo. Gracias a que alrededor del cátodo se encuentra la nube de electrones, la dependencia entre la velocidad de las cargas y la intensidad del campo, resulta ser más complicada y con el aumento de la corriente, la concentración de las cargas en la nube de electrones disminuye. Como resultado, la dependencia entre la corriente y el potencial en el sector creciente de la característica se expresa por la "ley de  $3/2$ ":

$$i_a = B\varphi_a^{3/2}, \quad (47.1)$$

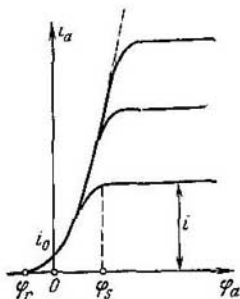


Fig. 47.5.

donde  $B$  es cierta constante que depende de las dimensiones y la forma de los electrodos. Esta ley, obtenida por S. A. Boguslavski e I. Langmuir, será aducida sin demostración.

4. A partir del potencial  $\varphi_s$ , la corriente deja de depender del potencial de ánodo, pero depende de la temperatura del cátodo. Dicha corriente  $i_s$  recibe el nombre de *corriente de saturación*; su magnitud puede ser calculada de las siguientes consideraciones. La densidad máxima de corriente en la válvula es igual al producto de la carga del electrón por el número de electrones que salen por segundo de la unidad de área del cátodo, es decir,

$$j_s = eG, \quad (47.2)$$

donde  $G$  es la velocidad de evaporación. Para calcularla podemos hacer uso de la fórmula (35.4). Con ello, hay que tener en cuenta que de acuerdo con las nociones mecanocuánticas, para el gas electrónico  $\alpha = 2$ . Sustituyendo en (47.2), obtenemos la fórmula de Richardson—Deshmen:

$$j_s = BT^2 e^{-A_0/hT}, \quad (47.3)$$

donde  $A_0$  es el trabajo de salida del electrón (§ 44.9),  $T$ , la temperatura del metal,  $B$ , cierta constante que depende del género del metal del que está fabricado el cátodo.

5. Si al ánodo se alimenta un potencial  $\varphi_r$  que sea negativo respecto de cátodo, la válvula se cierra, es decir, la corriente anódica es igual a cero. Esto significa que la energía cinética de los electrones es ya insuficiente para vencer la acción del campo que los repele del ánodo:

$$\frac{1}{2}mv^2 \leq e\varphi_r. \quad (47.4)$$

Si medimos el potencial de bloqueo  $\varphi_r$ , podemos determinar la energía cinética máxima (y la velocidad) de los electrones que abandonan el cátodo.

### § 47.3. Triodo y su característica

1. Con el fin de controlar la corriente de electrones en la válvula, en ésta se introduce el tercer electrodo, *la rejilla*. La válvula con rejilla se denomina *válvula electrónica de tres electrodos* o simplemente, *triodo*. La rejilla tiene el aspecto de una espiral de alambre y está ubicada entre el cátodo y el ánodo (fig. 47.6, a). En el esquema, el triodo con cáto-

do calentado se representa como se muestra en la fig. 47.6, b. Todas las magnitudes que se refieren a la rejilla se designan con el índice  $g$  (del inglés *grid*, rejilla).

Confeccionemos el circuito según el esquema de la fig. 47.7. Aquí el resistor  $R_a$  es un potenciómetro, con el que se regula el potencial de ánodo, mientras que el resistor  $R_g$  el potenciómetro para la regulación del potencial de la rejilla. Si el contacto móvil se establece en el punto medio del potenciómetro  $R_g$ , el potencial de la rejilla será igual al del cátodo, es decir, a cero. Al desplazar dicho contacto más abajo del punto medio, transmitiremos a la rejilla potencial negativo, más arriba del punto medio, positivo.

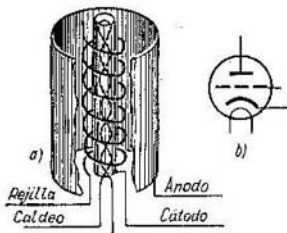


Fig. 47.6.

2. Fijemos cierto potencial del ánodo, y variemos el potencial de la rejilla de los valores negativos a los positivos, registrando cada vez la corriente anódica. Basándonos en estas mediciones construimos la *característica de rejilla*

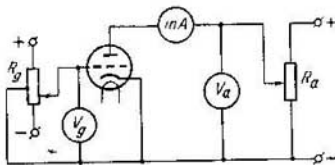


Fig. 47.7.

del triodo, que expresa la dependencia entre la corriente anódica y el potencial de la rejilla con el potencial profijado del ánodo (fig. 47.8). El análisis de esta característica permite llegar a las siguientes conclusiones.

3. La característica es *no lineal* y por lo tanto, la ley de Ohm no es aquí válida. Sin embargo, en un pequeño sector en la parte media de la característica, con la primera aproximación, podemos despreciar la falta de linealidad.

Con potenciales positivos de la rejilla la corriente aumenta, con negativos, disminuye. Este fenómeno se puede explicar de la forma siguiente. Si el potencial de la rejilla es igual a cero, la corriente en la válvula  $i_0$  se determina sólo por el potencial de ánodo. Supongamos que a la rejilla se transmite potencial positivo; entonces las intensidades de los campos del ánodo y de la rejilla se suman, lo que provoca el

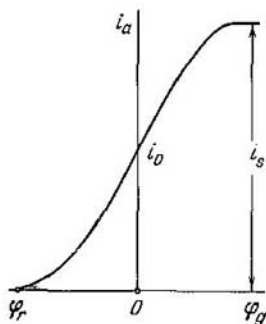


Fig. 47.8.

crecimiento de la velocidad de los electrones y desaparición de la nube de electrones. Como resultado, la corriente aumenta hasta la de saturación  $i_s$ . Con el potencial negativo se produce el proceso inverso: el campo se debilita, la velocidad de los electrones disminuye, mientras que la concentración de la nube de electrones aumentará. Como resultado la corriente en la válvula decrece. Por fin, con cierto potencial negativo  $\varphi_r$  en la rejilla, que depende de la tensión anódica, la energía cinética de los electrones es ya insuficiente para

vencer la acción repelente de la rejilla y los electrones no pueden pasar a la región entre la rejilla y el ánodo. La válvula se cierra, es decir, la corriente en ella es nula.

De este modo, variando el potencial de la rejilla podemos controlar la corriente en la válvula. Por dicha causa, recibe el nombre de *rejilla de control*.

#### § 47.4. Tubo de rayos catódicos

1. Un instrumento electrónico específico es el tubo de rayos catódicos (tubo de Braun). El esquema de su estructura se ofrece en la fig. 47.9. Los electrones, emitidos por el cátodo caliente, pasan por la rejilla (electrodo de control) y se aceleran por medio de dos ánodos. Todo este sistema recibe el nombre de *cañón electrónico* y sirve para crear en la pantalla un haz enfocado de electrones. La pantalla está cubierta de una sustancia *fluorescente* (§ 79.2) que por la acción de los electrones que la bombardean, se ilumina de forma brillante.



El enfoque del haz electrónico se realiza del modo siguiente. En el electrodo de control (rejilla) se crea potencial negativo (de  $-20$  a  $-70$  V). El campo de este electrodo "comprime" el haz electrónico que sale del cátodo. Al primer ánodo se transmite potencial positivo de  $+250$  a  $+500$  V, mientras que al segundo, de  $+1000$  a  $+2000$  V. En los tubos de televisión el potencial es aún mayor. Varian-

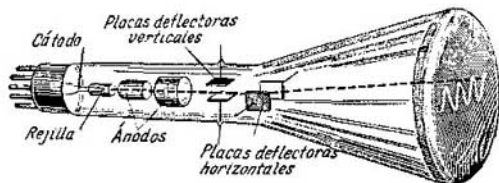


Fig. 47.9.

do los potenciales del electrodo de control y de los ánodos, puede variarse el enfoque y la luminancia en la pantalla del tubo.

2. Más adelante, el haz pasa por un sistema de electrodos de control. Si, por ejemplo, se alimenta a la placa deflectora vertical superior potencial positivo y la inferior, negativo, el haz electrónico se desviará hacia arriba. Al cambiar la polaridad, el haz se desviará hacia abajo. De este modo, las oscilaciones de potencial en estas placas provocan oscilaciones verticales del haz electrónico. Es fácil cerciorarse de que las oscilaciones de potencial en las placas deflectoras horizontales, provocarán las oscilaciones horizontales del haz electrónico.

El tubo en el que la desviación del haz electrónico se realiza a cuenta de la variación del campo eléctrico entre las placas de control recibe el nombre de *tubo con mando electrostático*. Hay tubos con *mando electromagnético*, que, por ejemplo, se usan en los televisores. En tales tubos no hay electrodos de control, pero en el gollete del tubo se acoplan bobinas especiales por las que pasa corriente, cuyo valor y dirección varían. Al cambiar el valor y la dirección del vector de inducción del campo magnético, varían respectivamente el valor y la dirección de la fuerza de Lorentz, que es la que desvía el haz electrónico.

## CORRIENTE EN LOS GASES

## § 48.1. Ionización y recombinación

1. Para que un gas se convierta en conductor, es preciso ionizarlo, es decir, transformar las moléculas (o átomos) neutras en iones. El proceso de ionización consiste en que, bajo la acción de ciertos rayos, de las moléculas salen electrones y, de este modo, las moléculas se convierten en iones positivos. Así, pues, la corriente eléctrica en los gases es el flujo al encuentro de iones positivos y electrones libres.

La ionización puede transcurrir por el influjo de la radiación de ondas cortas, es decir, ultravioletas, de rayos X y gama, así como alfa y beta y rayos cósmicos. La conductividad que surge a causa de la radiación externa recibe el nombre de *conductividad por agente ionizante*.

2. Designemos por  $N_0$  el número de moléculas de gas en el volumen que analizamos  $V$ . La concentración de moléculas  $n_0 = N_0/V$ . Una parte de las moléculas está ionizada. Designemos el número de iones por  $N$ ; su concentración  $n = N/V$ .

La razón entre el número de iones y el número total de moléculas denomínase *grado de ionización*,  $\alpha = N/N_0 = n/n_0$ . En los gases, por regla, para la conductividad no espontánea el grado de ionización es muy pequeño:  $\alpha \approx 10^{-12} \div 10^{-10}$ .

El número de moléculas neutras (no ionizadas)

$$N' = N_0 - N = N_0(1 - \alpha) \approx N_0,$$

esto mismo se refiere a su concentración:  $n' \approx n_0$ .

3. Sea que en el volumen  $V$ , a cuenta del influjo de ciertos rayos, durante el tiempo  $\Delta t$ , se crea cierta cantidad de electrones:

$$\Delta N = \beta N' \Delta t \approx \beta N_0 \Delta t = \beta n_0 V \Delta t, \quad (48.1)$$

donde  $\beta$  es el *coeficiente de ionización*, que depende de la energía de ionización. Junto con el proceso de ionización, transcurre el proceso inverso de *recombinación de los iones* (de otro modo, *molización*). Consiste en que al chocar un ion positivo con un electrón, de nuevo se forma un átomo

neutro o molécula. El número de partículas que se recombina en el volumen  $V$  durante el tiempo  $\Delta t$ , es proporcional tanto al número de iones positivos, como al número de electrones. Pero como el número de unas y otras partículas es igual a  $N$ , la probabilidad de recombinación es proporcional a  $N^2$ . Además, es proporcional al tiempo  $\Delta t$  y razón inversa al volumen  $V$ , ya que, en efecto, mientras más cerca estén situados entre sí los iones de diferente signo, más probable es su recombinación. Así, que

$$\Delta N_{\text{rec}} = \gamma N^2 \Delta t / V = \gamma n^2 V \Delta t. \quad (48.2)$$

Aquí  $\gamma$  es el coeficiente de recombinación, que depende de la naturaleza del gas.

Cierto tiempo después del comienzo de la ionización del gas, la velocidad de recombinación  $\Delta N_{\text{rec}} / \Delta t$  se igualará con la velocidad de ionización  $\Delta N / \Delta t$  y en el gas se establecerá el equilibrio dinámico. A este estado corresponde una determinada concentración de iones, que puede ser hallada igualando las expresiones (48.1) y (48.2):

$$n = \sqrt{\beta n_0 / \gamma}. \quad (48.3)$$

## § 48.2. Descarga no espontánea

1. Para analizar este proceso, examinemos los fenómenos en la cámara de ionización, cuyo esquema se muestra en la fig. 48.1. Por regla, el cuerpo del recipiente lleno de gas, sirve de cátodo. El ánodo tiene forma de barra; se aísla del cuerpo mediante un buen aislador de ámbar, porcelana o de plásticos especiales. A través de las paredes de la cámara penetra una radiación dura, del tipo de rayos X, gama o cósmicos. Una radiación blanda del tipo de partículas beta o alfa, se introduce a través de una ventanilla especial.

Transmitamos a los electrodos de la cámara una diferencia de potencial considerable, desde varios centenares a varios miles de voltios, en dependencia de la estructura de la cámara. Variando la diferencia de potencial y midiendo la corriente que le corresponde, registremos la característica corriente-tensión de la descarga de gases (fig. 48.2).

2. Si no prestamos atención al salto de corriente en el sector  $\beta-4$ , el sector de la característica  $0-1-2-3$  es muy parecido a la característica corriente-tensión del diodo. El sector  $0-1-2-3$  recibe el nombre de región de

descarga no espontánea: la región 3—4 caracteriza el paso a la descarga espontánea.

Como vemos, en la región de las corrientes débiles (sector 0—1), la característica es aproximadamente lineal, o sea, aquí es válida la ley de Ohm. En el sector 1—2, dicha ley se viola y el crecimiento de la corriente transcurre con

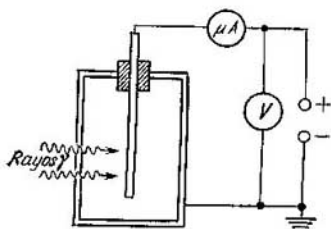


Fig. 48.1.

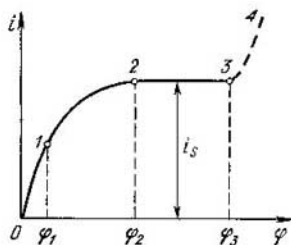


Fig. 48.2.

mayor lentitud que el aumento del potencial. Por fin, en el sector 2—3 la corriente no depende del potencial, es la llamada *corriente de saturación*  $i_s$ .

3. Para explicar las singularidades de la descarga con diversos valores del potencial, vamos a calcular la intensidad de corriente en la cámara. Para simplificar los razonamientos supongamos que los electrodos de la cámara están fabricados en forma de placas, situadas entre sí de forma paralela a una pequeña distancia  $d$ . En tal caso, el campo entre las placas será homogéneo, mientras que la densidad de corriente en todos los puntos, igual. Lo mismo que en los electrólitos, la densidad de corriente se expresará por las fórmulas (46.3) y (46.6):

$$j = en(v_+ + v_-) = en(b_+ + b_-)E, \quad (48.4)$$

donde  $b_+$  es la movilidad de los iones positivos,  $b_-$ , la movilidad de los electrones,  $n = \alpha n_0$ , la concentración de iones.

4. Analizando el mecanismo de la corriente en los electrólitos, obtuvimos de la fórmula (46.3) la ley de Ohm, ya que allí la concentración de iones no era función de la corriente. Otra cosa son los gases. En ellos con el crecimiento de la corriente disminuye la concentración de iones y la dependen-

cía de la corriente de la diferencia de potencial es en sí una función bastante complicada.

Examinemos cómo varía la condición de equilibrio dinámico entre los procesos de ionización y recombinación al haber corriente. A cuenta de ésta, del volumen entre los electrodos, durante el tiempo  $\Delta t$ , sale una determinada cantidad de iones :

$$\Delta N_{\text{cor}} = Q/e = i\Delta t/e = jS\Delta t/e. \quad (48.5)$$

La condición de equilibrio dinámico al haber corriente, tiene el aspecto:

$$\Delta N = \Delta N_{\text{rec}} + \Delta N_{\text{cor}}. \quad (48.6)$$

Poniendo los valores de todos los sumandos:

$$\beta n_0 V = \gamma n^2 V + \frac{jS}{e}.$$

Como  $d = V/S$  es la distancia entre los electrodos, definitivamente tenemos

$$\beta n_0 = \gamma n^2 + \frac{j}{ed}. \quad (48.7)$$

Así, pues, la concentración de los iones ha resultado ser función de la densidad de corriente. Eliminando en el sistema de igualdades (48.4) y (48.7) la concentración de iones  $n$ , obtenemos cierta función que expresa la dependencia entre la densidad de corriente y la intensidad del campo. La gráfica de esta dependencia es, precisamente, la característica corriente-tensión (véase la fig. 48.2).

5. Examinemos dos casos límites, cuando la cantidad de iones, que se lleva la corriente, es mucho menor o mayor que el número de iones recombinados.

Sea primero  $\Delta N_{\text{cor}} \ll \Delta N_{\text{rec}}$ . Entonces el segundo término del segundo miembro de (48.6) puede ser despreciado. Retornamos de nuevo a la igualdad (48.3). Por consiguiente, con corrientes débiles, la concentración de iones no depende, prácticamente, de la corriente, por lo que la densidad de corriente es casi proporcional a la intensidad del campo. En la característica corresponde a esto el sector casi lineal 0-1.

Sea ahora a la inversa. La corriente es tan grande que, prácticamente, todos los iones se los lleva la corriente y la recombinación no puede producirse. Entonces  $\Delta N_{\text{cor}} \gg \Delta N_{\text{rec}}$  y en las igualdades (48.6) y (48.7) puede despreciar-

se el primer sumando del segundo miembro. Tendremos

$$\beta n_0 \approx j_s / ed. \quad (48.8)$$

Vemos que la densidad de corriente no depende del campo. Esta es la *corriente de saturación*.

6. La intensidad de corriente de saturación

$$i_s = j_s S = \beta n_0 e V. \quad (48.9)$$

Como vemos, dicha corriente es proporcional al volumen de la cámara de ionización, a la concentración de las moléculas de gas (con otras palabras, a la presión del gas) y al coeficiente de ionización. De esta manera, mediante la cámara de ionización, cuando trabaja en el régimen de corriente de ionización, pueden ser comparadas las capacidades de ionización de diversos tipos de radiación. Con este fin, las cámaras de ionización se utilizan extensamente en física nuclear (§ 81.8).

### § 48.3. Ionización por choque

1. Como vemos en la gráfica de la fig. 48.2, con una diferencia de potencial superior a  $\varphi_3$  la corriente en el gas crece a salto, mientras que en el gran intervalo de diferencias de potencial de  $\varphi_2$  a  $\varphi_3$ , la corriente quedó invariable. El análisis de la expresión (48.4) para la densidad de corriente, permite llegar a la conclusión de que el salto inesperado y brusco del valor de la corriente puede surgir por una sola causa: con una diferencia de potencial superior a  $\varphi_3$ , *crece a salto la concentración de iones*. La causa de este brusco salto es la *ionización por choque*.

Para ionizar un átomo o una molécula es necesaria cierta energía  $\mathcal{E}_{\text{ion}}$ , cuyo valor depende de la naturaleza química del gas. Para los átomos de hidrógeno y oxígeno  $\mathcal{E}_{\text{ion}} = 13,6$  eV, para el nitrógeno 14,5 eV, para el helio 24,5 eV, para los átomos de los metales alcalinos, de un orden de 4...5 eV. Si la energía cinética de la partícula, que choca con el átomo, supera la energía de ionización, con *el choque inelástico* es posible la ionización de la molécula.

2. La energía cinética  $K$  que ioniza la partícula en el gas, surge a cuenta del trabajo  $A$  de las fuerzas eléctricas que actúan sobre el ion en el campo eléctrico:

$$K = A = F\lambda = eE\lambda, \quad (48.10)$$

donde  $E$  es la intensidad de campo,  $\lambda$ , la longitud del recorrido libre del ion. Tanto los iones positivos, como los electrones, se mueven en un campo de igual intensidad, pero la longitud del recorrido libre del electrón es mucho mayor que la del recorrido libre del ion positivo. Por lo tanto, en la ionización por choque los electrones libres desempeñan el principal papel.

3. La segunda causa, por la que los electrones son agentes de ionificación más eficaces, reside en que gracias a la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, al chocar sólo parte de la energía cinética puede transformarse en energía interna (§§ 21.7, 23.2). Resulta que mientras menor sea la masa de la partícula ionizante en comparación con la de la molécula, mayor parte de la energía cinética podrá convertirse en interna y consumirse para la ionización. Sea la masa de la partícula ionizante  $m$ , su cantidad de movimiento  $p$  y que la molécula de masa  $M$  está en reposo hasta el momento del choque inelástico. La variación de la energía interna es igual a la pérdida de la energía cinética:

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_0 &= K - K_1 = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^2}{2(M+m)} = \\ &= \frac{p^2 M}{2m(M+m)} = K \frac{M}{M+m},\end{aligned}\quad (48.11)$$

donde  $K = p^2/2m$  es la energía de la partícula ionizante. La masa del ion es igual a la de la molécula, por lo que  $\Delta\mathcal{E}_0 = K/2$ . La masa del electrón es varios miles de veces menor que la de la molécula, de forma que en (48.11) la razón  $M/(M+m) \approx 1$  y  $\Delta\mathcal{E}_0 \approx K$ . Así, pues, incluso con igual energía cinética, en calidad de agente de ionización, el electrón es dos veces más eficaz que el ion.

4. Durante la ionización por choque y con un campo externo de suficiente intensidad, en el gas se crea una *avalancha iónica*. Los electrones secundarios, que surgen a cuenta de la ionización por choque, también se aceleran con el campo y, a su vez, ionizan las moléculas que van a su encuentro. Como resultado de esta especie de *reacción en cadena*, incluso una pequeña cantidad de electrones, creados en el proceso de la ionización externa, es capaz de provocar una considerable corriente de descarga.

Al mismo tiempo, este proceso no puede ser aún llamado descarga espontánea, ya que al terminar la acción de agente externo de ionización, la descarga cesa en cuanto todos los iones se neutralizan en los electrodos. Para el surgimiento de una descarga espontánea desarrollada, es preciso que los iones positivos también adquieran la capacidad de desprender electrones libres, ya sea de las moléculas de gas o bien

del cátodo. Como sigue de la expresión (48.10), esto se puede conseguir bien a cuenta del aumento de la intensidad del campo, o bien incrementando la longitud del recorrido libre del electrón.

#### § 48.4. Contador de Geiger—Müller

1. Durante la ionización por choque, transcurre un crecimiento brusco de número de pares de iones, aproximadamente,  $10^3 \div 10^6$  veces. Por lo tanto, si en el volumen de gas surge aunque no sea más que un par de iones (un ion positivo y un electrón), gracias a la ionización por choque su cantidad

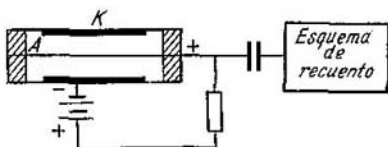


Fig. 48.3.

crece millones de veces. En semejante caso dicen que la cámara de ionización trabaja en el régimen de *amplificación gaseosa*.

La amplificación gaseosa es utilizada en los contadores (detectores) de Geiger para contar las partículas aisladas de la radiación radiactiva. Gracias a la elección de un régimen determinado, el detector cuenta cada partícula por separado.

2. Con la mayor frecuencia, el contador es un tubo de vidrio cerrado, con cuyas paredes interiores hace contacto el cátodo *K*, es decir, un fino cilindro metálico; de ánodo *A* sirve un alambre de pequeño grosor, tensado por el eje del contador (fig. 48.3). Para las partículas de las radiaciones blandas beta y alfa se usan contadores que se distinguen porque la radiación penetra al volumen de trabajo del contador por una de sus caras laterales, cubierta con una fina película.

El contador se conecta al esquema de registro. Al cuerpo se alimenta potencial negativo, al alambre, positivo. Al contador se conecta en serie un resistor de varios megoh-



mios de resistencia. Desde el resistor, la señal se transmite a la entrada del esquema de recuento a través del condensador separador de varios miles de picofaradios de capacidad.

3. Supongamos que al contador ha penetrado una partícula, que durante su recorrido ha creado aunque no sea más que un par de iones. Moviéndose hacia el ánodo (alambre), los electrones llegan al campo con intensidad creciente, su velocidad aumenta impetuosamente y por su camino crean una avalancha de iones.

Al alcanzar el alambre, los electrones reducen su potencial, a causa de lo cual por el resistor pasará corriente. En sus extremos surge un impulso de tensión, que por el condensador llega a la entrada del dispositivo de recuento.

El alto potencial, que antes se encontraba enteramente en el ánodo, se conmuta al resistor y la intensidad del campo dentro del contador disminuye, por lo que también decrece la energía cinética de los electrones (véase (48.10)). Por esta causa cesa el régimen de amplificación gaseosa. El resistor juega aquí el papel de *resistencia de extinción*.

4. Gracias a que la movilidad de los iones positivos es menor que la de los electrones, así como a causa de que los iones se mueven hacia el cátodo, donde la intensidad del campo es mucho menor que junto al ánodo, la velocidad de los iones positivos es mucho menor que la de los electrones. Como resultado, los iones llegan al cátodo no antes de haber pasado el tiempo  $\tau \approx 10^{-4}$  s después de comenzar la descarga. En el transcurso de este tiempo el contador es incapaz de registrar las partículas que llegan a él de nuevo. En efecto, mientras que la nube de iones de carga positiva rellena el volumen de trabajo del contador, la intensidad del campo es pequeña y la ionización por choque no puede transcurrir. Por este motivo, con frecuencia, el tiempo  $\tau$  recibe el nombre de *tiempo muerto* del contador.

El *poder de resolución* del contador muestra cuántas partículas es capaz de registrar éste por unidad de tiempo, en forma de impulsos aislados. Ya que los impulsos de dos partículas se registran por separado, si ellas van una tras otra con un intervalo de tiempo no menor que el tiempo muerto, el poder de resolución será igual a cerca  $10^4$  impulsos por segundo.

## § 48.5. Descarga espontánea. Plasma

1. Como hemos dicho con anterioridad, para que en el gas surja una descarga espontánea, es insuficiente la presencia de sólo el proceso de ionización por choque. Además, es necesario que a cuenta de los procesos que transcurren en el gas durante la descarga se creen de modo permanente electrones, que después de su aceleración tomarán parte en la

ionización por choque. Semejantes procesos pueden ser varios. A veces actúan simultáneamente, en otras ocasiones uno de ellos juega el papel principal, lo que depende de la presión del gas, su temperatura y la intensidad del campo. Estudiemos los más importantes de ellos.

La *emisión termoelectrónica* del cátodo surge en el caso, cuando éste tiene elevada temperatura. Este proceso es el que asegura la *descarga de arco*.

La *emisión electrónica secundaria* del cátodo aparece al ser la energía cinética de los iones positivos suficiente para desprender electrodos del cátodo. Este proceso crea la *descarga luminiscente* (§ 48.6).

La *termoionización* del gas se produce en aquellos casos, cuando la energía cinética de las moléculas del gas supera la energía de ionización:

$$\frac{1}{2}mv^2 > \xi_{\text{ion}}. \quad (48.12)$$

La ionización del gas durante los choques térmicos de las moléculas, exige temperaturas suficientemente altas ( $\xi_{\text{ion}} \approx \approx 10$  eV):

$$T > \frac{\xi_{\text{ion}}}{k} \approx \frac{10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 10^5 \text{ K}.$$

En realidad, a causa de la distribución de Maxwell de las moléculas según las velocidades (§ 25.2), la termoionización surge también a temperaturas mucho más bajas.

La *fotoionización* del gas se produce bajo la acción de la radiación de ondas cortas ultravioletas o de rayos X. Al absorber una dosis de energía (cuanto de radiación, § 68.3), mayor que la de ionización, la molécula expulsa un electrón y se transforma en ion positivo.

2. El gas ionizado, con grado considerable de ionización, es en realidad un estado singular de la materia, distinto del gaseoso, líquido o cristalino. Dicho estado de la sustancia recibe el nombre de *plasma*.

El plasma que surge como resultado de la ionización por choque del gas, denomínase de *descarga de gas*. Su particularidad distintiva consiste en que, prácticamente, no hay intercambio de energía entre los electrones libres y los iones y sus energías cinéticas medias se diferencian de forma considerable. La explicación cualitativa de esta última propiedad, reside en que la longitud del recorrido libre del electrón es mucho mayor que el del ion, unas 5 ... 10 veces, por lo

que los electrones acumulan en el campo eléctrico, aproximadamente, una energía que es igual de veces mayor.

Por analogía con la temperatura del gas, que se introduce según la fórmula  $\bar{\varepsilon} = 3/2 kT$  (§ 26.5), podemos introducir la temperatura iónica y la temperatura electrónica:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{ion}} = 3/2 kT_{\text{ion}}, \quad \bar{\varepsilon}_{\text{elec}} = 3/2 kT_{\text{elec}}.$$

Resulta que  $T_{\text{elec}} \approx 5000$  K para  $T_{\text{ion}} \approx 300$  K.

Así, pues, el plasma de descarga de gas es un estado de la sustancia no equilibrado o como dicen, no isotérmico.

3. El plasma de alta temperatura, surgido como resultado de la ionización térmica, es un plasma equilibrado o, con otras palabras, *isotérmico*. Su grado de ionización es muy grande, gracias a lo cual es buen conductor. La conductividad del plasma de alta temperatura es comparable con la de los metales.

La temperatura de la superficie del Sol y las estrellas es igual a varios miles de grados, sus entrañas están calentadas hasta millones de grados. De aquí sigue, que una considerable masa de la sustancia del universo, concentrada en las estrellas, se encuentra en estado de plasma de alta temperatura.

## § 48.6. Descarga luminiscente

1. Este tipo de descarga se observa con facilidad en un tubo de descarga en gases de vidrio con dos electrodos, distanciados entre sí cerca de 0,5 m, mientras que la diferencia de potencial es de unos mil voltios. Resulta que a la presión atmosférica normal no hay descarga en el tubo (una débil descarga no espontánea puede ser despreciada). Al disminuir la presión del gas hasta unos 5—7 kPa, en el tubo se observa un estrecho cordón luminoso; a una presión de cerca de 60—70 Pa, la descarga rellena por completo el tubo, con la particularidad de que la columna positiva junto al ánodo se divide en dos capas. Por último, a una presión de 2 Pa en el tubo desaparece la luminosidad, pero comienza una brillante luminosidad del vidrio frente al cátodo.

La descarga espontánea que surge en el gas a baja presión recibe el nombre de *descarga luminiscente*.

2. Las investigaciones han mostrado que el potencial en el tubo de descarga en gases se distribuye de forma muy irregular, como se representa en la fig. 48.4. Junto al cátodo,

la intensidad del campo es mucho mayor que en la columna luminosa junto al ánodo. Por esta causa, las cargas sufren la acción de la fuerza de aceleración sólo en el espacio oscuro del cátodo. En la región de luminosidad anódica, ellas, prácticamente, se mueven uniformemente.

Después de acelerarse en el espacio cátodico, los electrones adquieren una energía cinética suficiente para la ionización por choque del gas. Por este motivo, en la región de

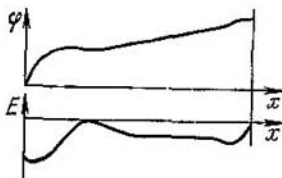


Fig. 48.4.

la luminosidad anódica se forma plasma de descarga de gas, la conductividad de esta zona crece bruscamente, mientras que la diferencia de potencial disminuye. La energía desprendida por las moléculas de gas durante la recombinación de los iones es la causa de la luminosidad del gas. El carácter de ésta (su color) depende de la naturaleza del gas que rellena el tubo. A su vez, los iones positivos, que se aceleran en el espacio cátodico oscuro, bombardean el cátodo y por choque desprenden de éste electrones. Es lógico, que la energía cinética del ion debe superar el trabajo de salida del electrón del cátodo, solo en tal caso el ion puede arrancar de éste un electrón. De acuerdo con (48.10) esto se puede alcanzar bien aumentando la intensidad del campo eléctrico, o bien aumentando la longitud del recorrido libre del ion. Precisamente con este fin se crea el enrarecimiento del gas.

La descarga luminiscente se observa en las lámparas de descarga luminiscente. Las lámparas de neón, criptón, mercurio y sodio son utilizadas como manantiales especiales de luz en laboratorios, así como para los anuncios luminosos. Indiquemos que las lámparas de vidrio de cuarzo, rellenas de vapores de mercurio, son fuentes de luz ultravioleta.

La descarga luminiscente se observa en las lámparas de descarga luminiscente. Las lámparas de neón, criptón, mercurio y sodio son utilizadas como manantiales especiales de luz en laboratorios, así como para los anuncios luminosos. Indiquemos que las lámparas de vidrio de cuarzo, rellenas de vapores de mercurio, son fuentes de luz ultravioleta.

Cuando los iones bombardean el cátodo, provocan el calentamiento local del metal en los salientes. Estos se funden y se evaporan. Los vapores de metal creados se sedimentan en las superficies frías. Este fenómeno se utiliza para la *pulverización cátodica del metal*, lo que permite obtener recubrimientos metálicos muy finos y resistentes en diversos artículos. Mediante este procedimiento se fabrican espejos de alta calidad, placas de vidrio semiplateadas, etc.

3. A una presión del gas menor que  $1 \div 2$  Pa la luminosidad del gas en el tubo cesa. Esto quiere decir que los choques de los electrones con las moléculas de gas, la ionización de éstas y el proceso inverso de recombinación transcurren con relativa rareza. Por esta razón, la masa fundamental de electrones, al salir del cátodo y después de acelerarse en el espacio catódico, vuela a continuación por inercia. Con este fenómeno se explica el hecho de que el haz de electrones en el tubo de rayos catódicos está en movimiento rectilíneo y perpendicular respecto del cátodo, independientemente de la posición de ánodo (fig. 48.5).

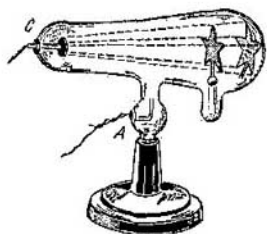


Fig. 48.5.

Desde el punto de vista histórico, éste fue el primer método para crear un haz de electrones libres. Crookes, que a finales del siglo pasado obtuvo estos rayos, los llamó *catódicos*. En la actualidad, este término se conserva sólo por tradición y los rayos son denominados electrónicos.

Si en el interior del tubo de descarga en gases se ubica un cátodo y en él se hace un agujero (canal), tras el cátodo pue-

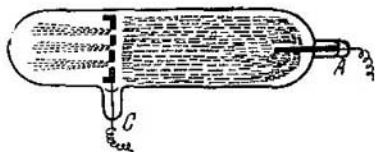


Fig. 48.6.

de observarse un haz con débil luminiscencia (fig. 48.6). Las investigaciones han mostrado que estas partículas son iones positivos, acelerados por el campo en el espacio catódico y que por inercia pasaron por el agujero al espacio tras el cátodo. Estos rayos se llaman *anódicos* o de *canales*.

Los rayos anódicos son fuente de iones positivos del gas

con el que está relleno el tubo. Semejantes fuentes de iones de carga positiva se utilizan en los espectrómetros de masa (§ 41.8) y en los aceleradores (§§ 41.4—41.6).

### § 48.7. Plasma en el campo magnético

1. En ausencia del campo magnético el plasma se comporta como un gas corriente. La causa reside en que el plasma es *casineutro*; incluso en volúmenes suficientemente pequeños (pero no microscópicos) la carga sumaria de los electrones y los iones positivos es igual a cero. Por esta causa, al no haber campo magnético externo, los fenómenos en el plasma son descritos por las ecuaciones corrientes de hidrodinámica y de dinámica de los gases (véase el cap. 30).

Si el plasma se encuentra en un campo magnético, en su comportamiento se manifiesta una serie de singularidades, provocadas por la acción del campo magnético sobre las cargas en movimiento. La ciencia acerca de la conducta del plasma, así como de otros líquidos conductores (por ejemplo, los metales líquidos) en el campo magnético recibe el nombre de *hidrodinámica magnética*, mientras que con grandes números de Mach (§ 30.6), *dinámica magnética de los gases*. En el presente manual no podemos detenernos detalladamente en la exposición de esta nueva rama de las ciencias en intenso desarrollo. Examinemos sólo ciertas nociones fundamentales.

2. Supongamos que cierto volumen del plasma está en movimiento a la velocidad  $v$ , en dirección perpendicular a las líneas de un campo con inducción  $B$ . Entonces, como en cualquier conductor, en dicho volumen se inducirá una fem de inducción (§ 43.2). Si la dimensión característica del plasma es igual a  $l$ , la fem, de acuerdo con (43.5), será igual a  $\mathcal{E} = vBl$ . La resistencia del sector del plasma  $R = \rho l/S \approx \approx l/\gamma l^2 = 1/\gamma l$ . Según la ley de Ohm, la corriente inducida en el plasma

$$I_{\text{ind}} = \mathcal{E}/R \approx \gamma vBl^2. \quad (48.13)$$

De acuerdo con la regla de Lenz (§ 43.8) la corriente inducida interactúa con el campo de forma que la fuerza de interacción obstaculiza el desplazamiento del plasma. O sea, que además de las fuerzas hidrodinámicas corrientes, sobre el plasma asimismo actúan fuerzas electromagnéticas.

3. El cálculo preciso de esta interacción está ligado con dificultades matemáticas considerables. No obstante, mediante ciertos criterios adimensionales, análogos al número de Reynolds (§ 11.8), es posible apreciar el papel de unas u otras fuerzas. *El número magnético de Reynolds*,  $Re_m$  caracteriza la razón entre la inducción magnética del campo de las corrientes inducidas y la inducción del campo magnético externo:

$$Re_m = B_{\text{ind}}/B. \quad (48.14)$$

Para valorar esta magnitud, tengamos en cuenta que  $B_{\text{ind}} = \mu_0 I_{\text{ind}} \approx \mu_0 \gamma l_{\text{ind}}/l$ , donde  $l$  es la dimensión característica del sector del plasma, mientras que la corriente inducida se expresa por

la fórmula (48.13). Realizando la sustitución, obtenemos

$$B_{\text{ind}} \approx \mu_0 \gamma v B l, \quad (48.15)$$

$$\text{Re}_m = \mu_0 \gamma v l. \quad (48.16)$$

Considerables números de Reynolds aparecen bien con gran conducción del plasma, o bien con considerables dimensiones características y velocidades. Este último fenómeno se observa con frecuencia a escalas astronómicas y adquiere gran importancia en astrofísica.

4. Con grandes números magnéticos de Reynolds ( $\text{Re}_m \gg 1$ ), el desplazamiento del plasma en el campo magnético debe provocar el surgimiento de un campo magnético externo inducido muy fuerte. Esto requiere consumo de energía, que sólo puede ser obtenida a cuenta de la energía cinética del plasma. Por lo tanto, las corrientes inducidas, al interactuar con el campo magnético externo, obstaculizan el desplazamiento del plasma en sentido transversal respecto del campo.

Para  $\text{Re}_m \gg 1$ , puede resultar que el plasma no puede, prácticamente, desplazarse con relación al campo. En tal caso, decimos que *el campo magnético está adherido al plasma*, de manera que éste no cruza las líneas de fuerza. A la inversa, si hacemos variar el campo magnético externo, para  $\text{Re}_m \gg 1$  el plasma comenzará a desplazarse del modo correspondiente, con el fin de conservar la condición de adhesión. De esto se hace uso para comprimir y calentar el plasma mediante un campo magnético creciente con rapidez, lo que será examinado en el § 82.12.

5. El segundo criterio característico en hidrodinámica magnética es el número de Alfvén  $\text{Al}$ , igual a razón entre la densidad de energía del campo magnético  $w_m = B^2/2\mu_0$  y la energía cinética del volumen unitario de plasma, es decir, la densidad de energía cinética  $w_k = \rho v^2/2$

$$\text{Al} = \frac{w_m}{w_k} = \frac{B^2}{\mu_0 \rho v^2}. \quad (48.17)$$

El número de Alfvén puede ser también interpretado de otro modo, como el cociente entre la presión del campo magnético  $p_m = B^2/2\mu_0$  y la presión dinámica  $p_{\text{din}} = \rho v^2/2$  (§ 30.15).

6. Con pequeños números de Reynolds es posible el desplazamiento del plasma respecto del campo; con esto surgen fuerzas magnéticas que pueden ser apreciadas por la ley de Ampère (41.15). Poniendo en dicha fórmula el valor de la corriente inducida de (48.13), obtenemos

$$F_m = i B l \approx \gamma v B^2 l^2. \quad (48.18)$$

Para valorar esta fuerza la comparan bien con la fuerza de resistencia de rozamiento  $T \approx \eta l v$ , o bien con la fuerza de resistencia de presión  $R \approx \rho v^2 l^2$ . Obtenemos dos nuevos criterios:

el número de Stuart

$$N = F_m / R = \gamma B^2 l / \rho v = \text{Al} \cdot \text{Re}_m; \quad (48.19)$$

el número de Hartmann

$$\text{Ha} = \sqrt{F_m / T} = B l \sqrt{\gamma / \eta} = \sqrt{N \cdot \text{Re}}. \quad (48.20)$$

La importancia de estos criterios puede ser comprendida en los siguientes ejemplos. Si un líquido fluye por un tubo en sentido trans-

versal al campo magnético, con pequeños números de Hartmann o de Stuart, el campo magnético influye débilmente sobre el carácter del flujo y la resistencia al movimiento surge, fundamentalmente, a causa de la viscosidad del líquido. Y a la inversa, con grandes números de Hartmann y Stuart la viscosidad del líquido pasa a segundo lugar, la resistencia al movimiento surge, principalmente, a cuenta de la interacción del líquido con el campo magnético.

### § 48.8. Generador magnetohidrodinámico (MHD)

1. En las centrales termoeléctricas, el proceso de transformación de la energía interna del combustible en la energía de la corriente eléctrica es muy complicado, mientras que el

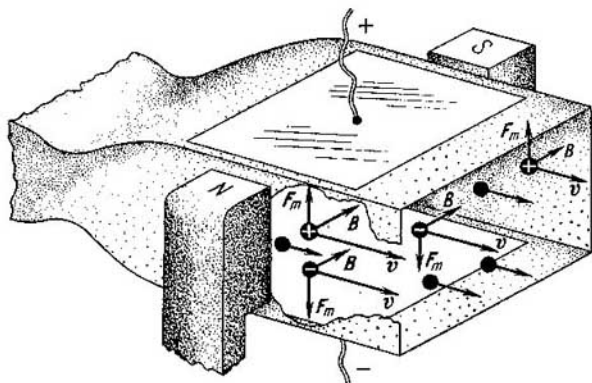


Fig. 48.7.

rendimiento no supera el 30%. En el hogar y la caldera, la energía del combustible se transforma en energía del vapor, en la turbina de vapor la energía de este se convierte en la energía cinética del rotor. Éste gira junto con el rotor del generador, por lo que en su estator se induce corriente. La cadena de transformación de la energía "hogar — caldera — turbina — generador" es en suficiente grado complicada. El bajo rendimiento es determinado, en lo fundamental, por la turbina, en la que la temperatura del agente de trabajo (vapor) es relativamente baja ( $\leq 750^\circ\text{C}$ ), así como por las pérdidas en todas las etapas de transformación de la energía.



Entretanto, si se obliga a los productos gaseosos de la combustión, incandescentes y, por lo tanto, ionizados, que se muevan en sentido transversal al campo magnético, en este plasma, como en otro cualquiera conductor, surge fem de inducción, que puede ser tomada del plasma con ayuda de los correspondientes electrodos.

2. En este principio se basa el *generador magnetohidrodinámico* o abreviado, generador MHD. El esquema de su estructura está representado en la fig. 48.7. El gas que se obtiene durante el quemado del combustible, pasa por la tobera de Laval (§ 30.12), a causa de lo cual su energía interna se convierte en cinética. Durante el movimiento del gas por un fuerte campo magnético transversal se crea fem de inducción, los iones positivos se desplazan hacia el electrodo superior, los electrones libres, hacia el inferior. Conectando los electrodos a la carga externa en el circuito surgirá corriente.

Para el análisis de la eficacia del generador es preciso apreciar su fem y su rendimiento eléctrico y térmico.

3. El rendimiento eléctrico es igual a la razón entre la potencia que consume la carga externa y la potencia total:

$$\eta_{\text{elec}} = \frac{i^2 R}{i^2 (R+r)} = \frac{R}{R+r},$$

donde  $R$  es la resistencia de la carga externa,  $r$ , la resistencia interna del generador. Con el fin de reducir la resistencia interna del generador hay que aumentar la conductividad eléctrica del plasma. Esto puede ser realizado elevando su temperatura, así como añadiendo al gas, en calidad de aditivos, los vapores de metales alcalinos, que tienen pequeña salida de trabajo de los electrones. Se utilizan las sales de potasio, con menor frecuencia, las de cesio ya que son mucho más caras.

Las temperaturas de trabajo de los gases en el generador MHD son superiores a 2000 K. A temperaturas inferiores, la conductividad del gas es tan pequeña, que el generador no trabaja.

4. También es favorable la elevación de la temperatura para el rendimiento térmico del generador (§ 29.5), ya que éste aumenta al crecer la diferencia de temperaturas del agente de trabajo y el medio ambiente. A temperaturas cerca de 2000 K el rendimiento térmico tiende a 90% (§ 29.6). Además, la elevación de la temperatura del gas permite aumentar la velocidad de movimiento de éste en la tobera de Laval, por lo que aumenta la fem. Al mismo tiempo, con brusquedad crece el desgaste de las paredes de la tobera, ya que tan altas temperaturas destruyen toda clase de metales.

5. También favorece al crecimiento de la fem el aumento de la inducción del campo magnético. Con este fin, la tobera del generador MHD se ubica en la holgura de un potente electroimán. Un imán con núcleo de hierro y arrollamientos refrigerados permite crear un campo

con inducción hasta de 2 T, lo que corresponde a la saturación magnética del hierro.

En el futuro es posible la aplicación de imanes sin hierro, pero con arrollamientos superconductores (§ 75.10). La densidad de corriente en semejantes arrollamientos llega hasta  $2 \cdot 10^8$  A/m<sup>2</sup>, la inducción del campo, hasta 6 T. Pero hasta el momento, el empleo de imanes con arrollamiento superconductor se complica por enormes dificultades que surgen para la manutención de las temperaturas del helio líquido en grandes regiones.

En la actualidad, los generadores MHD no han salido de la etapa de los experimentos de laboratorio. En 1968 fue creada en la URSS una instalación semiindustrial. El generador MHD diseñado por los científicos soviéticos, dio corriente en el transcurso de varias horas. Por lo visto, los generadores de este tipo encontrarán en el futuro extensa aplicación.

# ÍNDICE ALFABÉTICO

- Aceleración angular 251  
 — de la caída libre 73  
 — instantánea 55  
 — media 55  
 — normal (centrípeta) 62  
 —, unidad de 55  
 Aceleradores 514  
 — cíclicos 514  
 Acontecimiento, intervalo de tiempo  
 entre acontecimientos 146  
 Adiabática cuasiestática 329  
 — de un gas ideal 318  
 Ángulo de ataque 380  
 — — contacto 427  
 — — rozamiento 122  
 Anión 598  
 Anisotropía 385  
 Antiferromagnetismo 551  
 Año luz 168  
 Autodifusión 285  
 Autoinducción 564  
 Avalancha iónica 615  
  
 Brazo del dipolo 112  
 — de una fuerza 243  
  
 Caída libre 71  
 Calor de combustión 231  
 — — fusión 230, 418, 448  
 Calor de transición de fase 448  
 — específico de vaporización 231  
 — de sublimación 448  
 — — una reacción 231  
 Cámara de burbujas 456  
 — — ionización 611  
 — — Wilson 453  
 Campo de un dipolo 115  
 — — una carga puntual 115  
 — eléctrico 115  
 — — inducido 558  
 — electromagnético 559  
 — electrostático 459  
 — exterior 483, 554  
 — gravitatorio 104  
 — homogéneo 461  
 — magnético 499  
 Cantidad de calor 230  
 — — —, unidad de 230  
 — — —, materia 304  
 — — —, unidad de 304  
 — — —, movimiento 78  
 — — —, de una partícula localizada  
 187  
 — — —, ley de la conservación de la  
 169  
 Cañón electrónico 608  
 Capa límite 128  
 Capacidad calorífica de los metales 590  
 — — — un gas 313  
 Capacidad calorífica de un gas biatómico,  
 teoría clásica 321  
 — — — — —, teoría cuántica  
 324  
 — — — — —, unidad de medición  
 230, 314  
 — — — — — sólido 588  
  
 Capacidad calorífica isobárica 316  
 — — — isócara 315  
 — eléctrica 467  
 — — —, unidad de 467  
 Carga eléctrica 107  
 — — —, invariación de la 507  
 — de un electrón 474  
 — específica de un electrón 521  
 — eléctrica específica de un ion 523  
 — — —, unidad de 111  
 — polarizante 475  
 Cation 598  
 Causa y efecto 147  
 Centro de fuerza (o de masas) 175, 176  
 — — —, movimiento del 176  
 Centros de condensación 452  
 — — — cristalización 451  
 Ciclo de Carnot 375  
 — — —, rendimiento del 359  
 — inverso de Carnot 359  
 Ciclotrón 513  
 — condición de sincronización del  
 516  
 Coeficiente de conductividad térmica  
 592  
 — — — — del gas electrónico 595  
 Coeficiente de dilatación cúbica 393  
 — — — lineal 394  
 — — — difusión 287  
 — — — en los líquidos y cristales  
 382  
 — — — frenado 195  
 — — — ionización 610  
 — — — Poisson 317  
 — — — recombinación 611  
 — — — rozamiento de deslizamiento  
 123  
 — — — en reposo 121  
 — — — hidráulico 383  
 Compresibilidad de un gas durante la  
 transformación adiabática 385  
 — — — — — isotérmica 285  
 — — — la materia 384  
 Concentración de moléculas 283  
 Condensación 431  
 Condensador, carga de un 492  
 —, descarga de un 492  
 — plano 466  
 — — — al haber un dieléctrico 477  
 Conductividad eléctrica 488, 568  
 — — — de los metales 579  
 — — — — semiconductores 579  
 — — — — un electrólito 599  
 — — — específica 488, 573  
 — — —, teoría electrónica de la 574  
 — — — por agente ionizante 610  
 — — — térmica 229, 691  
 Conductividad térmica, anisotropía 593  
 — — — de los aisladores 591  
 — — — — metales 594  
 — — — —, unidad de 592  
 Conductor 469  
 Cono de Mach 376, 372  
 Constante de Avogadro 305, 351  
 — — Boltzmann 297, 303, 351  
 — — dieléctrica 111, 474, 476  
 — — —, unidad de 468

- Constante de los gases molar o universal 305  
 — — — gravitación 190  
 — — — Hall 572  
 — — — Loshmidt 304  
 — — — Planck 162  
 — — — tiempo para un circuito eléctrico 493  
 Consumo de un líquido, gas 363  
 Contador de Geiger—Müller 616  
 Corriente eléctrica 483, 486  
 — — — densidad de 486  
 — — — de saturación 606, 614  
 — — —, unidad de 488  
 Cristales 395  
 — — — atómicos 406  
 — — — iónicos 405  
 — — — metálicos 407  
 — — — moleculares 406  
 Cristalización 451  
 Cubierta adiabática 233  
 Curva potencial de la interacción molecular 391  
 Curvas potenciales 215, 301  
 Choque 190  
 — — — elástico 193, 197  
 — — — central 193  
 — — — perfectamente inelástico 191, 197  
 Deformación de un cristal 403  
 — — — elástica 64  
 — — — plástica 64  
 Densidad de energía 468, 477, 566  
 — — —, gradiente de 286  
 — — — de la sustancia 74  
 — — — un gas 304  
 — — — superficial de una carga 466  
 Descarga, característica corriente—tensión de la 611  
 — — — de arco 618  
 — — — espontánea 617  
 — — — luminiscente 619  
 — — — no espontánea 611  
 Desplazamiento de un punto material 34  
 — — — — — con movimiento variable 59  
 Diamagnetismo 529, 532  
 Dieléctrico 469  
 Diferencia de potencial de contacto 586  
 Difusión 284  
 — — — en los cristales 402  
 — — — — — gases 285  
 — — — — — líquidos 421  
 Dimensión de una magnitud física 87  
 Dinámica magnética de los gases 622  
 Dinamómetro 64  
 Diodo 604  
 — — —, característica corriente—tensión 605  
 Dipolo 112  
 — — —, energía en campo eléctrico 464-465  
 — — —, momento eléctrico 112, 388  
 Distocación 399  
 Disociación electrolítica 597  
 Distribución barométrica 305  
 Dominios 541  
 — — —, desplazamiento de los límites de los 543  
 Ebullición 454  
 Ecuación de Bernoulli 365  
 — — — — — para un líquido ideal incompresible 366  
 — — — — — Clapeyron—Mendeléiev 306  
 — — — — — continuidad de la corriente 364  
 — — — — — estado de un gas 298, 305  
 — — — — — fundamental de dinámica 153  
 — — — — — para un sólido en rotación 246  
 — — — — — en sistemas no inerciales de referencia 259  
 — — — — — la cantidad de movimiento para la corriente de un líquido ideal incompresible 365  
 — — — — — de movimiento 79  
 — — — — — Poisson 320  
 Efecto de Barkhausen 544  
 — — — Doppler 161  
 — — — Hall 570  
 — — — de interacción 549  
 Eficacia de la bomba térmica 362  
 Eje cristalográfico 395  
 — — — de coordenadas 28  
 Electrización 108  
 Electrólisis 597  
 Electrón 111, 471  
 — — —, carga del 471  
 — — —, masa propia del 523  
 — — —, momento cinético orbital del 529  
 — — —, momento magnético de spin 546  
 — — —, movilidad del 490  
 — — — de valencia 407  
 — — —, trabajo de salida 587  
 Elemento galvánico 601  
 — — —, fuerza electromotriz de un 601  
 Emisión electrónica secundaria 618  
 — — — fotoeléctrica 588  
 — — — termoeléctrica 588, 602  
 Empaquetamiento compacto 384  
 — — — cúbico de caras centradas 410  
 — — — de bolas con radios diferentes 410  
 — — — — — iguales 408  
 — — — — — hexagonal 408  
 Enlace (ligadura mecánica) 70  
 Energía cinética 182, 183, 240  
 — — — de una partícula localizada 188  
 — — — del campo electromagnético 565  
 — — — interna 220  
 — — — de activación 419  
 Energía de evaporación 430  
 — — — la capa superficial de un líquido 425  
 — — — — — movimiento oscilatorio de las moléculas 327  
 — — — — — interna de un gas ideal 311  
 — — — en reposo 181  
 — — — — —, variación al deformarse el cuerpo 222  
 — — — — — con los procesos térmicos 223  
 — — — — — durante las reacciones químicas 224  
 — — — — — en las reacciones nucleares 226  
 — — — mecánica total 211  
 — — — nula 303  
 — — — potencial 206, 221  
 — — — total, procedimientos para variarla 183  
 — — — — — relativista 181  
 — — —, unidad de 186, 209

Equilibrio de un cuerpo que tiene eje  
 de rotación 245  
 — estable 219  
 — inestable 219  
 Equivalente electroquímica 600  
 Escalar 46  
 Espacio, homogeneidad, isotropía 27  
 — oscuro del cátodo 620  
 Estado de agregación 223, 441  
 — crítico de la sustancia 437  
 — metaestable 424, 450  
 Experimento de Barnett 546  
 — — Cavendish 100  
 — — Coulomb 109  
 — — Ioffe 404  
 Experimento de Einstein—de-Haas 545  
 — — Faraday 553  
 — — Launert 276  
 — — Michelson 135  
 — — Millikan 472  
 — — Perrin 351  
 — — Reicke 568  
 — — Stern 276  
 — — Stern—Gerlach 547  
 — — Stuart y Tolmen 569  
 Exploración gravimétrica 106

Fenómeno de inducción electromagnética 554, 552  
 — — — en un conductor inmóvil 557  
 — — Seebeck 584  
 Ferromagnetismo 527, 528, 536  
 — — teoría clásica del 541  
 Filtro de velocidades 523  
 Fluctuaciones 345, 346  
 Flujo magnético 560  
 — —, unidad de 561  
 — térmico 591  
 Fonón 504  
 Fórmula de Einstein (para el movimiento browniano) 351  
 — — Stokes  
 — — Richardson—Deslenn 606  
 — — Tsiolkovski 174  
 Fotoinización de un gas 618  
 Frecuencia 61, 158  
 Frente de onda 367  
 Fuerza 63  
 — de Ampère 525  
 — centrípeta 79  
 Fuerza coercitiva 540  
 — de Coulomb 110  
 — — empuje reactiva 173  
 — — de Arquímedes 132  
 — — equilibrio 68  
 — — gravitación 99  
 — — inercia 259  
 — — interacción entre dipolos 113  
 — — Lorentz 509, 554  
 — — resistencia 131  
 — — rozamiento 118  
 — — sustentación 379  
 — — tensión superficial 426  
 — — elástica 67  
 — — electromotriz (fem) 484  
 — — de autoinducción 564  
 — — — inducción 558  
 — — del elemento galvánico 601  
 — exterior 56, 168  
 — generalizada de Lorentz 510

Fuerza interna 168  
 — de la gravedad 70  
 — — — presión normal 121  
 — —, medición de la 64  
 — resultante  
 — termoelectromotriz  
 Fuerzas centrales 267  
 Fuerzas conservativas 205, 209  
 — covalentes 406  
 — eléctricas 108  
 — exteriores 483  
 — magnéticas 493  
 — moleculares 386, 389  
 — no conservativas (disipativas) 206  
 — —, sistema equilibrado de 68  
 Fusión 448

Gas ideal 293  
 — — degenerado 302  
 — —, ecuación de estado 297  
 — — electrónico 407, 574  
 Generador electrostático de Van-de-Graaf 471  
 Generador magnetohidrodinámico (MHD) 624  
 Gráfica de movimiento 31  
 — — velocidad con movimiento uniformemente variado 57

Hidrodinámica magnética 622  
 Higrometro de Lambert 439  
 Histéresis 539  
 Homogeneidad del espacio 27, 140  
 — — — y conservación del momento de cantidad de movimiento 255  
 — — — tiempo 27, 140  
 — — — y conservación de la energía 255  
 Huecos (según Frenkel) 418  
 Humedad absoluta del aire 439  
 — relativa del aire 440

Imanación de la sustancia 531  
 — remanente 540  
 Inducción del campo magnético 499  
 — — —, unidad de 499  
 Inductancia del solenoide 564  
 —, unidad de 564  
 Ingravidez 82, 83  
 Intensidad del campo 103  
 — — — eléctrico 115, 462  
 — — — exterior 485  
 — — — inducido 558  
 — — — magnético 506 —  
 — — — sumario 485  
 — — — eléctrico, unidad de 463  
 — de corriente 468, 526  
 Interacción débil 255  
 — electromagnética 107  
 — fuerte 255  
 Ion 600  
 Ionización 610  
 — por choque 614  
 Isoterma de un gas ideal 292  
 — del vapor 436  
 Isótopos 289, 524  
 Isotropía del espacio 27, 141

Ley asociativa de composición de vectores 48

Ley clásica de composición de velocidades 45  
 — — — — — en forma vectorial 54  
 — — — — — conmutativa de composición de vectores 48  
 — — — — — de Avogadro 303  
 — — — — — Boyle—Mariotte 292  
 — — — — — la conservación del momento de cantidad de movimiento 246, 252  
 — — — — — de la cantidad de movimiento 169, 252  
 — — — — — energía 180, 233  
 — — — — — 252  
 — — — — — las cargas eléctricas 103  
 — — — — — en la mecánica newtoniana 212  
 Coulomb 110, 111  
 — — — — — Curie 535  
 — — — — — Charles 314  
 — — — — — Debye 482  
 — — — — — la difusión 287  
 — — — — — Dulong y Petit 589  
 — — — — — Faraday, primera 600  
 — — — — — segunda 600  
 — — — — — Fourier 592  
 — — — — — Gay-Lussac 316  
 — — — — — gravitación de Newton 99  
 — — — — — Hooke 46  
 — — — — — inducción de Faraday 560  
 — — — — — Joule—Lenz 491  
 — — — — — Kepler, primera 249  
 — — — — — —, segunda 249  
 — — — — — —, tercera 102  
 Ley de Maxwell de distribución de las moléculas por las velocidades 280  
 — — — — — movimiento 29, 59  
 — — — — — Ohm 488, 491, 576  
 — — — — — para los electrolitos 598  
 — — — — — primera de Newton (ley de la inercia) 39  
 — — — — — relativista de composición de velocidades 145  
 — — — — — la conservación de la masa 234  
 — — — — — segunda de Newton (fundamental de dinámica) 73, 78, 153  
 — — — — — tercera de Newton 67  
 — — — — — de transformación para una cantidad de movimiento transversal 495  
 — — — — — — fuerza transversal 495  
 — — — — —  $\frac{1}{2}$ , 605  
 — — — — — Wiedemann—Franz 596  
 Licuación de los gases, refrigerador de gases por expansión 457  
 — — — — — gases 455  
 Líquido compresible 34  
 — — — — — difusión de un 421  
 — — — — — estructura de un 417  
 — — — — — ideal 385  
 — — — — — incompresible 364  
 — — — — — ordenación próxima 417  
 — — — — — recalentado 451, 455  
 — — — — — sobrecalentado 451  
 — — — — — teoría de los huecos 418  
 Longitud del recorrido libre de una molécula de gas 281  
 — — — — — del segmento 44, 147

Masa 3  
 — — — — — atómica relativa 305  
 — — — — — en reposo (propia) 152, 221  
 — — — — — medición de la masa 172  
 — — — — — molar 305  
 — — — — — molecular relativa 305  
 Magnetón de Bohr 530  
 Menisco 427  
 Módulo de compresión volumétrica 387  
 Momento cinético orbital 529  
 — — — — — de cantidad de movimiento 245  
 — — — — — — e isotropía del espacio 255  
 — — — — — — ley de la conservación 246  
 — — — — — —, unidad de 246  
 — — — — — fuerza 243  
 — — — — — —, unidad de 244  
 — — — — — inercia 239  
 — — — — — —, cuerpos de forma sencilla 241, 242, 243  
 — — — — — —, unidad de 239  
 — — — — — magnético 503  
 — — — — — de un átomo 529  
 — — — — — una carga en circulación 504  
 — — — — — spin de un electrón 546  
 Monocristal 395  
 Motor de retropropulsión 377  
 — — — — — térmico 352  
 Movilidad de una carga 490  
 Movilidad de una partícula 573  
 Movimiento acelerado 56  
 — — — — — browniano 281, 346  
 — — — — — de rotación 26  
 — — — — — — traslación 25  
 — — — — — estacionario 363  
 — — — — — inercial 39  
 — — — — — mecánico 25  
 — — — — — molecular 276  
 — — — — — relativo, de traslación, compuesto 54  
 — — — — — retardado 56  
 — — — — — uniforme 31  
 — — — — — uniformemente variado 56  
 — — — — — variado 32  
 Muones 147

Nube de electrones 604  
 Número de Alfvén 623  
 — — — — — Hartmann  
 — — — — — Mach 370  
 — — — — — Reynolds 131  
 — — — — — Stuart 623  
 — — — — — magnético 622

Onda de choque 368  
 — — — — — frontal 272  
 — — — — — perturbaciones elásticas 367  
 — — — — — sonora en un gas 368  
 — — — — — superficial (circular) 367  
 Orden de largo alcance 399  
 Ordenación próxima 416  
 Oscilación armónica 95

Par termoeléctrico 585  
 Paradoja de los gemelos 272  
 Paramagnetismo 528, 535  
 Parámetros termodinámicos de estado 329

Partícula localizada 187  
 — —, energía cinética media 188  
 — —, valor medio de la cantidad de movimiento 188  
 Período 61  
 — de rotación de una partícula 512  
 516  
 Permeabilidad magnética 499  
 Peso 70  
 Plasma 617  
 — de descarga de gas 618  
 — — — —, temperatura electrónica del 619  
 — — — —, temperatura iónica del 619  
 — en el campo magnético 622  
 — isotérmica 619  
 — superdensa 439  
 Polarización de un dieléctrico 475  
 Polarizabilidad de una molécula 388, 479  
 — — deformación 478  
 — — dipolar 480  
 Policristal 397  
 Polietileno 415  
 Poliformismo 409  
 Polímeros 414  
 Positron 513  
 Potencia instantánea 186, 244  
 —, unidad de 186  
 Potencial de cierre 606  
 — del campo de una carga puntual 209, 459  
 — — — — electrostático 208, 459  
 — — — —, unidad de 209  
 — — — — gravitatorio 210  
 Potenciómetro 605  
 Pozo de potencia 216, 588  
 Presión 197  
 — bajo la superficie curvada de un líquido 426  
 — del vapor saturado 433  
 — de un gas 292  
 — — — — ideal 298  
 — — — —, unidad de 292  
 — — — — líquido frenado (total) 381  
 Principio de autoestabilidad 521  
 — — correspondencia 150  
 — — crecimiento de la entropía 345  
 — — equivalencia 287  
 — — incertidumbre 162  
 — — imposibilidad de Clausius 345  
 — — — — Thomson 356  
 — — la inercia 37-39  
 — — invariancia de la velocidad de la luz 137  
 — — la relatividad de Galileo 42  
 — — — — Einstein 42, 137  
 Principio de simetría del espacio-tiempo 255  
 — — termodinámica, primero 231, 313  
 — — — — segundo 345  
 Probabilidad de disposición de las moléculas 307  
 — termodinámica 336, 337  
 — —, ligazón con la entropía 339  
 Proceso térmico 223  
 Protección electrostática 470  
 Psicrómetro 441  
 Pulverización catódica del metal 620

Punto de Curie 530  
 — — Néel 561  
 — — rocío 439  
 — — material 26  
 — triple 447  
 Radio vector 47  
 Reacción nuclear 226  
 Recombinación de los iones 598, 610  
 Recorrido medio cuadrático 349  
 Red cristalina 398, 410  
 Regla de Lenz 562  
 — del paralelogramo 49  
 — — polígono 48  
 — — la mano izquierda 509  
 Relojes, sincronización de los 137  
 Rendimiento de un motor 355  
 Resistencia de ondas 373  
 — eléctrica 488  
 Resistencia eléctrica del manantial de corriente 491  
 — —, unidad de 488  
 — — específica (resistividad) 488  
 — — — —, dependencia de la temperatura 488  
 — — — —, unidad de 489  
 Resistor 488  
 Rigidez 66  
 Rozamiento de deslizamiento o cinemático 119, 123  
 — — rodadora 119, 124  
 — en reposo 119  
 — externo 119  
 — interno (viscosidad) 119, 126  
 Salto de compresión 368  
 Saturación magnética 544  
 Sección eficaz de choque 283  
 Semiconductor 373  
 Separación de mezclas gaseosas 288  
 Seudonúcleos 418  
 Simultaneidad, sentido relativo 102  
 Sincrofasotrón 518  
 Sistema de referencia 28  
 — cerrado de cuerpos 167, 232  
 — — — — conservativo 211  
 — de cuerpos aislados adiabáticamente 232  
 — — referencia hsiocéntrico 41  
 — inercial de referencia 40, 82  
 — no inercial de referencia 83, 256  
 Solenoide 507  
 Sólidos amorfos 398, 424  
 Solvato 598  
 Spin del electrón 548  
 Sublimación 430  
 Susceptibilidad eléctrica 476  
 — magnética 532  
 — — de las sustancias ferromagnéticas 537  
 Técnica criogénica 457  
 Temperatura 296  
 — absoluta 297  
 —, cero absoluto 301  
 — crítica 423  
 — de Debye 506  
 — — degeneración 302  
 —, escala práctica internacional de 301

- Temperatura, medición de la 298  
 Tensión 385  
 — en un sector del circuito 484  
 — superficial 426  
 — tangencial 121  
 Teorema de Steiner 241  
 Teoría de gravitación de Einstein 268  
 Termodinámica 231  
 —, primer principio de 231, 313  
 —, segundo principio, sentido estadístico 345  
 Termoelectricidad 584  
 Termoelectrones 603  
 Termionización 618  
 Termómetro de gas 298  
 Tiempo de estado sedentario 419  
 — — relajación 329, 493, 568  
 — del recorrido libre de un electrón 578  
 —, homogeneidad 27  
 — propio 146  
 Tobera 374  
 — de Laval 377  
 Trabajo 198  
 —, al dilatarse un gas 312  
 — — girar un cuerpo 244  
 — de salida de un electrón 587  
 — — una fuerza externa 228  
 — elemental 184  
 — expresado por el potencial 209  
 —, gráfica del 199  
 —, unidad de 186  
 Transformación adiabática 232, 318  
 — castroática 329  
 — compensadora 345, 356  
 — de Galileo 43  
 — irreversible 332  
 — isobárica 315  
 — isócora 314  
 — isotérmica 292, 317  
 — reversible 330  
 Transformaciones de Lorentz 144  
 Transformaciones de fase de primer género 442  
 — — — — segundo género  
 Transmisión de calor 228  
 Trayectoria 27  
 Tríodo 606  
 —, característica de rejilla de un 607  
 Tubo de Pitot 382  
 — — Pitot—Prandtl 382  
 — — rayos catódicos 608  
 Unidad astronómica de longitud 102  
 Unidades básicas 85, 86  
 — derivadas 86  
 —, sistema de 84  
 —, sistema internacional de 85  
 Vapor no saturado (recalentado) 436  
 — saturado, densidad del 432  
 — —, presión del 433  
 — sobresaturado (sobrefriado) 452  
 Vastija de Dewar 233  
 Vector 47  
 — de desplazamiento 476  
 — — imanación 531  
 — — polarización 475  
 — unitario 510  
 —, valor absoluto (módulo) 48  
 Velocidad 51, 52  
 — angular 60, 238  
 — —, ligazón con la lineal 238  
 Velocidad angular, unidad de 60  
 — cósmica primera, segunda 214  
 — de escape 173  
 — del movimiento uniformemente variado 60  
 — de la luz 134, 143  
 — — onda 367  
 — del sonido en un gas 369  
 — estacionaria 132  
 — inicial 56  
 — instantánea 35, 54  
 — más probable de las moléculas 279  
 — media 34  
 — — cuadrática 290  
 Viscosidad de los gases 422  
 — — — — líquidos 127, 422  
 Volumen molar 305